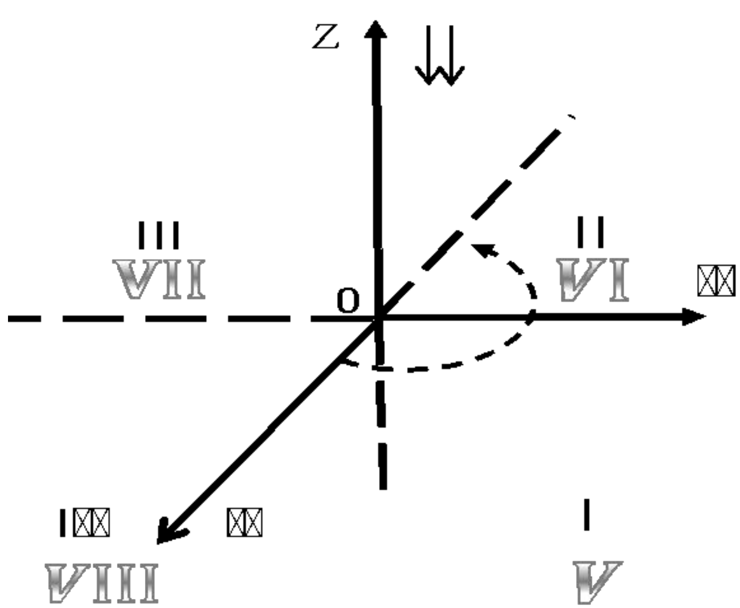
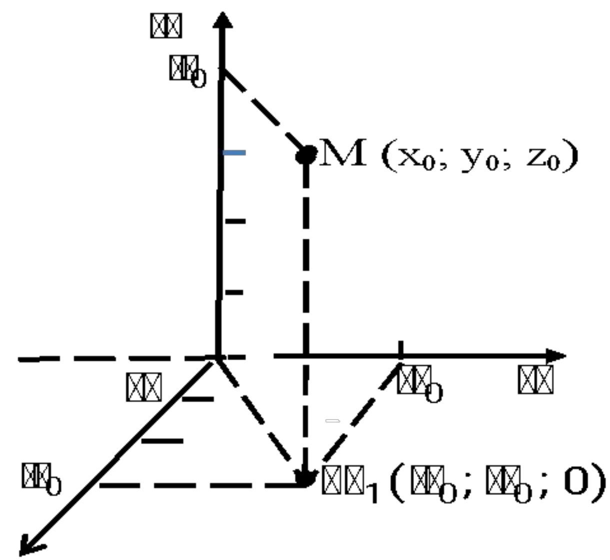
Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве

Декартова система координат в евклидовом пространстве $R^3 = \{x; y; z\}$:

x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата

октанты I – VIII

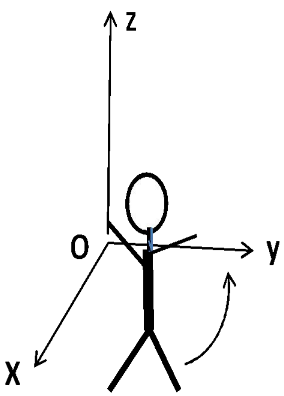




Замечание. Единица масштаба по оси OX по длине составляет примерно 0.8 от одинаковых единиц масштаба по осям OY и OZ.

