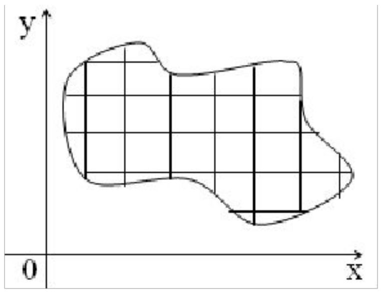
8. Кратные и криволинейные интегралы.

8.1 Двойные интегралы

8.1.1 Определение двойного интеграла



Рассмотрим область ⊠ на плоскости x, y.
Разобьем D на n частичных областей S_i сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Область ⊠ делится на элементарные прямоугольники (за исключением приграничных участков), площади которых равны $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и составим ***интегральные суммы*** ⊠ $= \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot \Lambda S_i$; где f – функция, непрерывная и однозначная для всех точек области D.

Если при бесконечном увеличении количество частичных областей ***n*** интегральные суммы S_n имеют конечный предел, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции f(x, y) по области D и обозначается

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

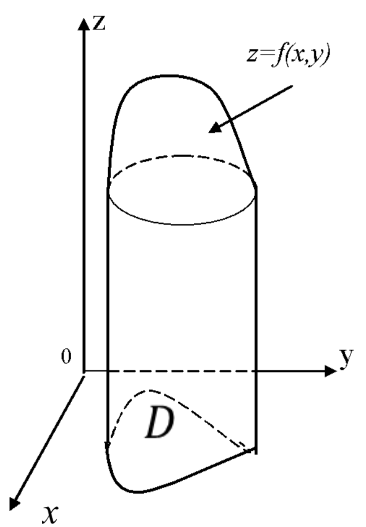
Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области и двойной интеграл существует.

8.1.2 Основные свойства двойного интеграла

1) $\iint\limits_{\Delta}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)\right]dydx=\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)dydx-\iint\limits_{\Delta}f_3(x,y)dydx$

2) $\iint\limits_{\Delta}kf(x,y)dydx=k\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx$

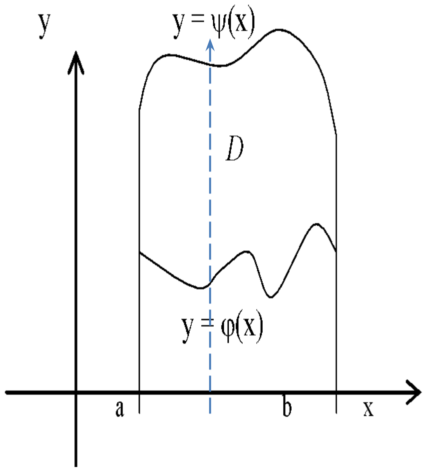
3) Если $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$, то $\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx=\iint\limits_{\Delta_1}f(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta_2}f(x,y)dydx$



- **Геометрический смысл двойного интеграла**

Пусть функция *f(x;y)* неотрицательна при *(x; y)* $\ni D$. Тогда двойной интеграл от этой функции по области D равен объёму *V* цилиндрического тела, основанием которого служит область D плоскости z=0 и которое сверху ограничено поверхностью $z=f(x,y)$

8.1.3 Вычисление двойного интеграла

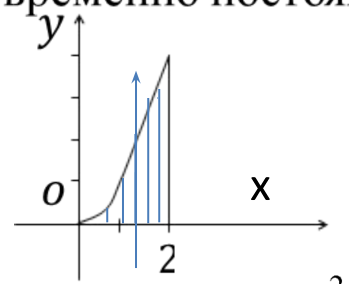


- **Случай области, простой по x**

Если функция f(x,y) непрерывна в замкнутой области D, ограниченной линиями x = a и x = b (a < b), y = ϕ(x), y = ψ(x), где ϕ и ψ - непрерывные функции и ϕ ≤ ψ при a< x<b , то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Интеграл в правой части называется *повторным.* Первым вычисляется внутренний интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ по переменной *y* (*x* при этом считается временно постоянной)



Пример .

