СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

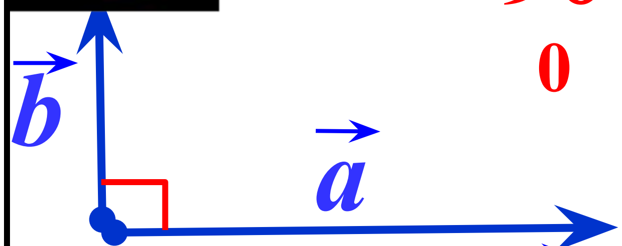
Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

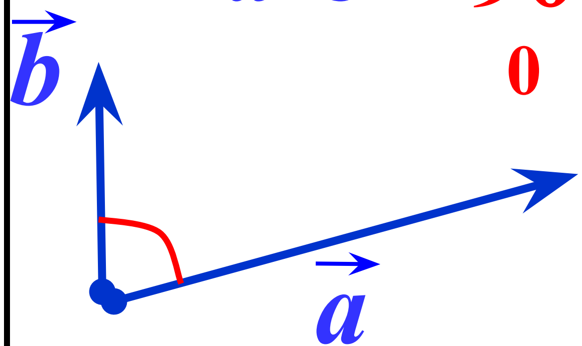
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^{0}$



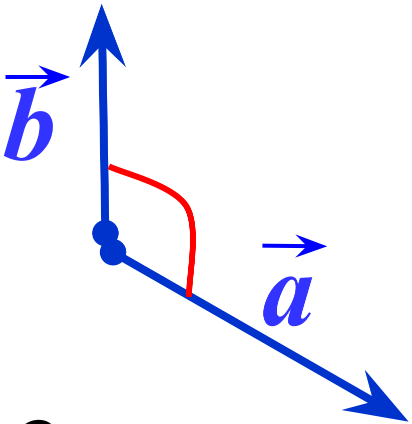
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

> 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^{0}$$

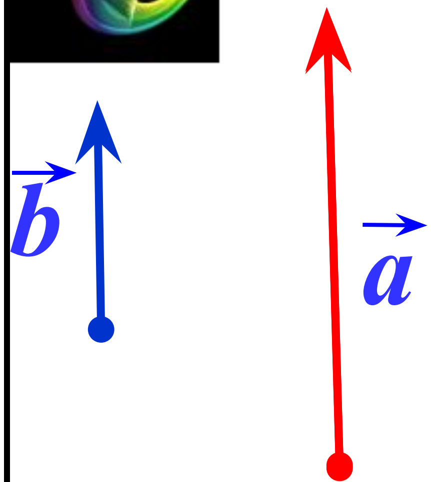
$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$

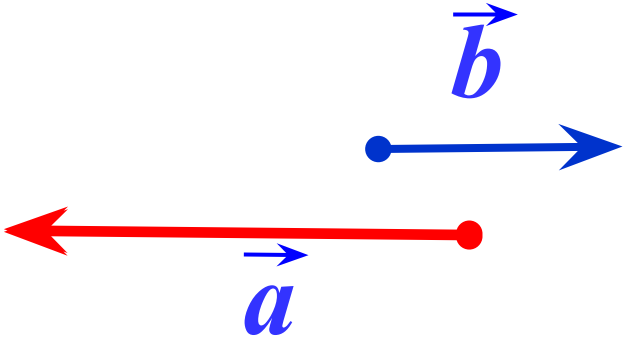
Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \;\Leftrightarrow\; \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$

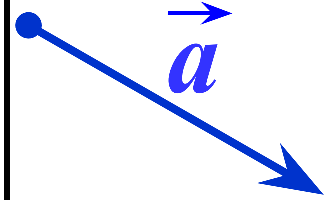
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом, $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$

Действительно, $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\,{}^\wedge\,\overline{b}\right),$ тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\,{}^\wedge\,\overline{b}\right)=\left|\overline{b}\right|\cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Отсюда следует **формула** для нахождения **проекции одного вектора на другой:**

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство: $\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительного сложения векторов:

$$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

Скалярное произведение в координатной форме

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

Скалярное произведение двух векторов позволяет решить некоторые задачи векторной алгебры:

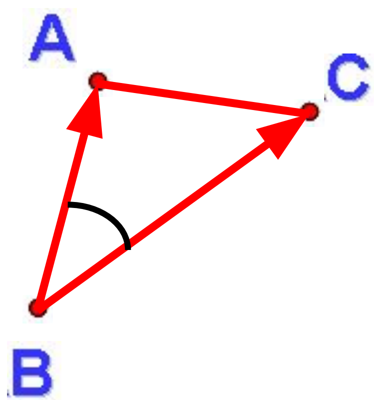
1. Нахождение косинуса угла между двумя векторами.

$$\cos\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}.$$

Отсюда следует условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов в координатной форме:

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

Пример 1. Даны вершины треугольника: *A* (2; –1; 3), *B* (1; 1; 1), *C* (0; 0; 5). Найти $\angle ABC$.



$$\cos\angle ABC = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

$$\overline{BA}\{1,-2,2\},\quad \left|\overline{BA}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC}\{-1,-1,4\},\quad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

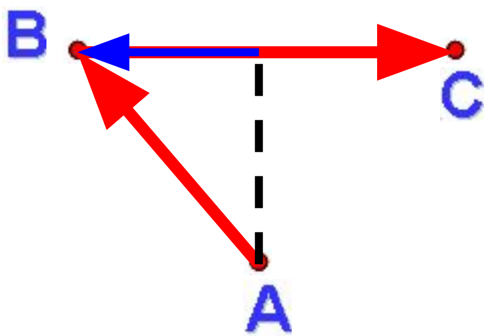
$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -1+2+8 = 9,$$

$$\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \angle ABC = 45^{o}.$$

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого.

Пример 2. Даны три точки $A(2;\,3;\,5)$, $B(1;\,2;\,2)$, $C(3;\,5;\,4)$. Найти $\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB}$.

Решение



$$\overline{BC}\{2,\,3,\,2\},\qquad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB}\{-1,-1,-3\},\qquad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = -2-3-6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

3. Нахождение длины вектора.

Пример 3. Дан вектор $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 2$, $\left(\bar{m} \wedge \bar{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Найти длину вектора $\bar{a}$.

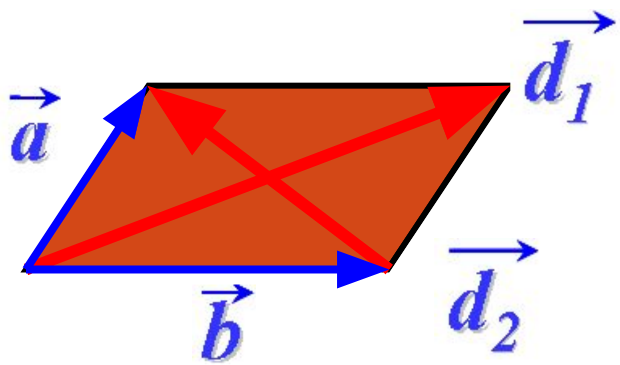
$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$. Найдем скалярный квадрат вектора $\bar{a}$.

$$\bar{a}^2 = (\bar{m} + \bar{n}) \cdot (\bar{m} + \bar{n}) = \bar{m}^2 + 2\bar{m} \cdot \bar{n} + \bar{n}^2 =$$

$$= |\bar{m}|^2 + 2|\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cos\left(\bar{m} \wedge \bar{n}\right) + |\bar{n}|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2\cos\frac{\pi}{3} + 4 = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = 2\sqrt{3}.$$

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$ и $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$, где $\bar{m}$, $\bar{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60°.



$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{d_1} = 3\vec{m} - \vec{n}$$

$$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{d_2} = \vec{m} + 3\vec{n}$$

$$\overline{d_1}^2 = (3\bar{m} - \bar{n})\cdot(3\bar{m} - \bar{n}) = 9\bar{m}^2 - 6\bar{m}\cdot\bar{n} + \bar{n}^2 =$$

$$= 9|\bar{m}|^2 - 6|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos\left(\bar{m}\wedge\bar{n}\right) + |\bar{n}|^2 = 9 - 6\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 1 = 7.$$

$$|\vec{d_1}| = \sqrt{7}$$

$$\overline{d_2}^2 = (\bar{m} + 3\bar{n})\cdot(\bar{m} + 3\bar{n}) = |\bar{m}|^2 + 6|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos\left(\bar{m}\wedge\bar{n}\right) + 9|\bar{n}|^2 = 13.$$

$$|\vec{d_2}| = \sqrt{13}$$