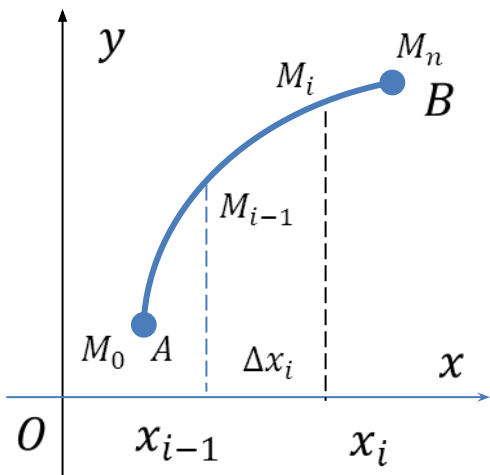


## 8.3 Криволинейные интегралы

### 8.3.1 Определение криволинейного интеграла по координатам.



- *Интеграл по координате x.*

Пусть  $AB$  – дуга непрерывной кривой на плоскости  $OXY$ , а  $z = P(x, y)$  – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем дугу  $AB$  на конечное число частичных дуг  $M_{i-1}M_i$

с длинами  $\Delta l_i$  ( $1; n$ ). Составим сумму произведений значений функции в каждой точке  $(\xi_i, \eta_i) \in M_{i-1}M_i$  на длину  $\Delta x_i$  проекции

дуги  $M_{i-1}M_i$  на ось  $ox$ :

$$S_n = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

Если при стремлении к нулю  $l = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$  интегральные суммы  $S_n$  имеют конечный предел, то этот предел называется *криволинейным интегралом по переменной x от функции P(x, y) по кривой AB* и обозначается

⊠

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

• **Криволинейные интегралы по координата общего вида**  
**(криволинейные интегралы второго рода)**

Аналогично вводится криволинейный интеграл по переменной  $y$  от функции  $Q(x, y)$  по кривой  $AB$

$$\int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (l \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

Криволинейные интегралы по координата общего вида определяются равенством

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

В случае, если  $AB$  – плоская кривая, заданная уравнением  $y = f(x)$ , то

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_A}^{x_B} [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)] dx.$$

Если кривая  $AB$  задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t)$ , где  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} [P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)] dt.$$

- **Свойства криволинейного интеграла второго рода.**

1) Криволинейный интеграл при перемене направления кривой меняет знак.

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx$$

$$2) \int_{AB} kP(x, y) dx = k \int_{AB} P(x, y) dx,$$

$$3) \int_{AB} (P_1(x, y) + P_2(x, y)) dx = \int_{AB} P_1(x, y) dx + \int_{AB} P_2(x, y) dx$$

$$4) \int_{AB} P(x, y) dx = \int_{AC} P(x, y) dx + \int_{CA} P(x, y) dx$$

5) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

6) Если АВ – кривая, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси ОХ, то

$$\int_{AB} P(x, y) dx = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным у.

### Пример.

Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L x^2 y dx + x^3 dy$ .  $L$  – контур, ограниченный параболой  $y^2 = x$ ;  $x^2 = y$ . Направление обхода контура положительное.

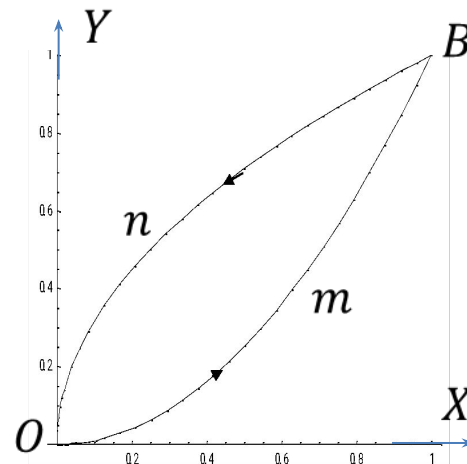
### Решение

Представим замкнутый контур  $L = O m B n O$  как сумму двух дуг

$$L_1 = O m B: y = x^2 \quad \text{и} \quad L_2 = B n O: y = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \oint_L x^2 y dx + x^3 dy &= \int_{L_1} x^2 y dx + \int_{L_1} x^3 dy + \int_{L_2} x^2 y dx + \int_{L_2} x^3 dy = \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 x^3 \cdot 2x dx + \int_1^0 x^2 \sqrt{x} dx + \\ &+ \int_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7} \Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7} \Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}; \end{aligned}$$

$$\text{О т в е т: } \int_L x^2 y dx + x^3 dy = \frac{6}{35}.$$



• **Случай параметрически заданной кривой**

Если дуга  $AB$  непрерывной кривой задана параметрическими уравнениями

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \text{где } t_1 \leq t \leq t_2, \text{ то}$$

Сделать чертеж.

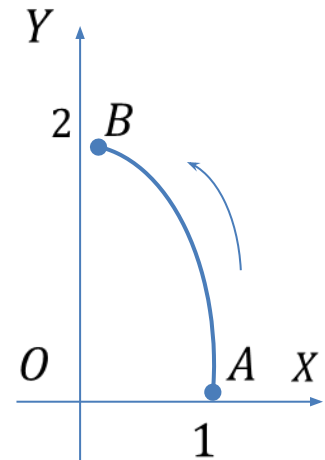
$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)]dt.$$

**Пример.** Вычислить криволинейный интеграл  $I = \int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy$

по дуге эллипса  $x = \cos t, \quad y = 2 \sin t$  от точки  $A(1; 0)$  до точки  $B(0; 2)$ .