Вычислить интеграл $\iint_\Delta (x-y)dxdy$

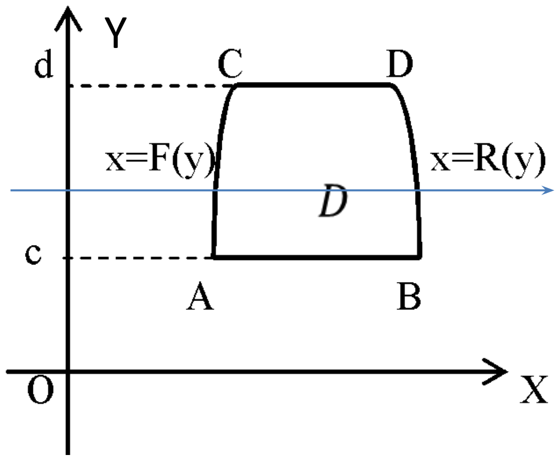
если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x-y)dy = \int_0^2 (xy - \frac{y^2}{2}) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2$$

$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

Ответ: $\iint_\Delta (x-y)dxdy = 0.8$

- **Случай области, простой по y.**



Если область ABCD ограничена прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c < d)$, то есть $c \leq y \leq d$, и дугами линий AC: $x=F(y)$ BD: $x=R(y)$, то есть $F(y) \leq x \leq R(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int\limits_{F(y)}^{R(y)} f(x,y)dx.$$

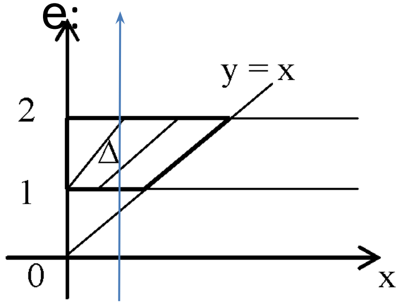
- *Замечание*

В общем случае область D разбивается на области $D_i, i=\overline{1;n}$ рассмотренных типов с последующим использованием свойства аддитивности двойных интегралов

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint f(x,y)dxdy.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями $y = x,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$.

Решение:

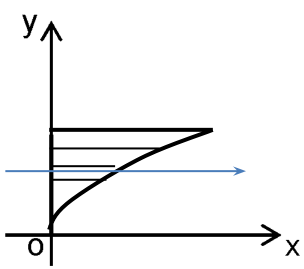


$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x (x^2+y^2)dx=$$

$$=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^y dy=\int\limits_1^2\frac{4}{3}y^3dy=\frac{4}{12}y^4\Bigg|_1^2=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

Ответ: $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=5$

Пример.



Вычислить интеграл $I=\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0,\ x = y^2,\ y = 2$.

$$I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int\limits_0^2(x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$

Решение:

$$=\int\limits_0^2(y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{244}{21}$$

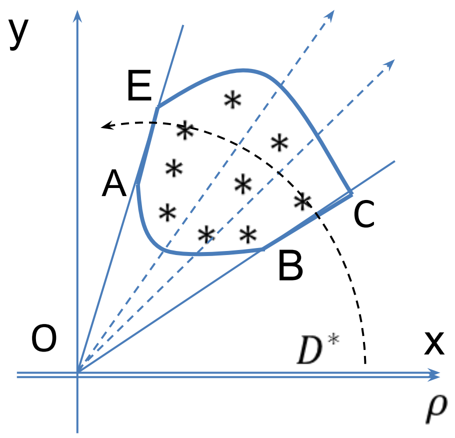
Ответ: $I = 11\frac{13}{21}$

8.1.4 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi,$$

где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая ей область D в декартовой системе координат.



Если область D^* ограничена отрезками лучей BC: $\varphi=\alpha$ и AE: $\varphi=\beta$ $(\alpha<\varphi<\beta)$ и дугами кривых AB: $\rho=\rho_1(\varphi)$ и EC: $\rho=\rho_2(\varphi)$, то получаем

$$\iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi =$$

$$=\int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho$$

Пример

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ с помощью двойного интеграла в полярных координатах.

Р е ш е н и е

1 этап. *Найдём уравнение линии в полярных координатах.*

Подставляя $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ в уравнение кривой в декартовых координатах

$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, получим $(\rho^2 cos^2\varphi + \rho^2 sin^2\varphi)^2 = 2\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi$ $<=>$

$[\rho^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi)]^2 = 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$ $<=>$ $\rho^4 = 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$.

Поделив обе части последнего равенства на $\rho^2 \neq 0$, получим

$\rho^2 = 2\sin\varphi\cos\varphi$ $<=>$ $\underline{\rho^2 = \sin(2\varphi)}$ - *уравнение «лемнискаты Бернулли».*

2 этап. *Построим кривую* $\rho^2 = \sin(2\varphi)$.

