

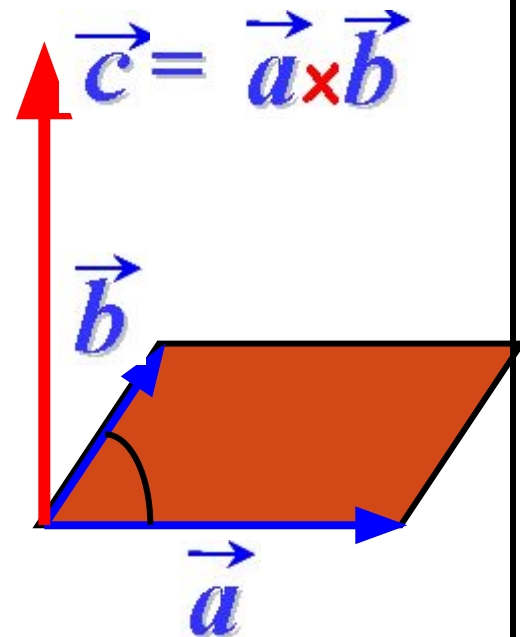


ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ удовлетворяющий трем требованиям:

- 1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$
- 2) $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$
- 3) Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.



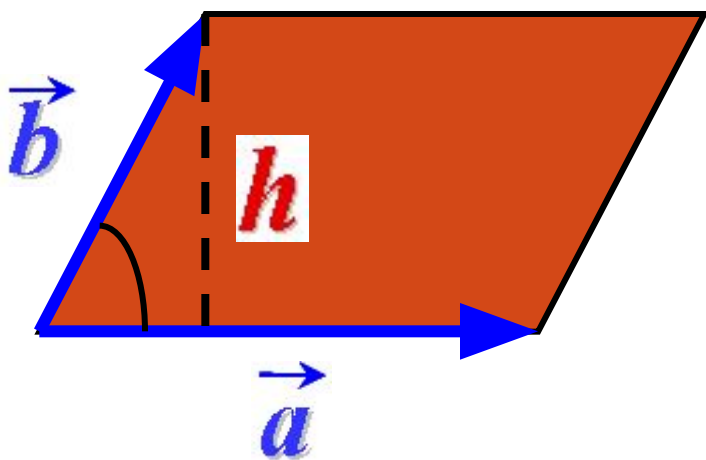


Геометрический смысл векторного произведения

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

$$|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = h$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h = S$$



Для неколлинеарных векторов модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.



Свойства векторного произведения

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$

2) Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}).$$

3) Распределительное свойство относительно сложения векторов:

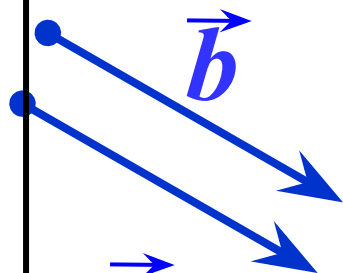
$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c},$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}.$$



Если вектора коллинеарные, то

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^0, 180^0$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0^0 = 0$$

Признак коллинеарности векторов

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю.

В частности, имеем для ортов:

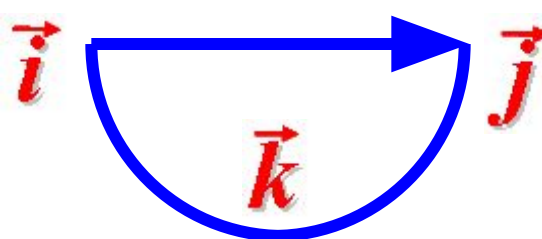
$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

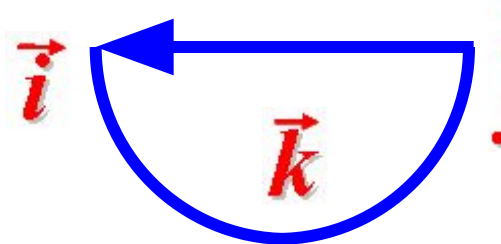


Рассмотрим **векторные произведения различных ортов**.

Векторное произведения двух различных ортов будет равно третьему орту, взятому:

- со знаком **+** , если тройка ортов правая;
- со знаком **-** , если тройка ортов левая.


$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$


$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



Выразим теперь **векторное произведение** через **координаты векторов**, его составляющих.

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \times \bar{j} + a_y b_y \bar{j} \times \bar{j} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + \\ &\quad + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} =\end{aligned}$$
$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Векторное произведение двух векторов позволяет решить некоторые задачи векторной алгебры.

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Действительно, площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю их векторного произведения

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

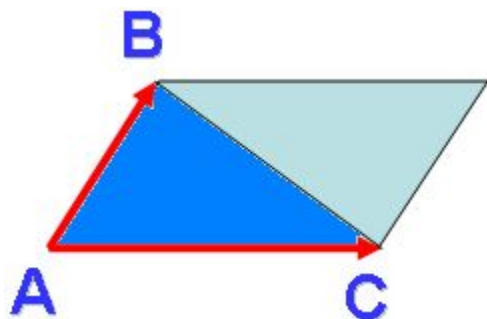
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



Пример 1.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|,$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}; \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{81 + 36 + 36} = \sqrt{153},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{\sqrt{153}}{2} \approx 6,18$$



Пример 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах

$2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{b}$, если известно, что

$$|\bar{a}| = 1, \quad |\bar{b}| = 2, \quad \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}|,$$

$$(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |2\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$



Нахождение векторов, перпендикулярных данной плоскости

Пример 3. Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение

По определению векторного произведения векторов

$$\vec{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

$$\overline{AB}\{0, 3, -3\}, \quad \overline{AC}\{2, 0, -3\},$$

$$\vec{c} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

Поставленной задаче удовлетворяют два единичных вектора

$$\pm \vec{c} = \pm \frac{-9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}}{\sqrt{153}}.$$

