

**« НЕВОЗМОЖНО УПРАВЛЯТЬ ТЕМ, ЧТО  
НЕЛЬЗЯ ИЗМЕРИТЬ . . . »**

**ЭДВАРД ДЕМИНГ**

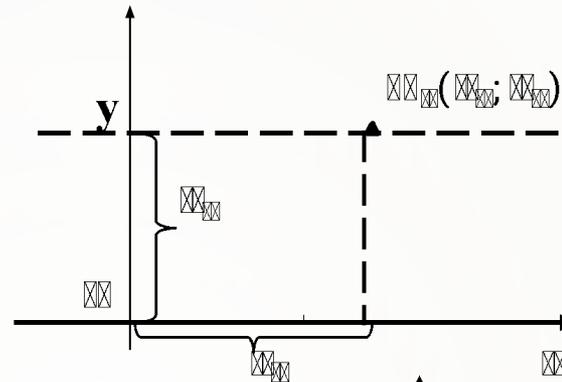
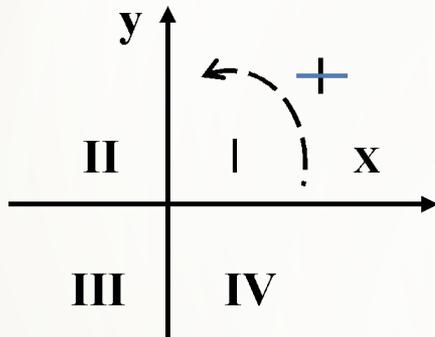


Если при математическом моделировании какого - либо процесса для описания величины достаточно определить только её численное значение, то она называется ***скалярной величиной***.

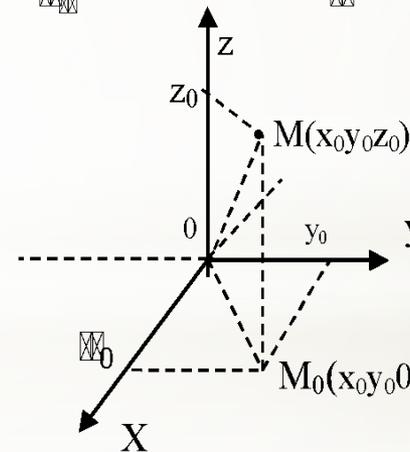
Если для характеристики величины помимо численного значения необходимо указывать направление её изменения, то она называется ***векторной величиной***.

Скалярные величины геометрически изображаются точками, у которых число координат равно размерности пространства моделирования.

- **Декартова прямоугольная система координат на плоскости** представляет собой пару взаимно ортогональных ориентированных против часовой стрелки и одинаково масштабированных прямых



- **Декартову прямоугольную систему координат в трёхмерном евклидовом пространстве** составляют три взаимно ортогональных прямых – ось абсцисс  $ox$ , ось ординат  $oy$  и ось аппликат  $oz$ .



## 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

- **Уравнением линии** называется всякое соотношение между координатами точек, составляющих эту линию.

Линия может быть задана параметрическим способом, в декартовой, полярной или любой другой системе координат..

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{где } A^2 + B^2 \neq 0.$$

- **Общее уравнение прямой на плоскости**

Задаётся уравнением 1 – ого порядка

Вектор  $\vec{n} = (A, B)$ , ортогональный заданной прямой,

называется *нормальным вектором этой прямой*.

Частные случаи расположения прямой:

$C = 0, A \neq 0, B \neq 0$  – прямая проходит через начало координат;

$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$  {  $By + C = 0$  }- прямая параллельна оси  $Ox$ ;

$B = 0, A \neq 0, C \neq 0$  {  $Ax + C = 0$  } – прямая параллельна оси  $Oy$ ;

$B = C = 0, A \neq 0$  – прямая совпадает с осью  $Oy$ ;

$A = C = 0, B \neq 0$  – прямая совпадает с осью  $Ox$ .



(1596 – 1650)

*Рене Декарт – выдающийся французский философ, математик, физик и естествоиспытатель. Считается создателем аналитической геометрии и современной алгебраической символики.*

- **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $(x_0; y_0)$  ортогонально заданному вектору  $\vec{n} = (A, B)$  имеет вид**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

- **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**

$M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

- **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**

$$y = kx + b$$

- **Уравнение прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент  $a$  является координатой точки пересечения прямой с осью  $Ox$ , а  $b$  – координатой точки пересечения прямой с осью  $Oy$ .

