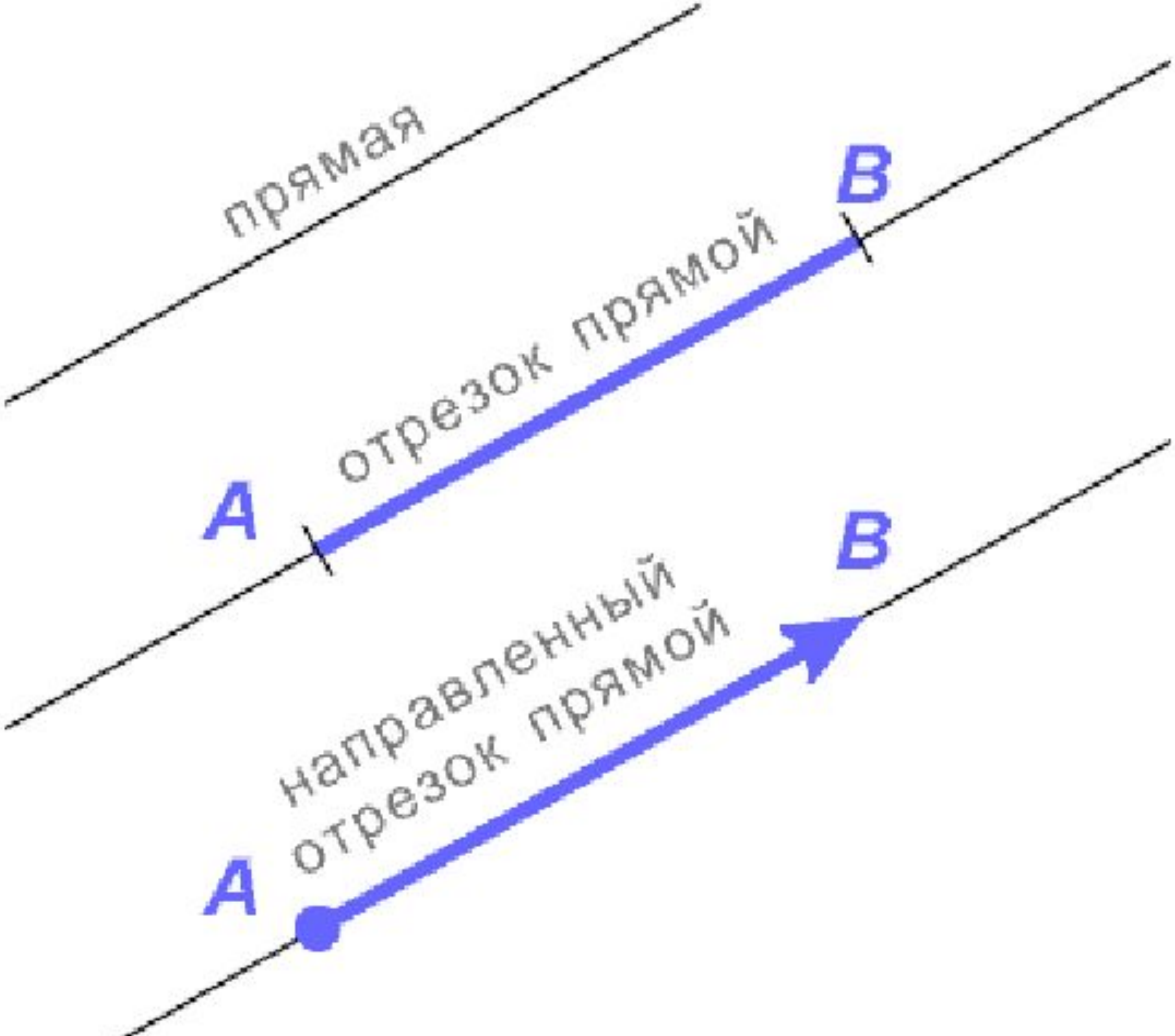
ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Основные понятия.
2. Линейные операции над векторами.
3. Векторное пространство.
4. Разложение вектора по базису.
5. Нелинейные операции над векторами.

