Высшая математика

Сергиенко Людмила Семёновна -

доктор технических наук,
профессор кафедры Общеобразовательных Дисциплин Заочно-Вечернего Факультета Иркутского Государственного Технического Факультета - ООД ЗВФ Ир ГТУ.

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е У Р А В Н Е Н И Я

Решения различных геометрических, физических, инженерных, экономических и многих других практических и теоретических задач часто приводят к ***дифференциальным уравнениям***, которые ***связывают независимые переменные***, характеризующие исследуемый процесс, ***с функциями этих переменных и их производными различных порядков.***

З а м е ч а н и е 1.
Исходную функцию при этом считают *производной порядка ноль*.

З а м е ч а н и е 2.
В отличие от рассматриваемых в данном курсе производных – *производных целого порядка* - в последнее время всё чаще используются так называемые ***производные дробного порядка или фрактальные производные***. Полученные при этом результаты оказываются более адекватными реальным процессам. Фрактальные методы используются, например, военными при обработке и сжатии цифровых изображений для сокращения объёма и кодирования информации, что особенно важно как для увеличения скорости передачи так и для эффективности хранения данных.

ТЕМА 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

- ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее одну независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y (x)* и её производные $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$

- Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

- $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$,
- $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$,

- ***Решением дифференциального уравнения*** называется дифференцируемая функция, при подстановке производных которой в уравнение получаем тождество.

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются решениями дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как $y_1' = \sin x$, $y_2' = 5 + \sin x$, а производные $y_1'' = y_2'' = \cos x$ при подстановке в исходное уравнение вместо y'' дают верное равенство при любых x: $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- ***Общим решением*** *дифференциального уравнения n-ого порядка* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *называется его решение* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, *которое содержит n произвольных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример.

Функция $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ с двумя произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением дифференциального уравнения 2- ого порядка $y'' - \cos x = 0$, так как

$$y' = (-\cos x)' + (C_1 x)' + (C_2)' = -(-\sin x) + C_1 + 0 = \boxed{\sin x + C_1}$$

а производная $y'' = (y')' = (\sin x + C_1)' = \boxed{\cos x}$ при подстановке в исходное уравнение даёт тождество $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- ***Частными решениями*** *дифференциального уравнения* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *называются функции, получающиеся из его общего решения при конкретных наборах значений произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются частным решением дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как получена из его общего решения $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ при значениях произвольных постоянных $\{C_1 = 0; C_2 = 0\}$ и $\{C_1 = 5; C_2 = 0\}$ соответственно.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием, называется **интегралом** этого дифференциального уравнения

Так как. постоянная C может принимать любое численное значение, то дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, которое геометрически представляет собой однопараметрическое семейство параллельных кривых вида $y = \varphi(x, C)$.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

График $y = \varphi(x, C_0)$ частного решения дифференциального уравнения первого порядка на плоскости XOY называется **интегральной кривой**.

Задача Коши является задачей определения линии из семейства интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, проходящей при $x = x_0$ через точку $(x_0; y_0)$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

Р е ш е н и е. Так как [illegible] = [illegible] => [illegible] + [illegible] = [illegible] <=> $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ =>

$$xdy = -ydx \quad <=> \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad => \quad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} \quad =>$$

ln[illegible] = − ln[illegible] + ln[illegible] <=> ln[illegible] + ln[illegible] = ln[illegible] => ln[illegible] = ln[illegible] =>

[illegible] = [illegible] *интеграл*, [illegible] = [illegible] - *общее решение дифференциального уравнения.*

Полагая $x_0 = 1$; $y_0 = 2$ имеем $2 = \frac{C}{1} \to \quad C = 2$ =>

[illegible] = [illegible] - *частное решение данного дифференциального уравнение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).*

О т в е т: [illegible] = [illegible]

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$\boldsymbol{Y' = \alpha(x)\beta}(\text{н})$$ [illegible]

Представим данное уравнение в дифференциальной форме записи.

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Обозначая $\alpha(x) = X(x)$, $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$ получаем

[illegible] = [illegible] [illegible]

=> [illegible] = [illegible] + [illegible]

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

Р е ш е н и е. Так как уравнение имеет вид [illegible]$' = -$[illegible]$\cdot \frac{2}{\text{[illegible]} \cos \text{[illegible]}}$ или [illegible]$' =$ [illegible], где [illegible] $= -$[illegible], [illegible] $= \frac{2}{\text{[illegible]} \cos \text{[illegible]}}$, то это уравнение с разделяющимися переменными.

Приведём его к виду [illegible] $=$ [illegible].

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \quad <=> \quad y\cos y\,dy = -2x\,dx \quad => \int y\cos y\,dy = -2\int x\,dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям (см. Интегрирование по частям.):

$$\int y\cos y\,dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & dv = \cos y\,dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix} \right\} = y\sin y - \int \sin y\,dy = y\sin y + \cos y =>$$

$y\sin y + \cos y = -x^2 + C \quad <=> \quad y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция [illegible] не выражена через независимую переменную.