**Пример.** Дано общее уравнение прямой  $12x - 5y - 65 = 0$ . Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

**Пример.** Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна  $8 \text{ см}^2$ .

**Р Е Ш Е Н И Е** Уравнение прямой имеет вид:  $x + y - a = 0$ . Так как  $ab/2 = 8$  и  $a = b$ , возможно  $a = 4$ ;  $-4$ .  $a = -4$  не подходит по условию задачи.

**О Т В Е Т:**  $x + y - 4 = 0$ .

**Для самостоятельного решения:** Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(-3, -4)$  и параллельных осям координат.

**О т в е т:**  $\{x + 3 = 0; y + 4 = 0\}$ .

## • Угол между прямыми на плоскости.

Если заданы две прямые  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ , то острый угол  $\alpha$  между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$$

Две прямые параллельны, если  $k_1 = k_2$ .

Две прямые перпендикулярны, если  $k_1 = -1/k_2$ .

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Прямая, проходящая через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и перпендикулярная к прямой  $y = kx + b$  представляется уравнением

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Если задана точка  $M(x_0, y_0)$ , то расстояние до прямой  $Ax + By + C = 0$  определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Пример.** Определить угол между прямыми:  $y = -3x + 7$ ;  $y = 2x + 1$ .

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg}\varphi = ; \quad \varphi = \pi/4.$$

**Пример.** Показать, что прямые  $3x - 5y + 7 = 0$  и  $10x + 6y - 3 = 0$  перпендикулярны.

Находим:  $k_1 = 3/5$ ,  $k_2 = -5/3$ ,  $k_1k_2 = -1$ , следовательно, прямые перпендикулярны.

**Пример.**(для самостоятельного решения): Даны стороны треугольника  $x + y - 6 = 0$ ,  $3x - 5y + 15 = 0$ ,

$5x - 3y - 14 = 0$ . Составить уравнения его высот.

О т в е т:  $\{x - y = 0; 5x + 3y - 26 = 0; 3x + 5y - 26 = 0\}$ .

## Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

- 1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  - уравнение эллипса.
- 2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  - уравнение “мнимого” эллипса.
- 3)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  - уравнение гиперболы.
- 4)  $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$  – уравнение двух пересекающихся прямых.
- 5)  $y^2 = 2px$  – уравнение параболы.
- 6)  $y^2 - a^2 = 0$  – уравнение двух параллельных прямых.
- 7)  $y^2 + a^2 = 0$  – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
- 8)  $y^2 = 0$  – пара совпадающих прямых.
- 9)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  – уравнение окружности.

- **Окружность.** Множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).

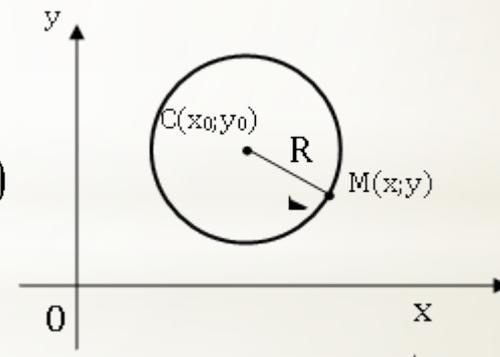
В окружности  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  центр имеет координаты  $(a; b)$ .

**Пример.** Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 &= 121/16 \end{aligned}$$

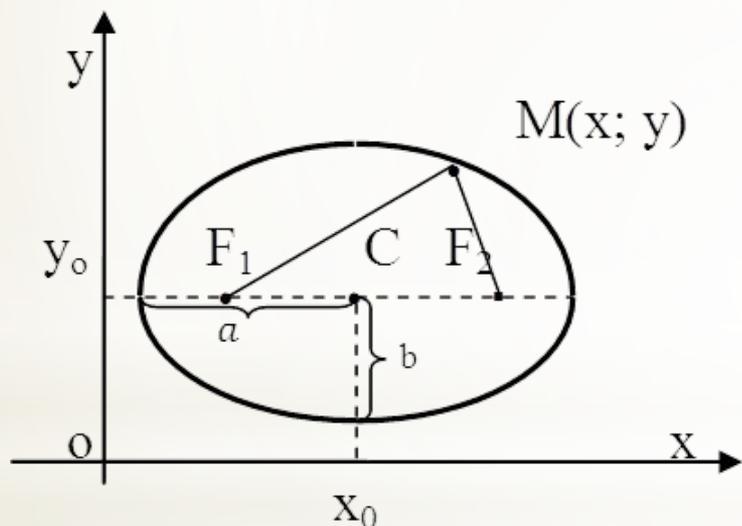


Отсюда находим  $O(2; -5/4); R = 11/4$ .