Основные понятия

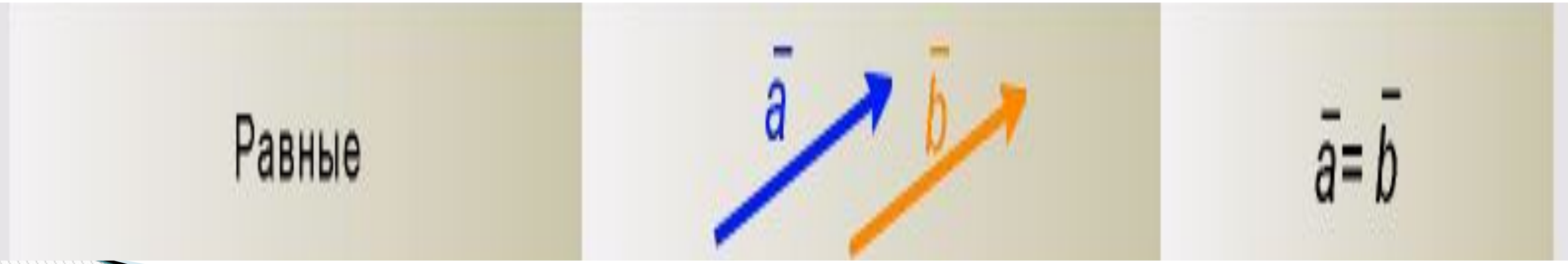
- вектор;
- длина вектора;
- свободные векторы;
- равные векторы;
- нулевой вектор;
- коллинеарные векторы;
- компланарные векторы;
- n – мерный вектор и его координаты;
- векторное пространство;
- линейная комбинация векторов;
- линейно-зависимая и линейно-независимая система векторов;
- базис векторного пространства;
- проекция вектора на ось;
- проекция точки на ось;
- координаты вектора в ДСК;
- направляющие косинусы вектора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



Равные векторы

1. длины векторов равны;
2. расположены на одной или параллельных прямых;
3. сонаправленные



