Кубические уравнения

Выполнил студент группы СТз-17-1

Басистых В.Н

Понятие кубического уравнения

- **Кубическое уравнение** - алгебраическое уравнение третьей степени,
$$ax^3+bx^2+cx-d=0$$
- где a, b,c ,d - коэффициенты, а x - переменная.
- Число x, обращающее уравнение в тождество, называется **корнем** или решением уравнения

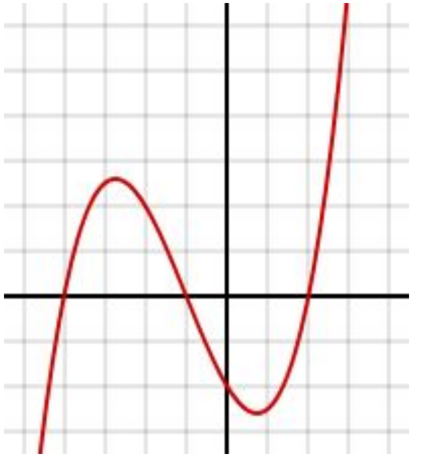


График кубического уравнения

Любое кубическое уравнение можно привести к более простому виду - каноническому :

$$y^3+py+q=0$$

Для нахождения корней кубического многочлена существует несколько способов:

1. С помощью вынесения общего множителя;
2. С помощью деления на многочлен;
3. С помощью теоремы Виета;
4. С помощью схемы Горнера;
5. Решение возвратных уравнений;
6. Графический способ.

1. Решение кубических уравнений с помощью вынесения общего множителя за скобки

Алгоритм решения:

1. Перегруппировать члены данного уравнения
2. Вынести общий множитель за скобки
3. Получить произведение равное нулю
4. Решить полученные уравнения.

Пример: $2x^3-7x^2+2x+3=0$

Решение:

1. Преобразуем

$2x^3-7x^2+2x+3=2x^3-2x^2-5x^2+5x-3x+3=0$

2. Попарно группируем и выносим общий множитель за скобку

$2x^2*(x-1)-5x*(x-1)-3*(x-1)=0$

3. Выносим общий множитель (x-1), получаем произведение множителей

$(x-1)*(2x^2-5x-3)=0$

$x-1=0 \qquad 2x^2-5x-3=0$

4. $x-1=0 \qquad 2x^2-5x-3=0$

$x_1=1 \qquad x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4*2*(-3)}}{2*2}$

$x_2=3$ $x_3=-0,5$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=3$; $x_3=-0,5$

2. Решение кубических уравнений с помощью деления многочлен на многочлен

Алгоритм решения:

1. Подобрать один корень из делителей свободного члена
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

Пример: $x^3+3x^2-6x-8=0$

1. ***Решение:*** Рассмотрим делители свободного члена 8:(1;-1;2;-2;4;-4;8;-8). Найдем делитель при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

$X=1: 1^3+3*1^2-6*1-8 \neq 0$

$X=-1: (-1)^3+3*(-1)^2-6*(-1)-8=0$

2. Так как кубическое уравнение можно представить в виде произведения множителей $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-X_1)*(x-X_2)*(x-X_3)$, то разделим многочлен

x^3+3x^2-6x-8 на многочлен $(x+1)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-6x-8 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2} & x^2+2x-8 \\
-\,2x^2-6x & \\
\underline{2x^2+2x} & \\
-\,-8x-8 & \\
\underline{-8x-8} & \\
0 &
\end{array}
$$

3. получаем (x^2+2x-8)

$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$

$x^2+2x-8=0$

$D=2^2-4*1*(-8)=36$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2*1}$

$X_2=2$

$X_3=-4$

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=-4$

3. Теорема Виета

Алгоритм решения:

Подобрать корни, удовлетворяющие системе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b/a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a \\ x_1x_2x_3=-d/a \end{cases}$$

,где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения

П р и м е р : x^3-$9x^2$+26x-24=0

Р е ш е н и е : Подбираем корни:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = 9 \\ x1 * x2 + x2 * x3 + x1 * x3 = 26 \\ x1 * x2 * x3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3 + 4 = 9 \\ 2 * 3 + 3 * 4 + 4 * 2 = 26 \\ 2 * 3 * 4 = 24 \end{cases}$$

О т в е т : $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=4$

4. Схема Горнера

Алгоритм решения:

1. По схеме Горнера найти корень уравнения
2. Решить получившееся квадратное уравнение