# ЭЛЛИПС

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  есть постоянная величина, равная  $2a$  (рис.1) .

Каноническое уравнение эллипса 
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



Точки  $F_1$  и  $F_2$  - *фокусы эллипса*,

$MF_1$  и  $MF_2$  - его *фокальные радиусы*.

$2a$  и  $2b$  - длины его осей симметрии

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Задача.** Привести уравнение кривой второго порядка  $4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$  к каноническому виду. Построить график кривой.

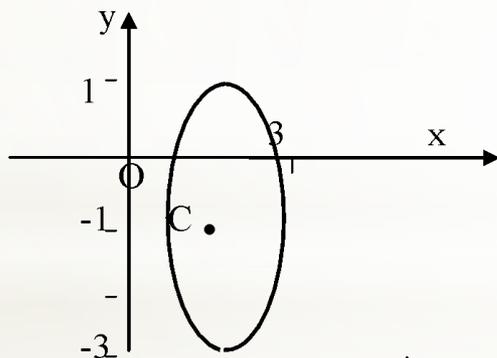
**Решение.**

$$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$$

$$= a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$= 4(x - 2)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 13 = 4(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 : \quad 4(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow$$



$$\frac{4(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow$$

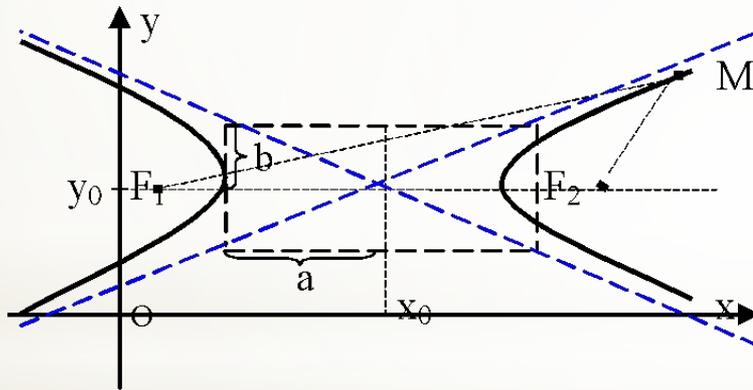
$$\frac{(x - 2)^2}{1} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

# Гипербола

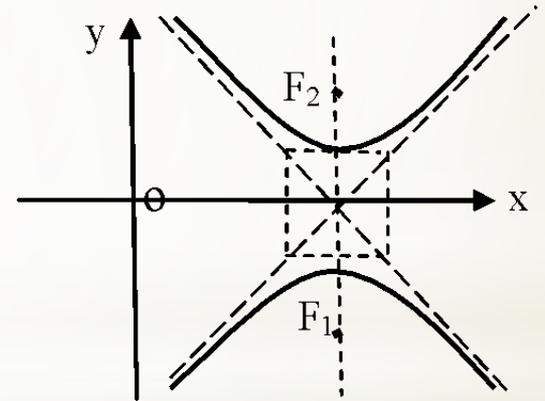
**Гиперболой** называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  есть величина постоянная, равная  $2a$ , причём  $2a$  меньше расстояния между  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 3). Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокусами* гиперболы.

