Решение обыкновенных дифференциальных уравнений Метод Пикара

Постановка задачи

Дифференциальные уравнения устанавливают связь между независимыми переменными, искомыми функциями и их производными. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным.***

Постановка задачи

Например, условие равновесия упругой среды описывается ***обыкновенным*** дифференциальным уравнением:

$$\frac{dT_x}{dx} + F_x = 0$$

T_x – компонента механических напряжений, F - действующая на сплошную среду сила в расчёте на единицу массы

Здесь искомая функция (механическое напряжени) $T(x)$ зависит от одной переменной x (координата).

Постановка задачи

В том случае, если искомая функция зависит от нескольких переменных, дифференциальное уравнение будет уравнением в ***частных*** *производных*.

Например, движение упругой среды можно описать уравнением в частных производных:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_x}{\partial x}$$

u_x – смещение среды, ρ – плотность среды, T_x – компонента напряжений

В этом уравнении функция $u(t,x)$ зависит от времени (t) и направления смещения среды (x).

Постановка задачи

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где x – независимая переменная.

Наивысший порядок $\boldsymbol{n}$, входящей в уравнение производной, называется *порядком дифференциального уравнения.*

Например:

$F(x, y, y') = 0 -$ уравнение первого порядка;

$F(x, y, y', y'') = 0 -$ уравнение второго порядка

Постановка задачи

Из общей записи дифференциального уравнения можно выразить производную в явном виде:

$$y' = f(x, y),$$

$$y'' = f(x, y, y')$$

Уравнение для производных имеет бесконечное множество решений. Для получения единственного решения необходимо указать дополнительные условия, которым должны удовлетворять искомые решения.

Постановка задачи

В зависимости от вида таких условий рассматривают три типа задач, для которых доказано существование и единственность решений.

Первый тип – это задачи с ***начальными*** условиями.

Для таких задач кроме исходного дифференциального уравнения в некоторой ***точке*** $\boldsymbol{x_0}$ должны быть заданы начальные условия, т.е. значения функции $y\,(x)$ и её производных: $\mathbf{y\,(x_0) = y_0}$

$$y'\,(x_0) = y'_0\,, \ldots, y^{(n-1)}\,(x_0) = y^{n-1}_0\,.$$

Постановка задачи

Второй тип задач – это, так называемые, граничные, или краевые, в которых дополнительные условия задаются в виде функциональных соотношений между искомыми решениями.

Третий тип задач для обыкновенных дифференциальных уравнений – это задачи на собственные значения.

Постановка задачи

Сформулируем задачу Коши.

Найти решение обыкновенного дифференциального уравнение (ОДУ) первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0$$

Постановка задачи

Необходимо найти на отрезке $[x_0,x_n]$ такую непрерывную функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = f(x,y)$, и начальному условию $y(x_0) = y_0$

т.е. ***найти решение*** дифференциального уравнения. Нахождение такого решения называют **решением *задачи Коши***. Численное решение этой задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1,y_2,...,y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1,x_2,...,x_n$ с некоторым шагом h.

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \qquad i=1,2,...,n.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнений

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = t + 1$$

$$xdy = y^3 dx$$

$$y' = x^2$$

Уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3)$$

$$xdy = y^3 dx$$

$$y' = x^2$$

Уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = t + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Пример 1. Для дифференциального уравнения

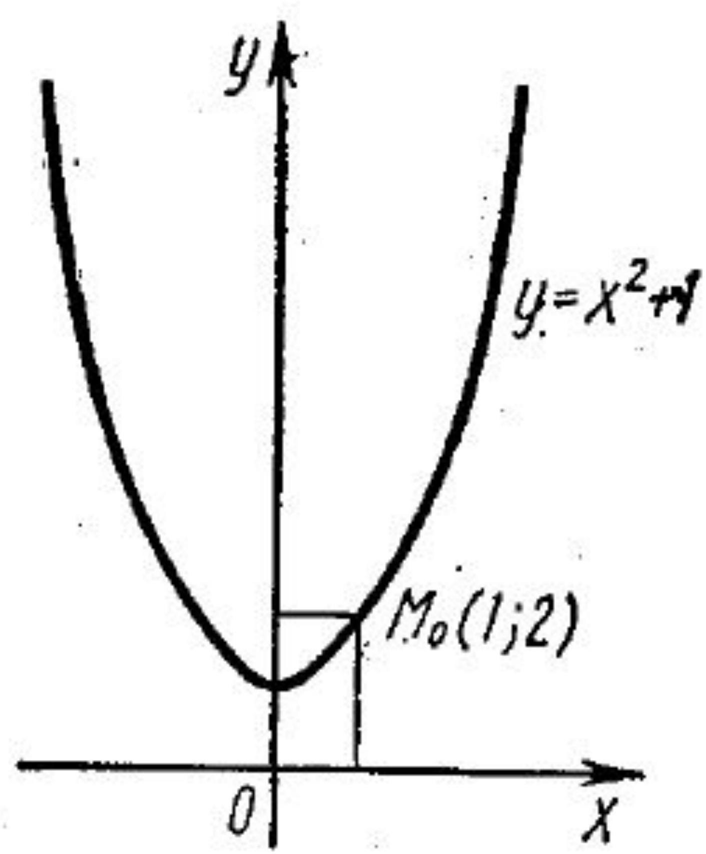
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y_0 = 2$ при $x_0 = 1$