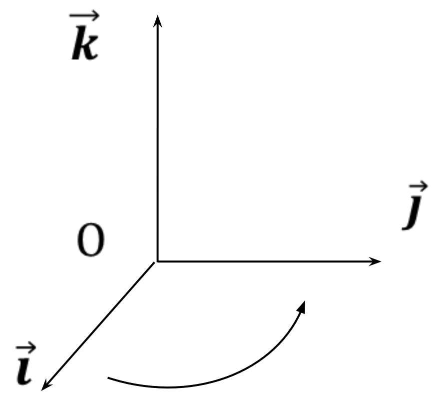
Правая тройка векторов

Направление обхода -
против часовой стрелки

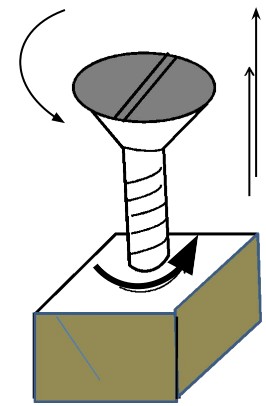


Базисные орты

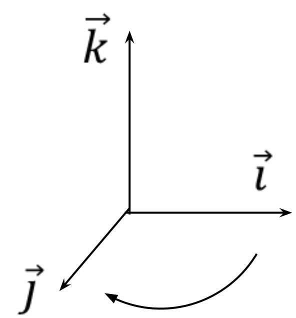
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = \mathbf{1}$$



Правило буравчика (правило правого винта)



* *Левая тройка векторов = >*



РАЗДЕЛ 1. **ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ**

- **Общее уравнение плоскости в пространстве**

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}.$$

Вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ называется **нормальным вектором плоскости**. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и M_3, не лежащие на одной прямой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- **Угол (двугранный) между двумя плоскостями** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется с помощью формулы

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

РАЗДЕЛ 2. **ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ**

- **Каноническое уравнение прямой**, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) параллельно направляющему вектору $\vec{a} = (a, b, c)$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

- **Уравнение прямой через две заданные точки** (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- **Угол между прямыми** с направляющими векторами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

- **Условия параллельности прямых** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$

- **Условия перпендикулярности прямых** $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$

РАЗДЕЛ 3. **ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ**

Угол φ между плоскостью P: A x + B y + C z + D = 0 и прямой L: $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- Условие параллельности прямой L и плоскости P: $Aa + Bb + Cc = 0.$

- Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$, (если a b c $\neq 0$)

- Каноническое уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно плоскости P

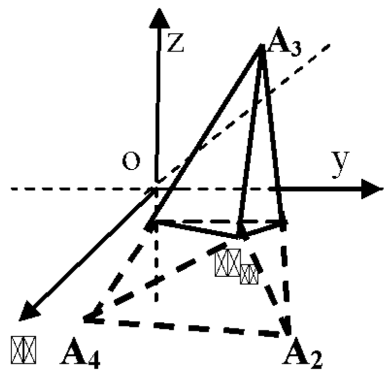
$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},\quad (\text{если } ABC \neq 0)$$

- Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно прямой L

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

Задача1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(2;1;0)$, $A_2(3;2;-1)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(2-1-2)$. Найти:
длину ребра $A_1\ A_2$; Сделать чертеж

Р е ш е н и е.



Длину ребра $A_1\ A_2$ найдем как длину
Вектора $\overline{A_1A_2}$ по формуле (8)

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+(-1)^2} = \sqrt{3} \approx 1.73\ (\text{ед. дл.})$$

О т в е т: $|A_1\ A_2| = \sqrt{3} \approx 1.73$ (ед. дл.)

Карл Фридрих Гаусс *- родился 30 апреля 1777 года в Германии.*
Считается "королем математики".
Занимался исследованиями в таких областях как: алгебра, дифференциальная и неевклидовая геометрия, математический анализ, теории функций комплексного переменного, теория вероятностей.

Задача2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(2;1;0)$, $A_2(3;2;-1)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(2-1-2)$. Найти:
1) уравнение прямой $A_1\ A_2$; 2) угол между ребрами $A_1\ A_2$ и $A_1\ A_4$

Решение

1) Уравнение прямой $A_1\ A_2$, проходящей через две точки $A_1(2;1;0)$, и $A_2(3;2;-1)$, найдём по формуле

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad => \quad \frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-0}{-1-0}$$

Ответ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$

2) Угол между рёбрами $A_1\ A_2$ и $A_1\ A_4$ найдем как угол φ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} = (1;1;-1)$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = (0;-2;-2)$ с модулями $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{1+1+(-1)^2} = \sqrt{3}$ и $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \sqrt{0+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$ из соотношения (12)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}|\cdot|\overline{A_1A_4}|} = \frac{1\cdot 0+1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}} = \frac{0}{2\sqrt{6}} = 0$$

Ответ: $\angle A_1A_2A_4 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2 - 1 - 2)$.