*Канонические уравнения гипербол*

а) 
$$\frac{x^2 - y_0^2}{a^2} - \frac{y^2 - y_0^2}{b^2} = 1$$



б) 
$$\frac{x^2 - y_0^2}{a^2} - \frac{y^2 - y_0^2}{b^2} = 1$$



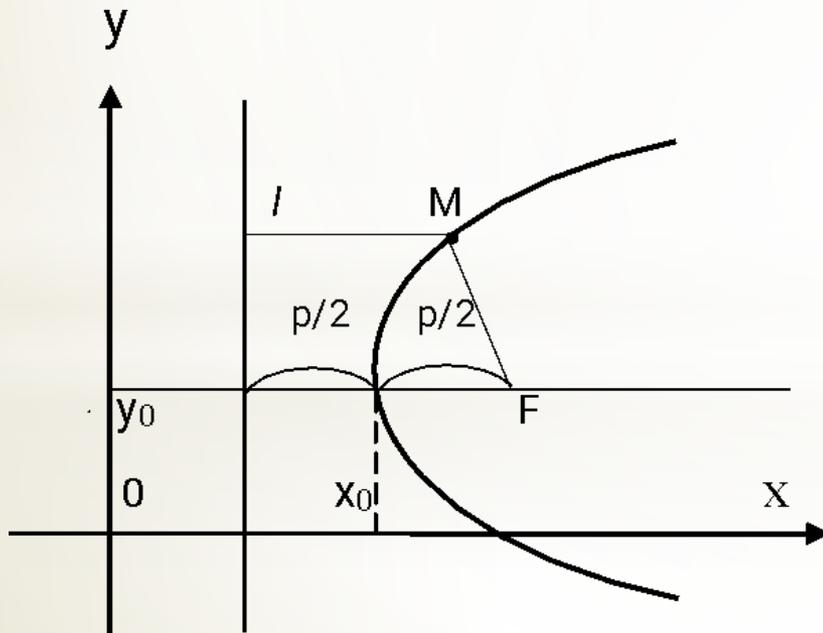
# Парабол

**а.**

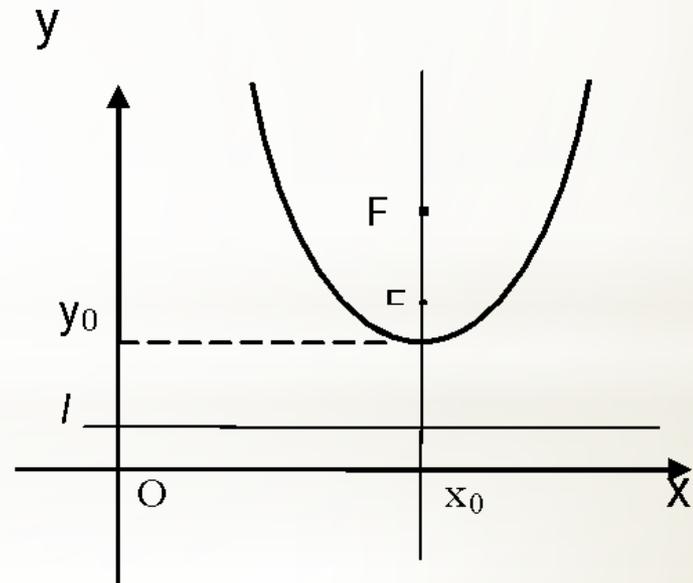
**Параболой** называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки  $F$  и данной прямой  $l$  (рис. 4). Точка  $F$  называется *фокусом*, а прямая  $l$  - *директрисой* параболы.

*Каноническое уравнение параболы* при  $p > 0$ :

а)  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

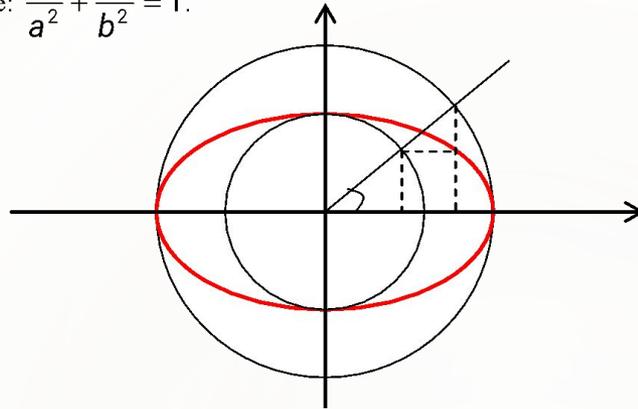


б)  $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$



## Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме.