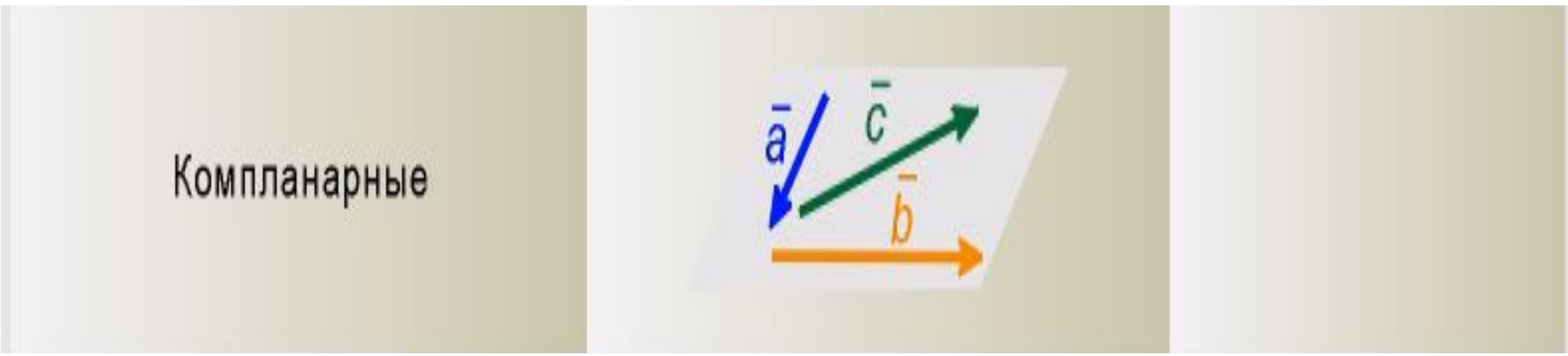
Нулевой вектор

Нулевой	$\bullet A$	$\bar{0}$

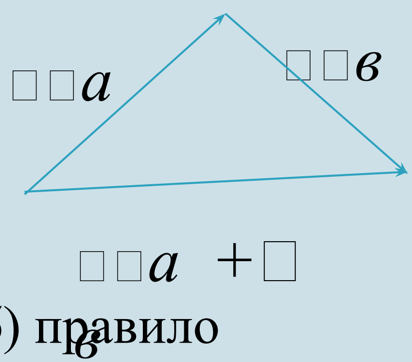
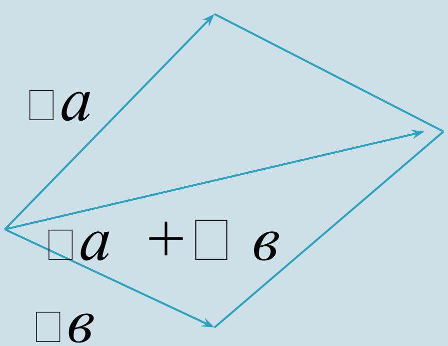
Взаимное расположение векторов

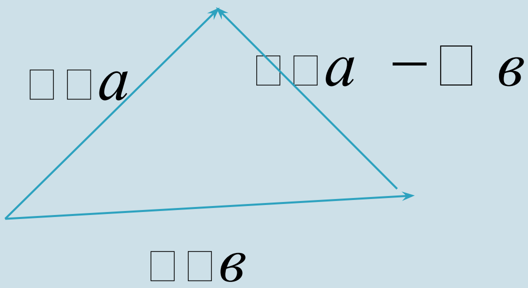
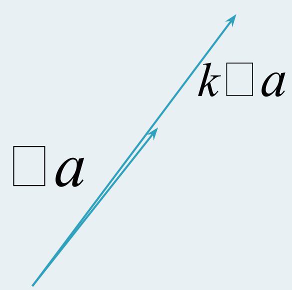
Коллинеарные		$\bar{a} \parallel \bar{b}$