О т в е т: $\quad y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл

1.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид $$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (\mathbf{1})$$

Вводя новую функцию $$\boldsymbol{t = \frac{y}{x}} \qquad (\mathbf{2})$$

получим уравнение с разделяющимися переменными t и x:

$$(\mathbf{2}) => \ y = tx, \quad dy = t\,dx + x\,dt \quad => \ \mathrm{y}' = \frac{\mathrm{t\,dx+x\,dt}}{\mathrm{dx}}\,.$$

$$(\mathbf{1}) \ => \frac{t\,dx+x\,dt}{dx} = f(t) \ \ <=> \ \ t\,dx + x\,dt = f(t)\,dx,$$

$$x\,dt = (f(t) - t)dx \quad => \quad \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \qquad (3)$$

Решив уравнение (3) и заменив t на $\frac{Y}{x}$, получим общий интеграл исходного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Р е ш е н и е. Выполняя подстановку $t = \frac{y}{x}$, $y' = \frac{t\,dx + x\,dt}{dx}$

получим $\frac{t\,dx + x\,dt}{dx} = t(\ln t + 1)$ => $t\,dx + x\,dt = t(\ln t + 1)dx$,

$x\,dt = t(\ln t + 1)dx - t\,dx$. Раскрывая скобки, получим

$x\,dt = t\ln t\,dx$ => $\frac{dt}{t\ln t} = \frac{dx}{x}$, $\int\frac{dt}{t\ln t} = \int\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln t| = \ln|x| + \ln|C|$

(вместо произвольной постоянной *C* можно поставить любую функцию от *C*, которая также будет новой произвольной постоянной).

Используя свойство логарифмов $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, получим

$\ln|\ln t| = \ln|Cx|$ => $\ln t = Cx$ <=> $\log_e t = Cx$ или $t = e^{Cx}$.

Переходя от вспомогательной функции $t = \frac{y}{x}$ обратно к функции y,

получаем $\frac{y}{x} = e^{Cx}$ => $y = x\,e^{Cx}$.

О т в е т: общее решение данного уравнения $y = x\,e^{Cx}$.

1.3 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид
$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

Общее решение определяется по формуле
$$y = e^{-F}\left(\int Q(x)e^{F}dx + C\right), \tag{2}$$

где $F = \int P(x)\,dx$ при нулевой произвольной постоянной

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. Приведем данное уравнение к стандартному виду (1):

$y' + \frac{1}{x^2}y = e^{\frac{1}{x}}$ => $P = \frac{1}{x^2}$; $Q = e^{\frac{1}{x}}$. Так как общее решение определяется по формуле (2), в которой [illegible], найдём сначала

[illegible]

Полагая [illegible] $= 0$, найдём общее решение:

[illegible]

[illegible]

О т в е т: [illegible]

2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Заменой переменных приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

2.1. Уравнения второго порядка, не содержащие явно искомой функции

Имеют вид $F(x, y' y'') = 0.$ (1)

Подстановкой $z = y', \qquad z' = y''$ (2)

уравнение (1) приводится к виду $F(x, z, z') = 0.$

Определяя *z(x)* из последнего дифференциального уравнения первого порядка, найдём *y(x)* как решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$z(x) = \frac{dy}{dx} \quad <=> \quad dy = z(x)dx \quad => \int dy = \int z(x)dx + C.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'}{x}.$

Р е ш е н и е. Применяя подстановку $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dx}$ получаем

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \qquad \ln|z| = \ln|C_1 x| \quad => \quad z = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y' = C_1 x; \qquad y = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

Обозначая $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{2}$, получаем $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

З а м е ч а н и е. Это соотношение является решением данного уравнения для всех значений переменной x кроме x =0.

О т в е т: общее решение уравнения при всех $x \neq 0$ имеет вид $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

2.2. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$ (1)

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$ (2)

Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$ или $y'' = p \frac{dp}{dy}.$ (3)

Подставляя эти значения в уравнение (1) получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменных p и y:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Определив функцию p из последнего уравнения, найдём y из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (3):

$$\frac{dy}{dx} = f(y, C_1) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{f(y, C_1)} = dx.$$

Пример. Найти решение уравнения $y'' + 2y(y')^3 = 0.$

Р е ш е н и е. Замена $y' \Rightarrow p$, $y'' \Rightarrow p\frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка

$$p\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0 \Leftrightarrow p\left(\frac{dp}{dy} + 2yp^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0, \\ \frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0. \end{cases}$$

Из уравнения $p = 0$ имеем $y' = 0$, $\boxed{y = C}$ *решение данного уравнения.*

Из второго уравнения $\frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$ получаем $\frac{dp}{p^2} = -2y\,dy$,

$$\int p^{-2}dp = -\int 2y\,dy \Rightarrow \frac{p^{-1}}{-1} = -y^2 - C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} = y^2 + C_1 .$$

Заменяя p на $\frac{dy}{dx}$ приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dy} = y^2 + C_1 \Rightarrow dx = (y^2 + C_1)dy \Rightarrow \int dx = \int (y^2 + C_1)dy \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2.}$$ – *общий интеграл исходного уравнения.*

3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение содержит искомую функцию и её производные только в первых степенях.