Каноническое уравнение:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



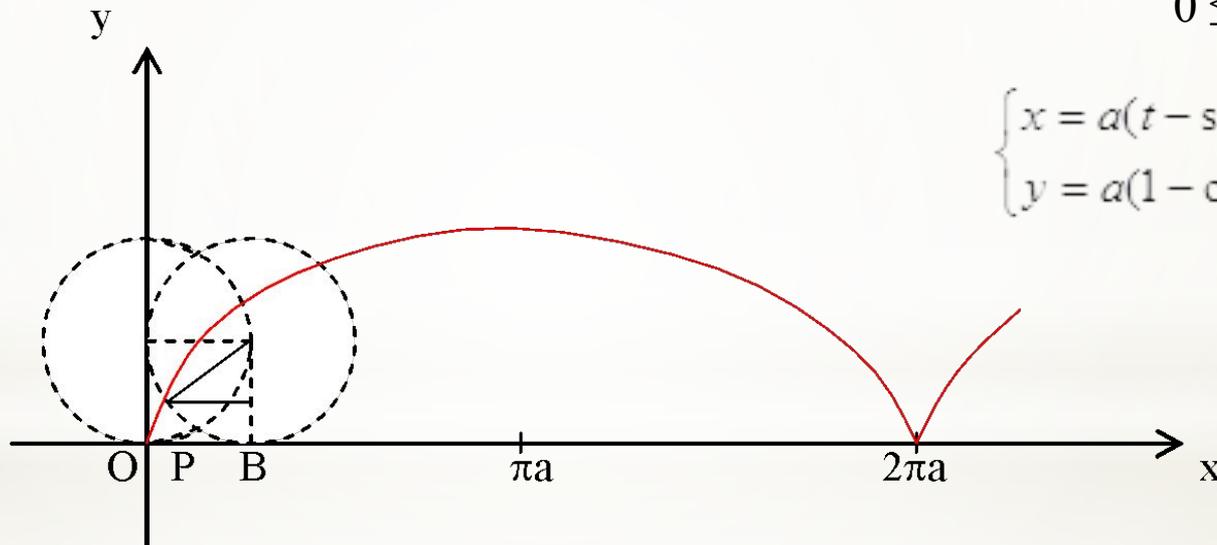
Эллипс

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Циклоида.

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

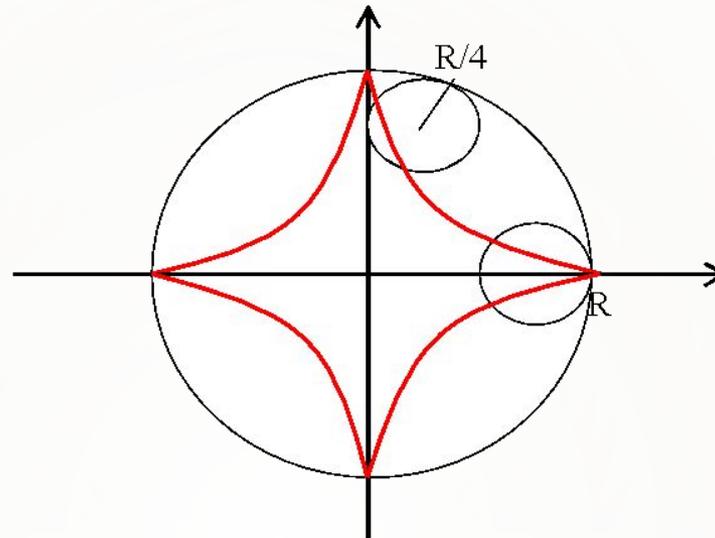


$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

**Циклоидой** называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

## Астроида.

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса  $R/4$ , вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса  $R$ .



Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую,

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Преобразуя, получим:  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$

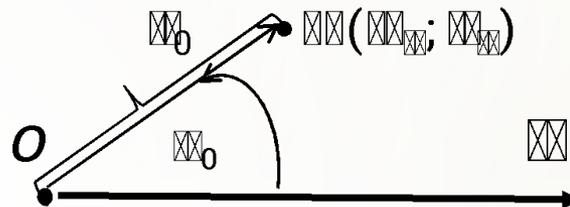
# Полярная система координат.

**Полярной системой координат** называется масштабированный луч или полупрямая. Точка  $O$  называется **полюсом**, а луч  $l$  – **полярной осью**.

Положение точки  $M$  на плоскости в п.с.к. определяется упорядоченной парой чисел  $(\varphi, \rho) \in \{0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq \rho < +\infty\}$ .

Значение  $\varphi$  равно величине *полярного угла* между осью  $o\rho$  и радиус-вектором  $\overrightarrow{OM}$ , отсчитываемого от полярной оси в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Значение  $\rho$  равно расстоянию точки  $M$  до полюса:  $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ .



Совмещая полярную ось  $o\rho$  с положительной полуосью  $OX$  декартовой системы координат, получим формулы связи между прямоугольными  $(x, y)$  и криволинейными  $(\varphi, \rho)$  координатами точки  $M$ :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad ($$

**Пример.** Построить точку М с полярными координатами  $(2; \bar{2})$  в полярной и декартовой системах координат.

Решение.

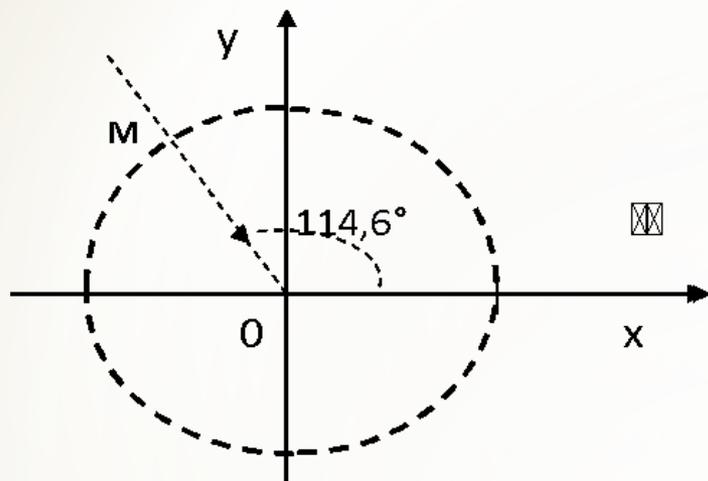


Рис. 1

Точка М лежит на пересечении луча ОМ:  $\rho = 2$ , образующего угол  $\varphi = \angle \rho OM = 2 = 2$  (рад)  $= \frac{180^\circ \cdot 2}{\pi} \approx 114.6^\circ$  с осью  $Ox$ , и окружности  $\rho = \bar{2}$  с центром в точке О радиусом  $\bar{2} \approx 1,7$ .

Декартовы координаты точки М определяются по формулам

$$x = \bar{2} \cos 2 \approx 1,73 \cdot (-0,41) \approx -0,71,$$

$$y = \bar{2} \sin 2 \approx 1,73 \cdot 0,91 \approx 1,57$$

*Замечание.* Если  $\rho \in [0; 2\pi)$ , нарушается взаимно однозначное соответствие между парами чисел  $(\rho, \varphi)$  и точками плоскости. В этом случае бесконечное множество пар чисел  $(\rho_0 \pm 2\pi k; \varphi)$ ,  $k = 1; 2; 3; \dots$ , где  $\rho_0, \varphi \in [0 \leq \rho_0 < 2\pi; 0 \leq \varphi < +\infty)$ , в п.с.к. изобразится одной точкой  $(\rho_0, \varphi)$ .

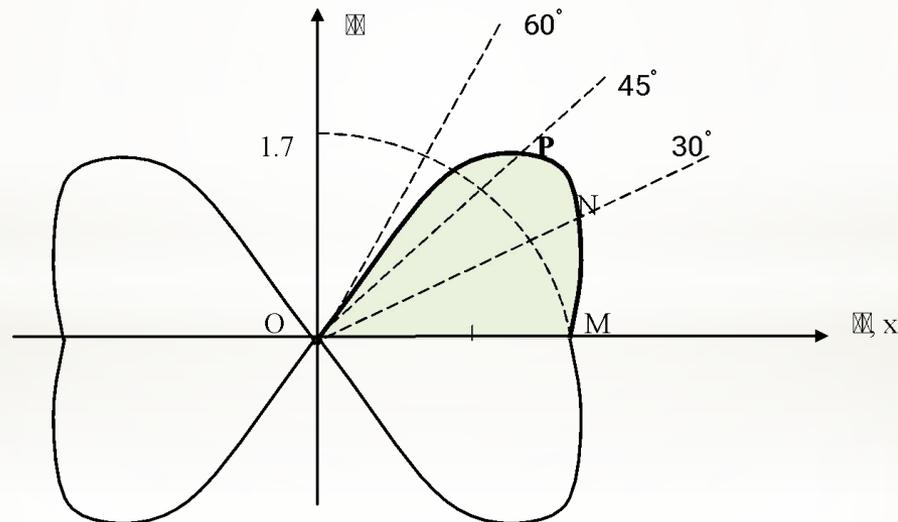
**Пример.** Построить кривую  $x^4 = 3x^2 - x^2$  в п.с.к..