Если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a^n$, $a_0\neq0$, $g(x)=x-c$, то при делении ***f(x)*** на ***g(x)*** частное ***q(x)*** имеет вид $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b^{n-1}$, где $b_0=a_0$, $b_k=c.b_{k-1}+a_k$,$k=1,2,\ldots n-1$. Остаток ***r*** находится по формуле $r=c$. $b_{n-1}+a_n$

	a_0	a_1	a_2	…	a_n-1	a_n
x = c	$b_0=a_0$	$b_1=c*b_0+a_1$	$b_2=c*b_1+a_2$	…	$b_{n-1}=c*b_{n-2}+a_{n-1}$	$r=f(c)=c*b_{n-1}+a_n$

В первой строке этой таблицы записывают коэффициенты многочлена ***f(x)***. Если какая-то степень переменной отсутствует, то в соответствующей клетке таблицы пишется 0. Всегда **старший** коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого $b0=a0$. Если ***x = c*** является корнем многочлена, то в последней клетке получается 0, т.е. остаток от деления будет равен нулю.

П р и м е р : Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Р е ш е н и е : Находим делители свободного члена 12: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12. используя схему Горнера, найдем целые корни уравнения:

	$a_0=1$	$a_1=-1$	$a_2=-8$	$a_3=12$	
x = 1	1	0	-8	4	не корень
x = -1	1	-2	-6	18	не корень
x = 2	***1***	***1***	***- 6***	***0***	***к о р е н ь***

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$

О т в е т : $x_1 = 2$; $x_2 = 3$

5. Решение возвратных кубических уравнений

Алгебраическое уравнение вида: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$, при k = 0, 1, …, n.

Алгоритм решения:

1. Корнем уравнения является x=-1
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

Пример: $x^3-2x^2-2x+1=0$

Решение: $x_1=-1$, по правилу нечётных степеней для возвратного уравнения.

$x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x^2-3x+1)$

$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

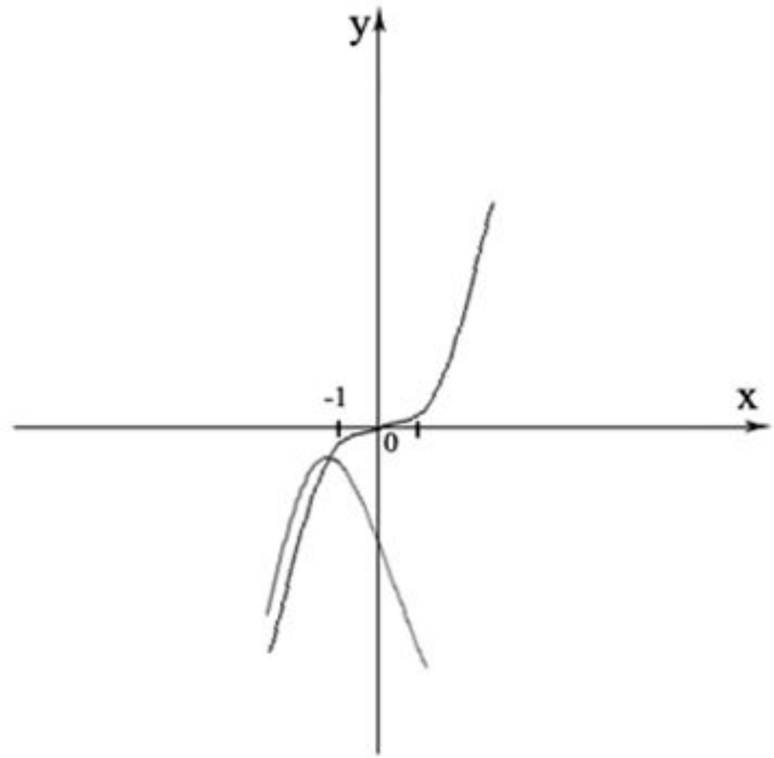
6. Графический способ

Алгоритм решения:

- 1. Разбить кубическое уравнение на два уравнения
- 2. Построить графики функций стоящих в левой и правой частях уравнения
- 3. Абсциссы точек пересечения графиков – корни заданного уравнения

Пример: $x^3+4x^2+6x+3=0$

Решение: Преобразуем уравнение $x^3= -4x^2-6x-3$. Построим графики функций $y=x^3$ и $y=-4x^2-6x-3$



Ответ: $x_1=-1$

Заключение

Просмотрев множество способов решения кубических уравнений, я остался верен двум на мой взгляд самым надёжным и практичным способам - это теорема Виета и схема Горнера, они позволяют быть уверенным в своем ответе.

Теперь, выбирая между ними, мне стоит лишь посмотреть на сложность коэффициента уравнения.