А) *Найдём область определения функции.*

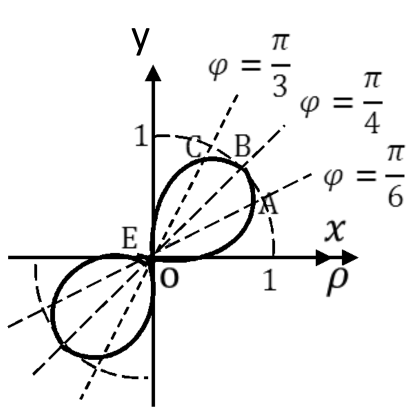
Так как в декартовых координатах. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ => область допустимых значений

$$xy \geq 0 \quad <=> \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

В первой четверти область определения функции $\rho = \sqrt{\sin(2\varphi)}$

$$\sin(2\varphi) \geq 0 \quad => \quad 0 \leq 2\varphi \leq \pi \quad => \quad \underline{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}$$

В) *Строим кривую* в первой четверти, а затем симметрично относительно начала координат отображаем её в третий квадрант.

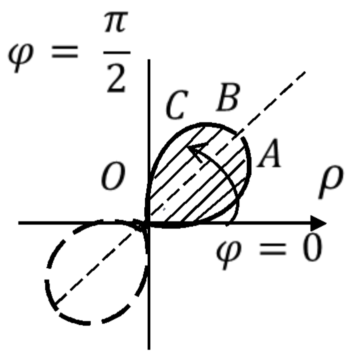


[illegible]рад./град[illegible]	2[illegible] = ψ	sin ψ = F	[illegible] = ξ[illegible]	Точка [illegible], [illegible]
$0 = 0^0$	0^0	0	0	***O***[illegible]; [illegible]
$\frac{[illegible]}{6} = 30^0$	60^0	$\frac{ξ\overline{3}}{2} \approx 0.9$	$ξ\overline{0.9} \approx 0.9$	***A***[illegible]; [illegible]
$\frac{[illegible]}{4} = 45^0$	90^0	1	1	***B***[illegible]; [illegible]
$\frac{[illegible]}{3} = 60^0$	120^0	0.9	0.9	***C***[illegible]; [illegible]
$\frac{[illegible]}{2} = 90^0$	180^0	0	0	***E***[illegible]; [illegible]

3 этап. *Найдём площадь построенной фигуры.*

Площадь $|D|$плоской фигуры в полярных координатах вычисляется

по формуле $[D] = \iint_D \rho d\rho$



Из рисунка видно, что площадь $|D_1|$ области $OABO$ состаиляет *50%* искомой ллощади лемнискаты Бернулли. Так как в D_1

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{\sin(2\varphi)d\varphi}, \end{cases}$$

получаем

$$|D| = 2\,|D_1| = 2\iint_{D_1} \rho d\rho = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin(2\varphi)d\varphi}} \rho d\rho = 2\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{\mathbf{2}}\right]_0^{\sqrt{\sin(2\varphi)}} d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\left(\sqrt{\sin(2\varphi)d\varphi}\right)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2} \mathrm{d\varphi} = \int_0^{\pi/4} \sin(2\varphi)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.$$

О т в е т: $|D| = 1$ (ед.^{3})

8.2 Тройные интегралы

8.2.1 Определение тройного интеграла

Пусть функция *u= f(x, y, z)* определена в ограниченной замкнутой пространственной области V . Разобьём V произвольным образом на n элементарных областей $V_1, V_2, \dots, V_n$ с диаметрами $d_{1,} d_2, \dots, d_n$ и объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой элементарной области возьмём произвольную точку $P_K(\xi_K, \eta_K, \zeta_K)$ и умножим значение функции в этой точке на объём этой области.

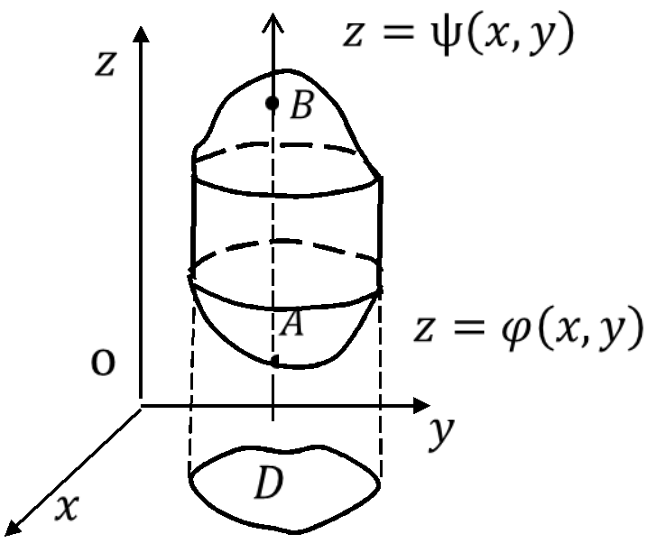
Интегральной суммой для функции *f(x, y, z)* по области *V* называется сумма вида $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k$.