Найти: уравнение плоскости $A_1\,A_2A_3$;

Р е ш е н и е

1) Для того чтобы составить уравнение плоскости $A_1\,A_2\,A_3$, возьмем текущую точку M(x,y, z) плоскости. Векторы $\overline{A_1M} = (x\text{-}2; y\text{-}1; z)$, $\overline{A_1A_2} = (1;1;\text{-}1)$, $\overline{A_1A_3} = (\text{-}1;1;2)$ лежат в этой плоскости, т.е они являются компланарными. Воспользуемся условием компланарости трех векторов

$$\overline{A_1M} \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(x-2) - (y-1) + 2z = 3x - y + 2z - 5.$$

О т в е т: уравнение плоскости $A_1\,A_2\,A_3$ имеет вид $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Задача 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(2;1;0)$, $A_2(3;2;-1)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(2-1-2)$. Найти:
угол между ребром $A_1\ A_4$ и гранью $A_1\ A_2A_3$
Р е ш е н и е

Угол между ребром $A_1\ A_4$ - вектором $\overline{A_1A_4} = (0; -2; -2)$ длиной $|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{8}$ и гранью $A_1\ A_2A_3$ - плоскостью $3x - y + 2z - 5 = 0$, найдем по формуле

$$\sin(\overline{A_1A_4}\hat{\ }\vec{n}) = \frac{\overline{A_1A_4}\cdot\vec{n}}{|\overline{A_1A_4}|\cdot|\vec{n}|}$$

где $\vec{n}=(3;-1;2)$ нормальный вектор плоскости $A_1\ A_2A_3$,

$$\sin(\overline{A_1A_4}\hat{\ }\vec{n}) = \frac{0\cdot3+(-2)(-1)+(-2)2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}} = \frac{|\ 0+2-4\ |}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 0.1889$$

$$(\overline{A_1A_4}\hat{\ }\overline{n}) \approx \arcsin 0.1889 \approx 0.1912(\text{рад.}) \approx 11^0 27'$$

О т в е т: угол между ребром $A_1\ A_4$ и гранью $A_1\ A_2A_3$ приближённо составляет $11^0 27'$ или 0.19 радиан.

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(2;1;0)$, $A_2(3;2;-1)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(2-1-2)$.
Найти: площадь грани $A_1\ A_2A_3$

Решение

Площадь грани $A_1\ A_2\ A_3$ вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overline{A_1A_2} = (1; 1; -1)$ и $\overline{A_1A_3} = (-1; 1; 2)$.

Найдём площадь треугольника $A_1\ A_2\ A_3$ как половину площади параллелограмма по формуле: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|$. Применяя символический определитель найдём

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{I}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{J}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\Rightarrow \left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{3^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{14}$$

Ответ: $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 1{,}87$ (ед. пл.)

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(2;1;0)$, $A_2(3;2;-1)$, $A_3(1;2;2)$, $A_4(2-1-2)$.
Найти: объем пирамиды.
Р е ш е н и е

Объём пирамиды $A_1A_2A_3$ вычислим как одну шестую объёма параллелепипеда с помощью смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2} = (1; 1; -1)$, $\overline{A_1A_3} = (-1; 1;2)$ и $\overline{A_1A_4} = (0; -2; -2)$, на которых построена пирамида, по формулам

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 2 + 0 - 2 + 4 = -2 \quad =>$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|-2\right| = \frac{1}{3}$$

О т в е т: $V_{пир.} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ (ед. объёма)

