

Исследовательская работа на тему „Квадрат суммы и квадрат разности для матриц размером 2x2 “

МАОУ КУГ №1 – Универс
Профильная лаборатория математики
г.Красноярск
Выполнила :Исаенко Ю.А.

Цель и задачи:

Цель: изучить некоторые свойства квадратных матриц размерности 2×2 .

Задачи:

1. Исследовать некоторые свойства матриц $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Исследовать справедливость некоторых формул сокращенного умножения для квадратных матриц размерности 2×2
3. Исследовать справедливость свойства возведение в степень произведения квадратных матриц размерности 2×2 .

Объект исследования - матрицы

Матрица-это прямоугольная таблица специального вида, состоящая из n строк и m столбцов, заполненная числами.

Например:

Матрица A называется матрицей размера $m \times n$, числа a_{ij} называются ее элементами, где i показывает номер строки, j - номер столбца

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица — квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю. Обозначается такая матрица E .

Например:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Виды матриц.

- Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ например: } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ пример } \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

- Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется прямоугольной.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ пример } \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу размерностью $(m \times n)$ надо каждый элемент матрицы умножить на число.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot k = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k & a_{12} \cdot k \\ a_{21} \cdot k & a_{22} \cdot k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; k = 3;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Справедливо переместительное свойство

$$\underline{Ak = kA}$$

2. Сумма (разность) матриц

Складываются соответствующие элементы матриц. Количество суммируемых матриц может быть произвольным. Для сложения матриц матрицы должны быть одной размерности $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

пример :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 5+2 & 2+(-1) \\ 1+2 & 7+(-4) & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Чтобы одну матрицу можно было умножить на другую матрицу нужно, чтобы число столбцов первой матрицы равнялось числу строк второй матрицы.

Умножение выполняется по следующему алгоритму:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц в общем случае зависит от порядка сомножителей, то есть оно не коммутативно:

$$\underline{AB \neq BA}$$

Исследование некоторых свойств матриц

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Выведем формулу для возведения матрицы X в n -ую степень.

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2^{2-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = X^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = 2^{3-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = X^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = 2^{4-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исходя из вышеописанных примеров, предполагаем, что общей формулой будет

$$X^n = 2^{n-1} \cdot X$$

(1)

Докажем истинность формул с помощью метода математической индукции

$$X^n = 2^{n-1} * X \quad (1)$$

1) $n = 1; X^1 = 2^{1-1} * X$

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

-верно

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) В предположении, что (1) верна для $n=N$

докажем, что формула (1) верна для $n=N+1$

$$\begin{aligned} X^{N+1} &= X^N * X = 2^{N-1} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{N-1} & 2^{N-1} \\ 2^{N-1} & 2^{N-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{N-1} + 2^{N-1} & 2^{N-1} + 2^{N-1} \\ 2^{N-1} + 2^{N-1} & 2^{N-1} + 2^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^N & 2^N \\ 2^N & 2^N \end{pmatrix} = 2^N * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^N * X \end{aligned}$$

Итак $X^{N+1} = 2^N * X$. Значит, формула (1) верна для всех значений $x \in \mathbb{N}$

Формула для возведения матрицы Y в n -ую степень.

Выведем формулу для возведения матрицы Y в n -ую степень.

$$Y^2 = Y \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2^{2-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 = Y^2 \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = 2^{3-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^4 = Y^3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = 2^{4-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^n = 2^{n-1} \cdot Y$$

ость формулы(2) доказывается аналогично формуле (1).

Выведем формулу для возведения суммы матриц X и Y в n -ую степень.

$$(X + Y)^n = ?$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(X + Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot E$$

$$(X + Y)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot E$$

$$(X + Y)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot E$$

Замечаем закономерность, которая выражена формулой

$$(X + Y)^n = 2^n \cdot E \quad (3)$$

□ Докажем истинность формулы (3) с помощью метода математической индукции

$$(X + Y)^n = 2^n \cdot E \quad (3)$$

1) $n = 1$; $(X + Y)^1 = 2^1 * E = 2E$

2) Пусть (3) верно для $n = k$, докажем, что (3) верна для $n = k + 1$

$$\begin{aligned} (X + Y)^{k+1} &= (X + Y)^k \cdot (X + Y) = 2^k \cdot E \cdot (X + Y) = 2^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \\ &= 2^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{k+1} \cdot E \end{aligned}$$

Итак $(X + Y)^{k+1} = 2^{k+1} \cdot E$; **Значит формула (3) верна для всех $x \in \mathbb{N}$**

.Исследуем истинность формулы $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix}$$

$$(X+Y)^2$$

$$X+Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix}$$

$$(X+Y)^2 = \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+m & b+k \\ c+g & d+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+m)^2 + (b+k)(c+g) & (a+m)(b+k) + (b+k)(d+z) \\ (c+g)(a+m) + (d+z)(c+g) & (c+g)(b+k) + (d+z)^2 \end{pmatrix}$$