Взаимное расположение векторов

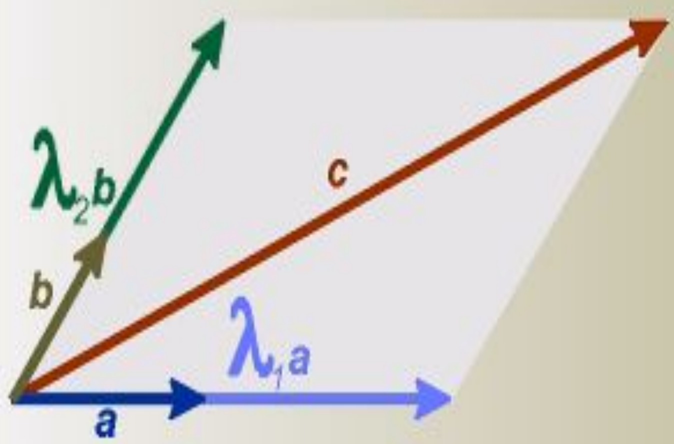


Линейные операции над векторами

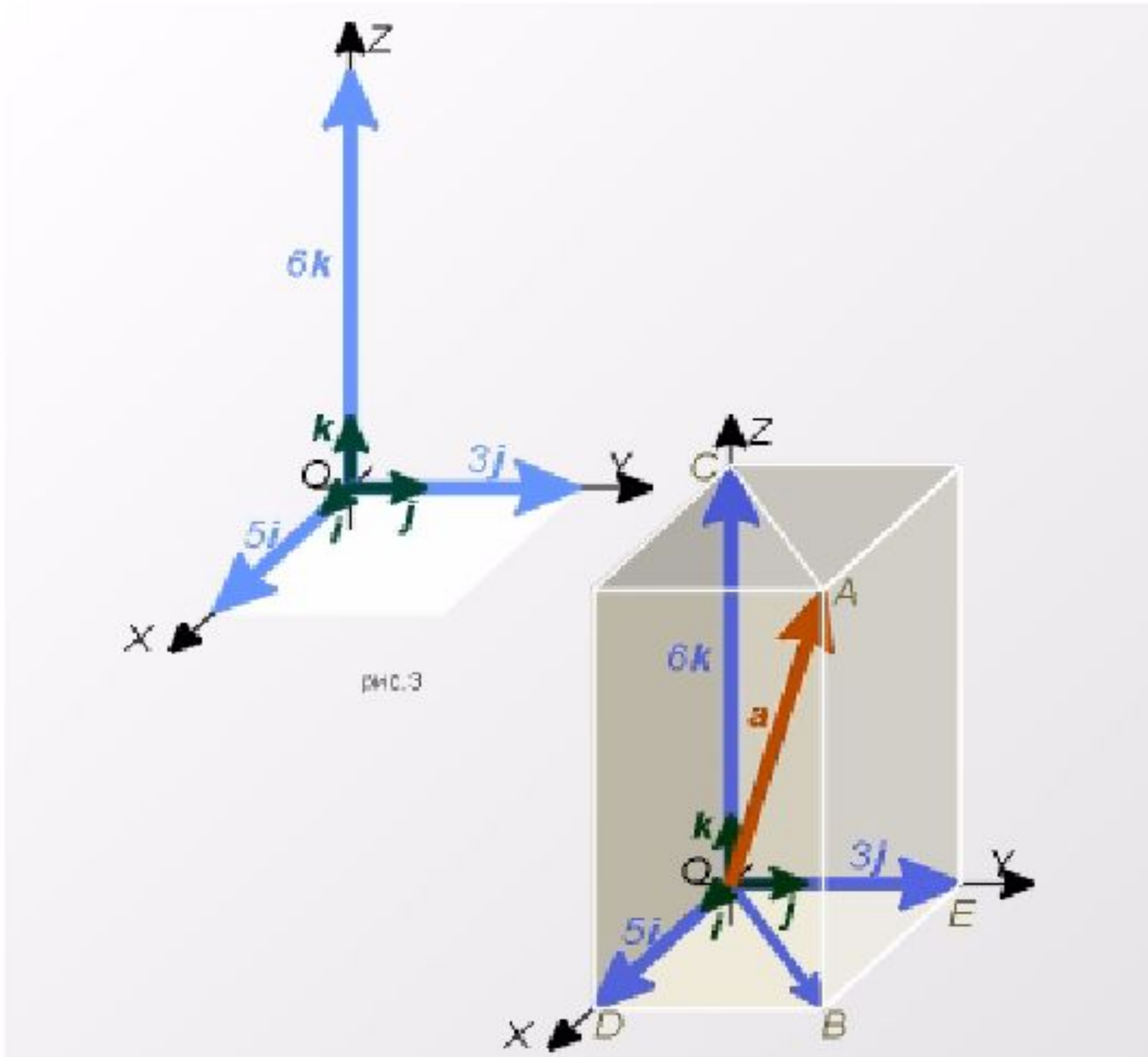
№	Геометрический образ	Координатная форма записи
1.	СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ а) правило треугольника:  б) правило параллелограмма: 	$\vec{a}+\vec{в}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$

№	Геометрический образ	Координатная форма записи
2.	ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ 	$\vec{a} - \vec{в} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$
3.	УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО k 	$k\vec{a} = (kx_1;\ ky_1;\ kz_1)$

Линейная зависимость векторов

Линейная зависимость двух векторов	$b=\lambda a$	Коллинеарность векторов ***a*** и ***b***	
Линейная зависимость трех векторов	$c=\lambda_1 a+\lambda_2 b$	Компланарность векторов ***a***, ***b***, ***c***	

Декартова система координат



Основные формулы

Если вектор $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ **, то:**

- длина $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

- $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\beta = \dfrac{y}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\overline{a}\right|};$

- $np_l\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\varphi$, где ϕ - угол между вектором □a и положительным направлением оси l

Примеры:

№1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}$ = (3; -5; 8) и $\overline{b}$ = (-1; 1; -4).

№2. Вектор , заданный в трехмерном пространстве составляет с координатными осями Ox и Oy углы α=60˚, β=120˚. Вычислить его координаты если $|\vec{a}| = 2$.