РАЗДЕЛ 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

- **Цилиндрические поверхности.**

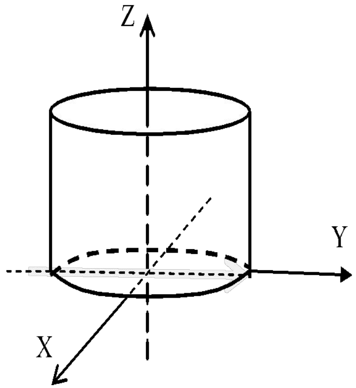
Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой- либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z, т.е. направляющие параллельны оси Oz. Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

Цилиндрические поверхности

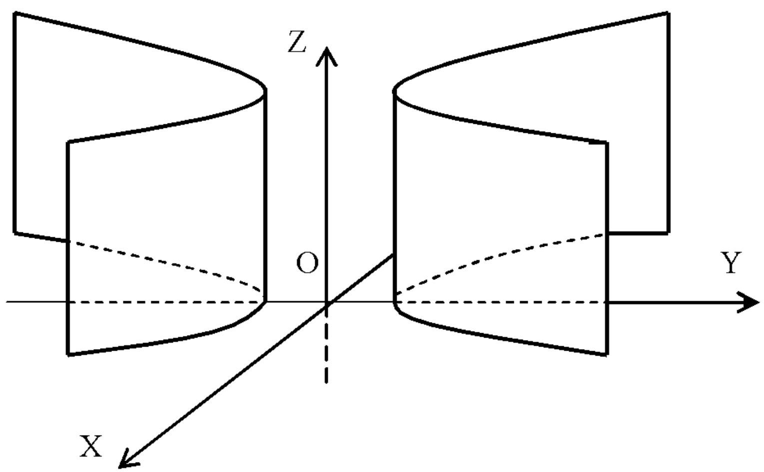
1) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



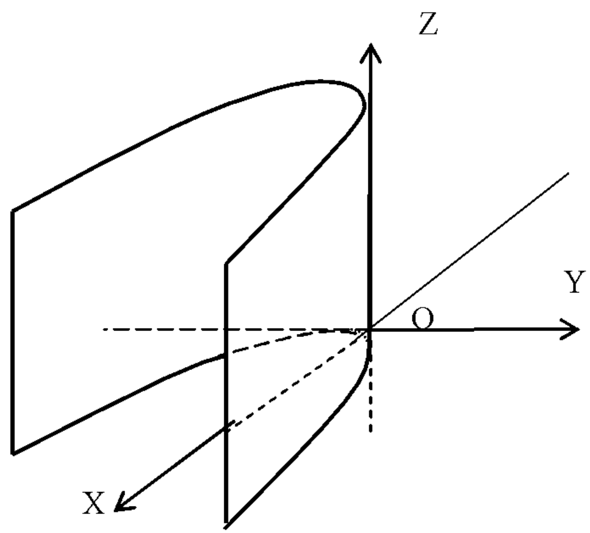
2) Гиперболический цилиндр

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



3) Параболический цилиндр

$$x^2 = 2py$$



Поверхности вращения

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d, называется **поверхностью вращения** с осью вращения d.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz.
Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy,
$F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - **эллипсоид вращения**

2) $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - **однополостный гиперболоид вращения**

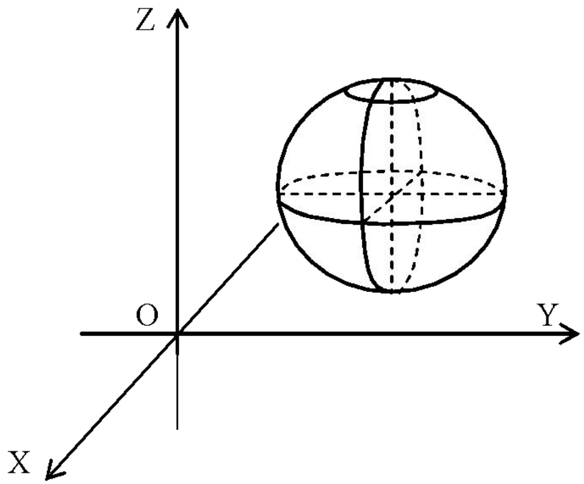
3) $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ - **двуполостный гиперболоид вращения**

4) $\dfrac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ - **параболоид вращения**

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy.