во втором случае, сложим квадрат матрицы X с удвоенным произведением матриц X Y и прибавим квадрат матрицы Y

$$X^2 + 2XY + Y^2$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + kg & mk + kz \\ gm + zg & gk + z^2 \end{pmatrix}$$

$$2 * X * Y = X \cdot Y \cdot 2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & k \\ g & z \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} am + bg & ak + bz \\ cm + dg & ck + dz \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2am + 2bg & 2ak + 2bz \\ 2cm + 2dg & 2ck + 2dz \end{pmatrix}$$

$$X^2 + 2XY + Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2am + 2bg & 2ak + 2bz \\ 2cm + 2dg & 2ck + 2dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m^2 + kg & mk + kz \\ gm + zg & gk + z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc + 2am + 2bg + m^2 + kg & ab + bd + 2ak + 2bz + mk + kz \\ ca + dc + 2cm + 2dg + gm + zg & cb + d^2 + 2ck + 2dz + gk + z^2 \end{pmatrix}$$

сравним получившиеся матрицы поэлементно, то есть каждый элемент одной матрицы

с соответствующим элементом другой матрицы

$$\underline{\underline{(X+Y)^2}}$$

$$\begin{pmatrix} (a+m)^2 + (b+k)(c+g) & (a+m)(b+k) + (b+k)(d+z) \\ (c+g)(a+m) + (d+z)(c+g) & (c+g)(b+k) + (d+z)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X^2 + 2XY + Y^2}}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc + 2am + 2bg + m^2 + kg & ab + bd + 2ak + 2bz + mk + kz \\ ca + dc + 2cm + 2dg + gm + zg & cb + d^2 + 2ck + 2dz + gk + z^2 \end{pmatrix}$$

Обозначим p, q позицию элемента матрицы. Получаем

$$1.1 \quad kc = gb \quad (1)$$

$$1.2 \quad mb + kd = ak + bz \quad (2)$$

$$2.1 \quad cm + dg = ga + zc \quad (3)$$

$$2.2 \quad gb = ck \quad (4)$$

замечим, что условия (1)(4) совпадают

из (1) следует $\frac{k}{b} = \frac{g}{c}$

Сравним (2) и (3):

$$1.2 \quad b(m - z) = k(a - d)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{g} = \frac{a - d}{m - z}$$

$$2.1 \quad c(m - z) = g(a - d)$$

В итоге получаем условие, при котором выполняется равенство $(X+Y)^2=X^2+2XY+Y^2$

Это будет пропорция:

$$\frac{c}{g} = \frac{b}{k} = \frac{a-d}{m-z}$$

($k, g, m-z \neq 0$)

Проверим истинность формулы для особого случая, когда $(k, g, m, n=0)$

Тогда матрица Y имеет вид $Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$(X + Y)^2$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + m & b \\ c & d + m \end{pmatrix}$$

$$(X + Y)^2 = \begin{pmatrix} a + m & b \\ c & d + m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + m & b \\ c & d + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + m)^2 + bc & (a + m)b + b(d + m) \\ (a + m)c + (d + m)c & cb + (d + m)^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + 2XY + Y^2$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Y \cdot 2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} am & bm \\ cm & dm \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2am & 2bm \\ 2cm & 2dm \end{pmatrix}$$

$$X^2 + 2XY + Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2am & 2bm \\ 2cm & 2dm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc + 2am + m^2 & ab + bd + 2bm \\ ca + dc + 2cm & cb + d^2 + 2dm + m^2 \end{pmatrix}$$

Сравниваем каждый элемент одной матрицы с элементом другой матрицы.

$$\underline{\underline{(X + Y)^2}}$$

$$\begin{pmatrix} (a + m)^2 + bc & (a + m)b + b(d + m) \\ (a + m)c + (d + m)c & cb + (d + m)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X^2 + 2XY + Y^2}}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc + 2am + m^2 & ab + bd + 2bm \\ ca + dc + 2cm & cb + d^2 + 2dm + m^2 \end{pmatrix}$$

$$1.1 \quad (a + m)^2 + bc = a^2 + bc + 2am + m^2 \quad (1)$$

$$1.2 \quad (a + m)b + b(d + m) = ab + bd + 2bm \quad (2)$$

$$2.1 \quad (a + m)c + (d + m)c = ca + dc + 2cm \quad (3)$$

$$2.2 \quad cb + (d + m)^2 = cb + d^2 + 2dm + m^2 \quad (4)$$

В частном случае когда одна из матриц имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

то формула $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

является истинной

Исследование показали что все выводы сделанные для квадрата суммы двух матриц 2×2 ,справедливы и для квадрата разности таких матриц

Результат:

1. В общем случае для квадратных матриц порядка 2×2 формулы квадрата суммы, квадрата разности, разности квадратов не являются истинными, но при этом формулы истинны если выполняются пропорция.

$$\frac{c}{g} = \frac{b}{k} = \frac{a - d}{m - z}$$