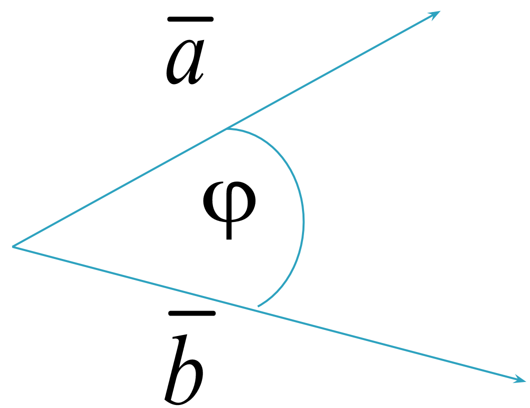
№3. Даны четыре точки $A(5;6;-8)$, $B(8;10;-3)$, $C(1;-2;4)$, $D(7;6;14)$. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

- скалярное произведение двух векторов;
- векторное произведение двух векторов;
- смешанное произведение трех векторов

Скалярное произведение двух векторов

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{a},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi-\text{число}$$



Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ (переместительное);
2. $\lambda\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\cdot\overline{b})$(сочетательное);
3. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ (распределительное);
4. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$;
5. $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$;

Координатная форма скалярного произведения

- Если $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$,то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

Векторное произведение двух векторов

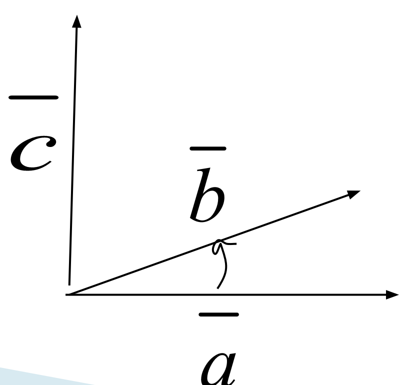
Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$

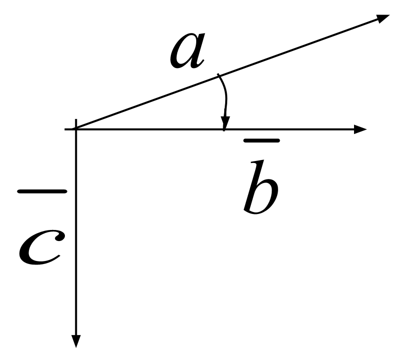
называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, удовлетворяющий условиям :

1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin \varphi;$

2) $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b};$

3) тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая





Свойства векторного произведения

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;
2. $\lambda\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\left(\lambda\cdot\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(\lambda\cdot\overline{b}\right)$;
3. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$;
4. $\overline{a}\times\overline{a}=0$

5. $\overline{a}\times\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\parallel\overline{b}$ (условие коллинеарности)

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$$

- Если □a=(a_x, a_y, a_z), □b =(b_x, b_y, b_z),то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение трех векторов

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right)=$$

$$=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{a}\overline{b}\overline{c}-\text{\textit{это}}\quad\text{\textit{число}}$$

Свойства смешанного произведения

1. $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c=-(\bar a\times\bar c)\cdot\bar b=-(\bar c\times\bar b)\cdot\bar a=(\bar c\times\bar a)\cdot\bar b=(\bar b\times\bar c)\cdot\bar a$;
2. если три данных вектора компланарны, то $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c=0$ (и наоборот);
   $(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$;
3. $\bar a\cdot(\lambda\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot\bar b\cdot(\lambda\bar c)=\lambda(\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c)$
4. ;
5. если три вектора заданы координатами □$a=(x_1; y_1; z_1)$, □$b=(x_2; y_2; z_2)$, □$\text{c}=(x_3; y_3; z_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Приложения нелинейных операций над векторами	Скалярное произведение
Геометрические приложения	$\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left\|\overline{a}\right\|\cdot\left\|\overline{b}\right\|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left\|\overline{b}\right\|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Физические приложения	$A=W=\overline{F}\cdot\overline{S}$

Приложения нелинейных операций над векторами	**Векторное произведение**
Геометрические приложения	$\left\|\overline{c}\right\| = \left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\| = S_{параллелограмма}$ $\frac{1}{2}\left\|\overline{c}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\| = S_{треугольника}$
Физические приложения	$m_A \overline{F} = \overline{AM} \times \overline{F}$

Приложения нелинейных операций над векторами	Смешанное произведение
Геометрические приложения	$V_{\text{парал-да}} = \left\|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right\| = \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right\|$ $V_{\textit{пирамиды}} = \frac{1}{6}\left\|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right\|$
Физические приложения	—

Спасибо за внимание