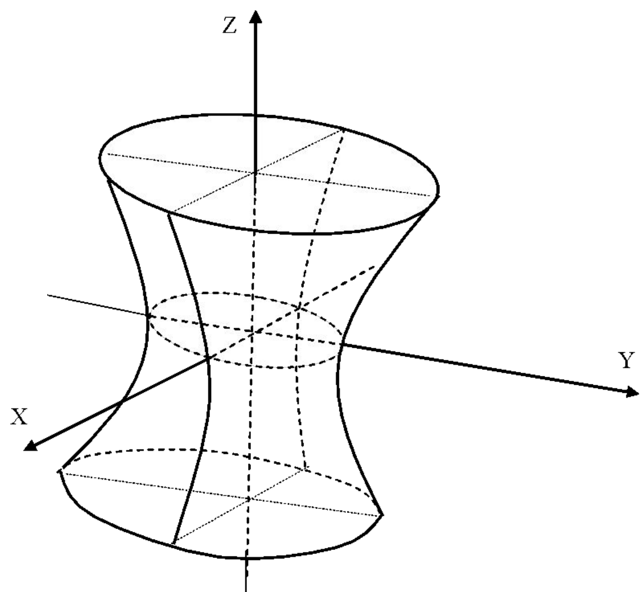
Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

1) Сфера: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

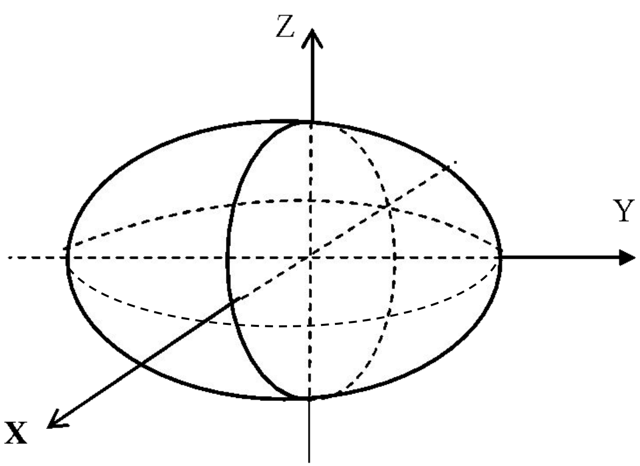


3) Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

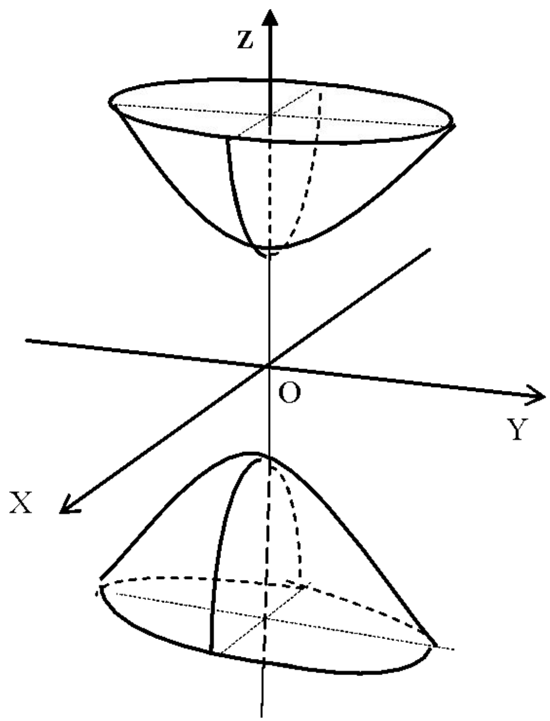


2) Трехосный эллипсоид:



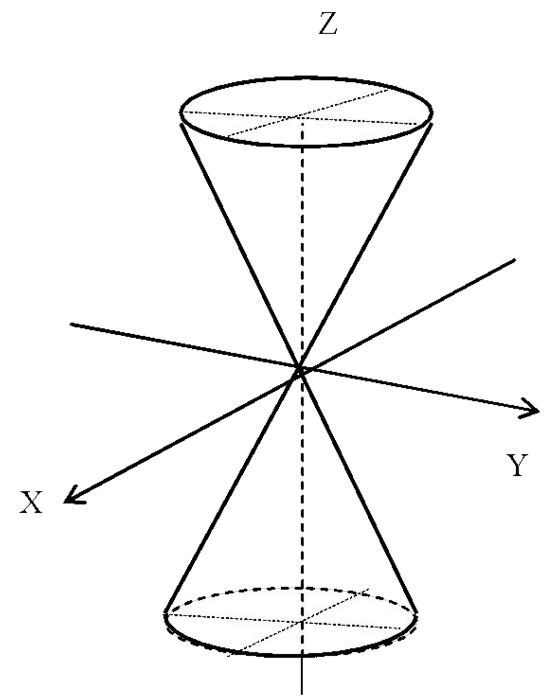
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двуполостный гиперболоид:



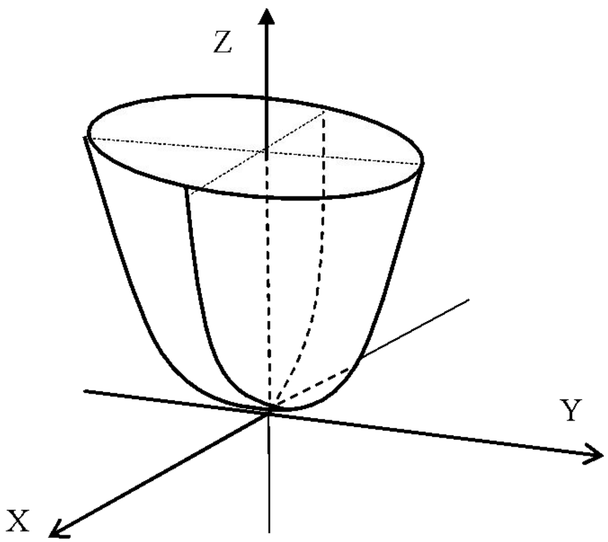
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Конус второго порядка:



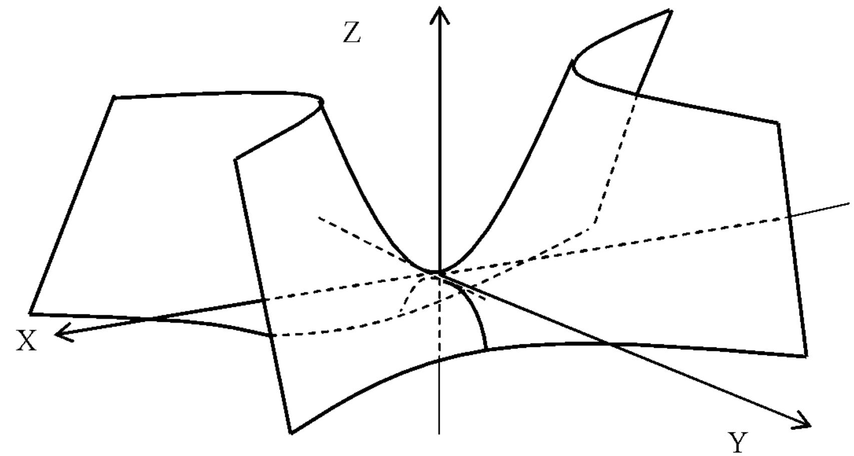
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Эллиптический параболоид:



$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad \text{где } p>0, q>0$$

Гиперболический параболоид:



$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$