Подставляя  $x = \xi \cos \xi$ ,  $y = \xi \sin \xi$  в заданное уравнение,

получим  $\xi^4 \cos^4 \xi = \xi^2 (3 \cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{4 \cos^2 \xi - 1}}{\cos^2 \xi}$

Составляем расчётную таблицу для построения кривой в первом квадранте. Симметрично достраиваем полный график функции в остальные четверти.

$\xi$	$\cos \xi$	$A = \cos^2 \xi$	$B = 4A - 1$	$C = \xi \bar{A}$	$\xi = \xi \Gamma \xi$	точка
$0^\circ$	1	1	3	$\xi \bar{3} \approx 1,7$	1,7	M (0; 1,7)
$30^\circ$	$\xi \bar{3} \Gamma 2$	3Г4	2	$\xi \bar{2} \approx 1,4$	1,4	N (Г6; 1,9)
$45^\circ$	$\xi \bar{2} \Gamma 2$	1Г2	1	1	1	P (Г4; 2)
$60^\circ$	1Г2	1Г4	0	0	0	O (Г3; 0)



# Комплексные числа

Введём мнимую единицу  $i$ , удовлетворяющую равенству  $i^2 = -1$ ,

Выражение  $z = x + iy$  с действительными (вещественными) числами  $x$  и  $y$  называется алгебраической формой записи комплексных или мнимых чисел.

Число  $\bar{z} = x - iy$  называется сопряжённым числу  $z$ .

*З а м е ч а н и е.* В технической литературе для обозначения мнимой единицы используется буква  $j$  (в отличие от комплекса тока  $i$  )

Переходя к полярным координатам  $(r, \varphi)$ ,  $0 \leq r < 2\pi$ ;  $0 \leq \varphi < +\infty$ , получаем тригонометрическую форму записи комплексных чисел

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Пользуются показательной формой записи комплексных чисел  $z = r e^{i\varphi}$ , полученной из (4) с помощью формулы Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , где трансцендентное число  $e = 2,71828 \dots \approx 2,72$ .

*З а м е ч а н и е.* В инженерных расчётах используют полярные координаты при  $0 \leq \varphi < +\infty$ ,  $-\infty < \omega \leq \infty$ . Полагают главное значение  $\varphi$  аргумента комплексного числа  $\omega e^{j\varphi}$  равным

- |    |   |                |                                |           |
|----|---|----------------|--------------------------------|-----------|
| 1. | $\varphi = \arctan \frac{\omega}{x},$       | если $x > 0$ ; | $-\infty < \omega < +\infty$ ; | $\varphi$ |
| 2. | $\varphi = \arctan \frac{\omega}{x} + \pi,$ | если $x < 0$ , | $\omega \geq 0$ ;              | $\varphi$ |
| 3. | $\varphi = \arctan \frac{\omega}{x} - \pi,$ | если $x < 0$ , | $\omega < 0$ ;                 | $\varphi$ |
| 4. | $\varphi = \arctan \frac{\omega}{x}/2,$     | если $x = 0$ , | $\omega > 0$ ;                 | $\varphi$ |
| 5. | $\varphi = -\arctan \frac{\omega}{x}/2,$    | если $x = 0$ , | $\omega < 0$ .                 | $\varphi$ |

**Пример.** Представить комплексное число  $z = \frac{1+i\xi\bar{3}+i}{1-i}$  в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи.

Решение. 
$$z = \frac{1+i\xi\bar{3}+i}{1-i} = \frac{1+i\xi\bar{3}+i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i\xi\bar{3}+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$\frac{1^2+2i+2i\xi\bar{3}+i^2(\xi\bar{3}+i)}{1^2-i^2} = \frac{(1+2i-1)(\xi\bar{3}+i)}{1-(-1)} = \frac{2i(\xi\bar{3}+i)}{2} = i\xi\bar{3} + i^2 = i\xi\bar{3} - 1 = -1 + i\xi\bar{3}.$$

Определим полярные координаты  $z$ .

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\xi\bar{3})^2} = \xi\sqrt{1+3} = 2,$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\xi\bar{3}}{-1}\right) = \arctan(-\xi\bar{3}) = -\arctan(\xi\bar{3}) = -\frac{\pi}{3} = -\frac{120^\circ}{3} = -40^\circ.$$

Ответ:  $z = -1 + i\xi\bar{3} = 2\cos 120^\circ + i 2\sin 120^\circ = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$