

РАЗДЕЛ X. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Принятые обозначения числовых множеств

Сегменты (замкнутые множества)

$$[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Интервалы (открытые множества)

$$(a; b) = \{a < x < b\}$$

$$(-\infty; +\infty) = \{-\infty < x < +\infty\}$$

$$(-\infty; b) = \{-\infty < x < b\}$$

$$(a; +\infty) = \{a < x < +\infty\}$$

Интервалы полуоткрытые

полуинтервалы

$$(a; b] = \{a < x \leq b\}$$

$$(-\infty; b] = \{-\infty < x \leq b\}$$

полусегменты

$$[a; b) = \{a \leq x < b\}$$

$$[a; +\infty) = \{a \leq x < +\infty\}$$

ОКРЕСТНОСТЬЮ ТОЧКИ x_0 называется любой открытый интервал, содержащий точку x_0 .

Понятие функции

- В математике различают два вида величин - постоянные и переменные. Величина, всё время сохраняющая одно и тоже значение, называется *постоянной* и обычно обозначается символом «*const*» (*константа*).
- Величина, которая принимает одно и тоже значение только в условиях данной задачи (характеристика какого-либо свойства исследуемого процесса), но может изменить его при переходе к другой задаче, называется *параметром*.
- Величина, принимающая в условиях данной задачи различные значения, называется *переменной*.
- Пусть D и P – непустые множества.

Функцией называется соответствие f , которое каждому элементу x из D ($x \in D$) сопоставляет один (*однозначная функция*) или несколько (*многозначная функция*) элементов y множества P ($y \in P$):

Для функционального соответствия приняты обозначения

$$y = f(x); \quad D \xrightarrow{f} P; \quad x \xrightarrow{f} y$$

Предел функции в точке и на бесконечности

Число A называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a** , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x таких, что при $0 < |x - a| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Число A называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся в бесконечность**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon) > 0$, что при $|x| > M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

Аналогичным образом определяется предел функции при $x \rightarrow -\infty$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы при $x \rightarrow x_0$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \text{ где } C = \text{const},$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(\text{ в частности } \lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Замечание. Иррациональное (бесконечное) число $e = 2.71828... \approx 2.72$ - и принято за основание натуральных логарифмов: $\log_e x = \ln$.

Часто используются следующие следствия:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A

- одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β .

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**.

Некоторые эквивалентные бесконечно малыми функции

Факт эквивалентности бесконечно малых α и γ обозначают $\alpha \sim \gamma$.

$$\sin \alpha \sim \alpha, \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \quad \arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha,$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \quad b^\alpha - 1 \sim \alpha \ln b, \quad (\text{в частности, } e^\alpha - 1 \sim \alpha), \quad \sqrt[n]{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{n}.$$

Данное определение особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене одной бесконечно малой величины на другую, эквивалентную ей.

Приме

р
Найдём $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$ Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$,
предел то, заменив функции эквивалентными бесконечно

малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

О т в е т: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}.$

Раскрытие неопределенностей.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Задача . Найти

пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x}{x^2 + 10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{10}{\infty^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

Задача . Найти
пределы

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x - 1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y =$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4$$

Непрерывность функции в точке.

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется **непрерывной в точке x_0** , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Локальные свойства непрерывных функций.

- 1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0 .
- 2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция в точке x_0 при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .
- 3) Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Точки разрыва, их классификация.

Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.