**Решение:**

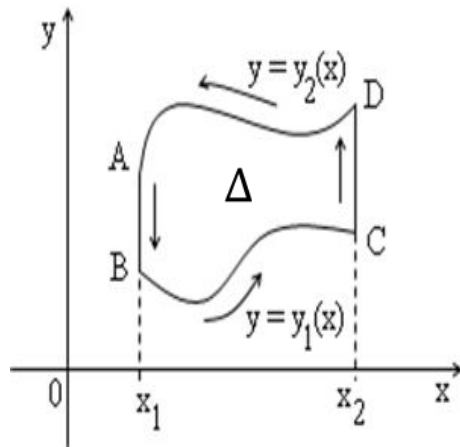
$$\begin{aligned} \int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy &= \int_{t_A}^{t_B} (\cos t \cdot 2 \sin t - 1)(-\sin t dt) + \\ &+ \cos^2 t \cdot 2 \sin t \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\pi/2} (4 \cos^3 t \sin t dt + \sin t - \\ &- 2 \sin^2 t \cos t) dt = \left( -\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Ответ:  $I = \frac{2}{3}$ .

## Формула Остроградского – Грина

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.



Область, ограниченная  
контуром

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.

Если участки АВ и СD контура принять за произвольные кривые, то, проведя соответствующие преобразования, получим формулу для контура произвольной формы:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx$$

Формула Остроградского – Грина во многих случаях позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

## Пример.

Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L x^2 y dx + x^3 dy$ .  $L$  – контур, ограниченный параболой  $y^2 = x$ ;  $x^2 = y$ . Направление обхода контура положительное.

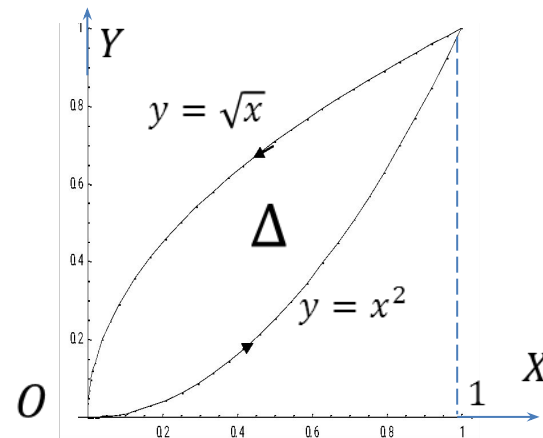
Решение

Найдём интеграл по формуле Остроградского – Грина

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx$$

$$\begin{aligned} \oint_L x^2 y dx + x^3 dy &= \iint_{\Delta} (3x^2 - x^2) dy dx = \iint_{\Delta} 2x^2 dy dx = \int_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4) dx = \\ &= 2 \left( \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35}. \end{aligned}$$

О т в е т:  $\int_L x^2 y dx + x^3 dy = \frac{6}{35}$ .



## 8. Теория рядов.

8.1. Числовые ряды. Необходимое и достаточные условия сходимости.

Признак Лейбница.

• Числовые ряды.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

называется **числовым рядом**  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Числа  $u_1, u_2, \dots$  называют *членами ряда*, а  $u_n = \boxed{\phantom{000000}}$  – *общим членом ряда*.

Суммы  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$  называются **частичными (частными) суммами** ряда.

Ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется **сходящимся**, если сходится

последовательность его частичных сумм  $\boxed{\phantom{000}}, \boxed{\phantom{000}}, \boxed{\phantom{000}}, \dots, \boxed{\phantom{000}}, \dots \boxed{\phantom{000}}$ . **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частичных сумм на

бесконечности  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ,  $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.



## Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum Cu_n$ , где  $C$  – постоянное число.

3) Если ряд  $\sum u_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то ряд  $\sum Cu_n$  где  $C = \text{const}$ , тоже сходится, и его сумма равна  $CS$ . ( $C \neq 0$ )

4) Рассмотрим два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$ . **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$ , где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

5) Если ряды  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  сходятся и их суммы равны соответственно  $S$  и  $\sigma$ , то ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$  тоже сходится и его сумма равна  $S \pm \sigma$ :

$$\sum (u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n = S \pm \sigma$$

6) Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

*Замечание.* О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

## • Гармонические

### ряды

Гармонические ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  при  $p \geq 1$  сходятся, а при  $p < 1$  расходятся

### Примеры.

А) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, так как  $p = 2$ , а  $2 > 1$ .

В) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится, так как  $p = \frac{1}{2}$ , а  $\frac{1}{2} < 1$ .

## • Признак сравнения рядов с неотрицательными членами

Пусть даны два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  с неотрицательными членами.

Если начиная с некоторого номера  $n \geq n_0$  справедливо равенство  $u_n \leq v_n$ , то из сходимости ряда  $\sum v_n$  следует сходимость ряда  $\sum u_n$ , а из расходимости ряда  $\sum u_n$  следует расходимость ряда  $\sum v_n$ .

### Пример.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-3}$  — сходится, так как

$$\begin{cases} n-2 < n \Rightarrow \frac{n-2}{n^3+3} < \frac{n}{n^3+3}; \\ n^3+3 > n^3 \Rightarrow \frac{n}{n^3+3} < \frac{n}{n^3}. \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{n-2}{n^3-3} < \frac{n}{n^3+3} < \frac{n}{n^3}$ . Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, потому что  $p=2, 2>1$ .