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров $\mathrm{d} = \max_{1 \le k \le n} d_k$ всех элементарных областей ΔV_k Называется тройным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V* и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k.$$

8.2.2 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

- ***Использование двойного интеграла***

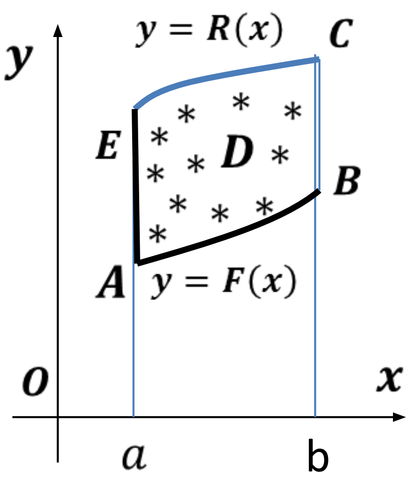


Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху - поверхностью $z = \psi(x, y)$, причём $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ - непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела V на плоскость Oxy. Область V считается *правильной в направлении оси Oz,* если любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции

$$\iiint\limits_V f(x, y. z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y. z)dz \right) dxdy,$$

где вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по переменным x, y от однократного интеграла по z.

• *Использование трёхкратного интеграла*



Пусть областью интегрирования *V* является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху - поверхностью $z = \psi(x, y)$, причём $\varphi(x, y)$и $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ - непрерывные функции в замкнутой области *D*, являющейся проекцией тела V на плоскость Oxy. Если область *D* описывается неравенствами $a \le x \le b$, $F(x) \le y \le R(x)$, где $F(x)$ и $R(x)$ – непрерывные на отрезке [a; b] функции, то

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{F(x)}^{R(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x;y;z)\,dz$$

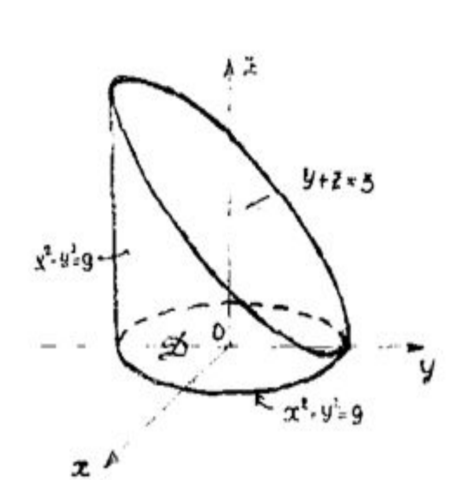
З а м е ч а н и я.

1. Если область V более сложная, чем, то её следует разбить на конечное число областей рассмотренного типа.
2. Порядок интегрирования может быть изменён в зависимости от вида области.

Пример Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0, \quad y + z = 3, \quad x^2 + y^2 = 9.$

Р е ш е н и е.

1) Формула для вычисления объёма тела V, ограниченного снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху – поверхностью $z = \psi(x, y)$ имеет вид



$$|V| = \iiint\limits_V f(x, y. z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y. z)dz \right) dxdy$$

При вычислении внутреннего интграла по переменной z аргументы x, y принимаются временно постоянными

$$|V| = \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{3-y} dz \right) dx\,dy = \iint\limits_D [\mathbf{z}]_0^{3-y} dx\,dy = \iint\limits_D (3 - y)dxdy$$

2) Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_D (3-y)dxdy = |V|$

Проекция D тела V на плоскость Oxy является кругом $x^2 + y^2 \le 9$ радиуса 3, поэтому для рационального способа вычисления двойного интеграла перейдём к полярным координатам пот формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad dx\,dy = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi.$$

Область D задаётся неравенствами $0 \le \rho \le 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ =>

$$|v| = \iint\limits_D (3-y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (3-\rho\sin\varphi)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (3\rho - \rho^2\sin\varphi)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right]_{\rho\to 0}^{\rho\to 3} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{27}{2} - 9\sin\varphi\right)d\varphi = \left[\frac{27}{2}\varphi + 9\cos\varphi\right]_0^{2\mathrm{e}} =$$

$$= (27\pi + 9\cos 2\pi) - (0 + 9\cos 0) = \left\| \begin{matrix} \cos 2\pi = -1, \\ \cos 0 = 1 \end{matrix} \right\| = (27\pi - 9) - 9 = 27\pi - 18.$$

О т в е т: $|V| = 27\pi - 18$ (ед.^{3})