Имеют вид $$y'' + p \cdot y' + qy = f(x), \qquad (1)$$

где *p, q* – заданные числа.

3.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение вида (1), где $f(x) = 0$; $$y'' + p \cdot y' + qy = 0, \qquad (2)$$

называется *однородным*.

Общее решение уравнения (2) строится в зависимости от корней квадратного *характеристического уравнения* $$k^2 + pk + q = 0. \qquad (3)$$

1. Если $k_1 \neq k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2. Если $k_1 = k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ - пара комплексно-сопряжённых корней, где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0.$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0.$

Корни этого уравнения $k_1 = 1$ и $k_2 = 6$ являются действительными несовпадающими числами: поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{6x}.$

Ответ: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{6x}$ - общее решение данного уравнения

3.1. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение $$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$
где $f(x) \neq 0$, называется *неоднородным*.

Его общее решение имеет вид $$y = v(x) + y_0(x), \quad (2)$$
где $v(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения
$$v'' + pv' + qv = 0, \quad (3)$$
а $y_0(x)$ — частное решение данного неоднородного уравнения
$$y_0'' + py_0' + qy_0 = f(x). \quad (4)$$

- **Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов).**

Этот метод применим только к линейным уравнениям вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (1)$$

с правой частью вида $$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x], \qquad (2)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − полные многочлены от x степени m и n соответственно,

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$,

$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{n-1}x + b_m$.

Частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x], \qquad (3)$$

Здесь обозначены:

r - кратность мнимого корня $k = \alpha + \beta j$ в характеристическом уравнении $k^2 + pk + q = 0$ (если такого корня нет, то следует положить $r = 0$),

$l = \max(n; m)$ − наибольшее из чисел m и n.

Неопределённые коэффициены a_l и b_l из (3) определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного дифференциального уравнения (1) после подстановки в него $y_0(x)$ вместо y.

Задача Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Р е ш е н и е. Общее решение имеет вид $y = v(x) + y_0(x), \; v' + 6v = 0,$

1 этап. *Найдём общее решение* $\boldsymbol{v(x)}$. *Соответствующее* однородное уравнение $v'' - 7v' + 6v = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 - 7r + 6 = 0$ =>

$k_1 = 1, \quad k_2 = 6$ – его корни => $\mathbf{V} = \boldsymbol{C_1 e^x + C_2 e^{6x}}$

2 этап. *Найдём структуру частного решения* y_0 данного уравнения

Если $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, то должно быть

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$$

Правая часть имеет вид $f(x) = e^x[(x-2)\cos(0\cdot x) + (x-2)\sin(0\cdot x)]$.

Так как в простом (однократном) корне характеристического уравнения $k_1 = 1 + 0j = \alpha + \beta j \; \alpha = 1, \beta = 0$ совпадают с параметрами α и β правой части $f(x)$, имеем показатель степени r =1 => $y_0(x) = x^1 \cdot e^x[P_1(x)\,cos(0\cdot x) + Q_1(x)\,sin(0\cdot x)]$

<=> $y_0(x) = xe^x[(ax+b)\,cos\,0 + (cx+d)\,sin\,0]$ => $\boldsymbol{y_0(x) = e^x(ax^2 + bx)}$

3 этап. *Найдём неопределённые коэффициенты a и b и функцию y_0.*

В уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ вместо y вставим функцию $y_0(x) = e^x(ax^2 + bx)$

и её производные $y_0' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x$, $y_0'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$

Получим тождество $e^x(-10ax + 2a - 5b) = e^x(x-2)$.

Сокращая обе части равенства на $e^x \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -10a = 1, \\ 2a - 5b = -2. \end{cases} \qquad \Rightarrow a = -\frac{1}{10}, b = \frac{9}{25}.$$

Следовательно *частное решение* $\underline{\boldsymbol{y_0(x) = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)}}$

Найдём общее решение $y(\boldsymbol{x})$ исходного уравнения

Так как $y = v(x) + y_0(x)$, получаем

$$\underline{y = c_1e^x + c_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).}$$

.

5 этап

.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Дифференцируя функцию

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{9}{25} x \right).$$

имеем

$$y' = c_1 e^x + 6c_2 e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{4}{25} x + \frac{9}{25} \right).$$

Так как при $x = 0$ должно выполняться $y = 0, \quad y' = 0,$ полчаем

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 + e^0 \cdot 0 = 1, \\ c_1 e^0 + 6c_2 e^0 + e^0 \cdot (0 + \frac{9}{25}) = 3, \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 6c_2 = \frac{66}{25} \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения $\begin{cases} c_1 = 1 - c_2, \\ 5c_2 = \frac{41}{25} \end{cases} \quad => \quad c_2 = \frac{41}{125}, \; c_1 = \frac{84}{25}$

О т в е т : частное решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{84}{125} e^x + \frac{41}{125} e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{9}{25} x \right).$$