общее решение : $y = x^2 + C$

$2 = 1 + C$, то есть $C = 1$

$M_0\ (1;\ 2)$



Условие *Липшица*

$$\boxed{R_{[a,b]} = \{|\, x - x_0 \,| < a, |\, y - y_0 \,| < b\}}$$

$$\boxed{\left| f(x, \overline{y}) - f(x, y) \right| \le N \left| \overline{y} - y \right|}$$


Методы приближенного решения дифференциальных уравнений
Аналитические методы
Численные методы
Метод последовательных приближений – метод Пикара
Метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов
Метод Эйлера и его модификации
Метод Рунге-Кутта
Экстраполяционный метод Адамса

Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ численным методом – это значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1,\ldots,x_n$ и числа y_0, не определяя функцию $y=F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $y_i=F(x_i)$ и $F(x_0)=y_0$.

$$\mathbf{h=x_k-x_{k-1}}$$

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0$$

$$[a, b]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$ шаг интегрирования

*

$$y' = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$dy = f(x,y)\,dx$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'\,dx = y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

то есть

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y'\cdot h$$

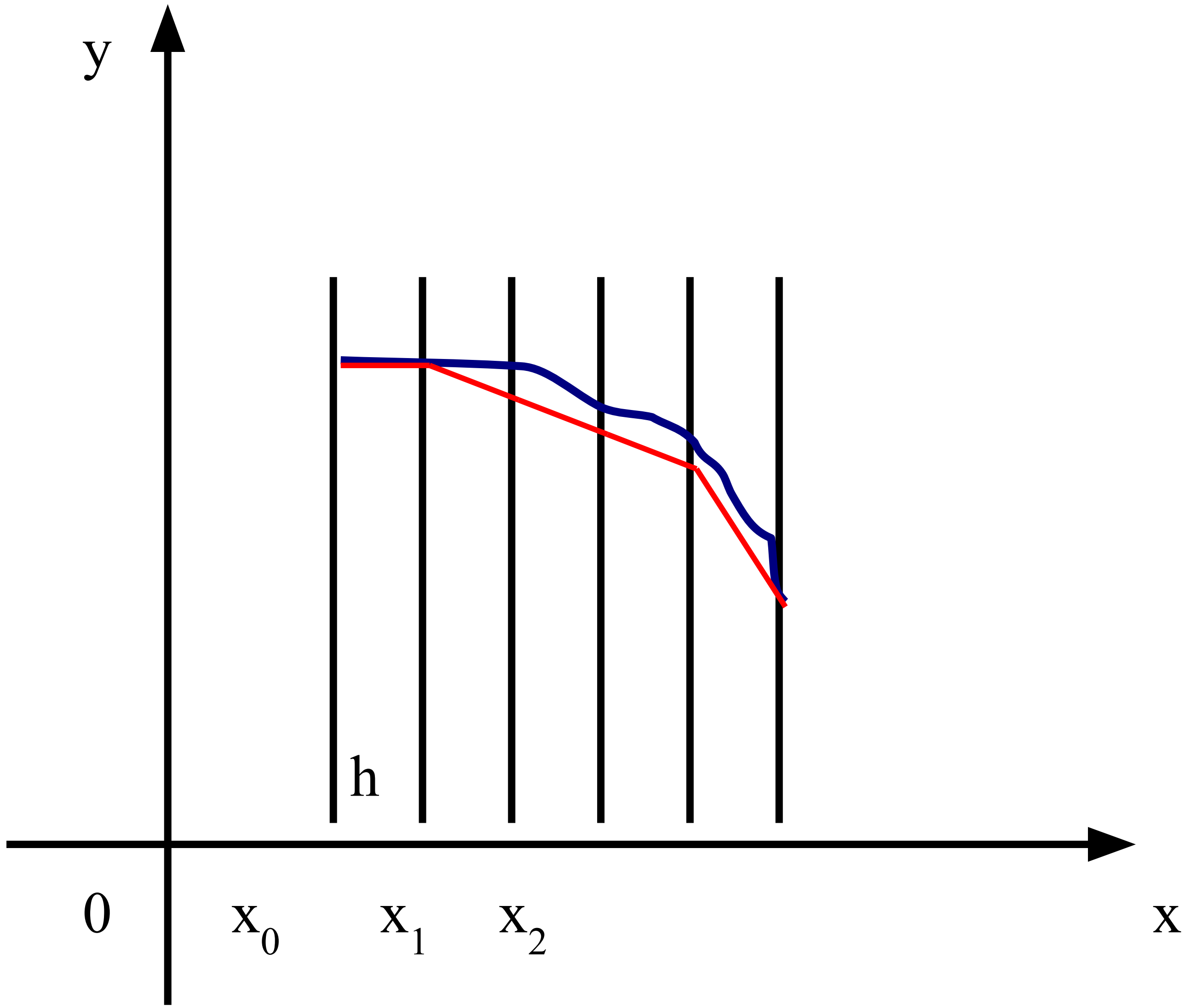
$$y_{k+1} = y_k + y'_k \cdot h$$

$$y_{k+1} - y_k = y'_k \cdot h$$

Обозначим $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$

$$\Delta y_k = h \cdot y'_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$


y
h
0
x0
x1
x2
x

Погрешность метода

$$\left|y(x_n) - y_n\right| \le \frac{hM}{2N}\left[(1 + hN)^n - 1\right]$$

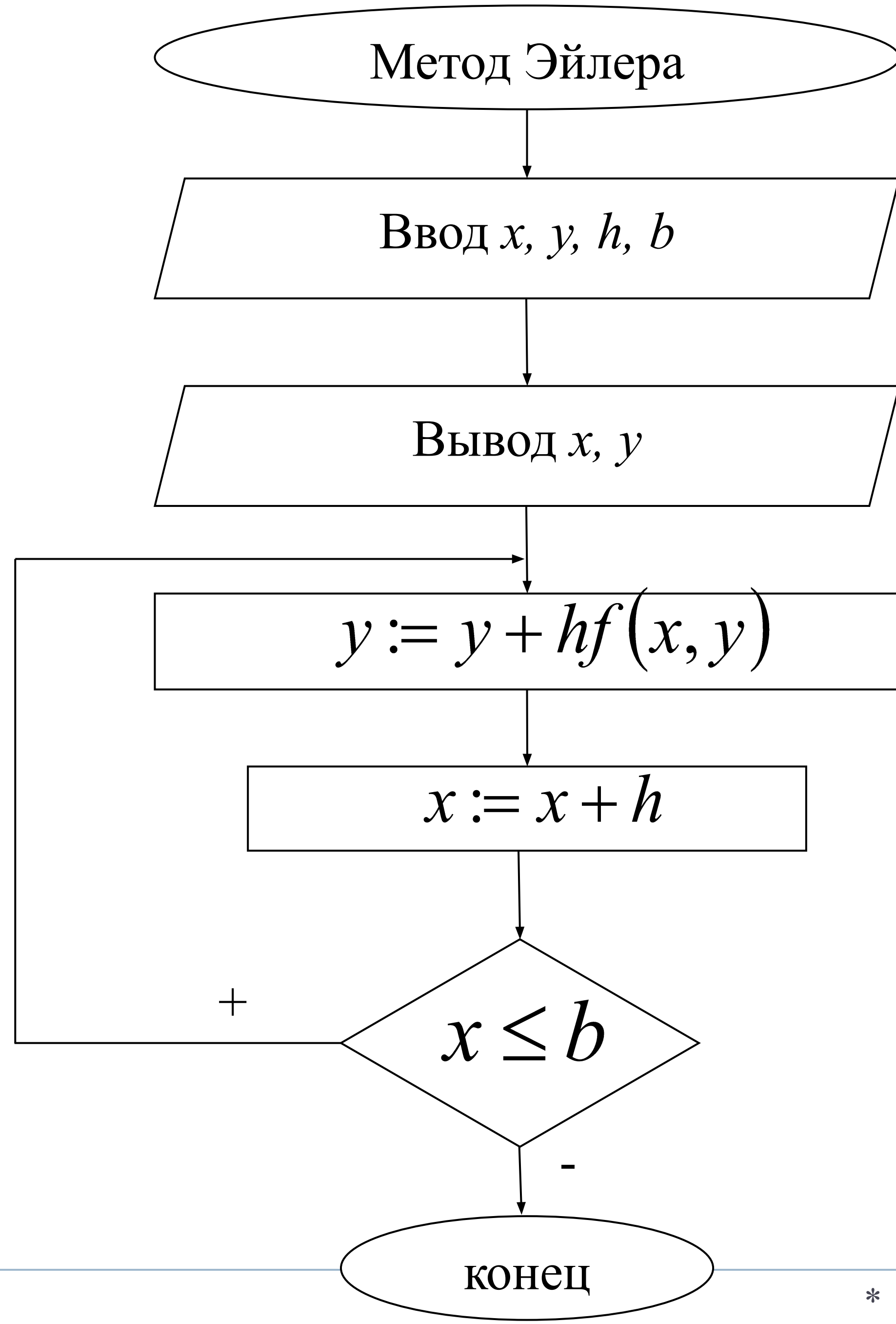
где $\left|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$$

Пример 1. Решить $y'=y-x$ с начальным условием $x_0=0$, $y_0=1.5$ на отрезке [0;1.5], h=0.25

Решение

i	x_i	y_i	$y_i'=y_i-x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1.5000	1.5000	0.3750
1	0.25	1.875	1.6250	0.4062
2	0.50	2.2812	1.7812	0.4453
3	0.75	2.7265	1.9765	0.4941
4	1.00	3.226	2.2206	0.5552
5	1.25	3.7758	2.5258	0.6314
6	1.50	4.4072		


Метод Эйлера
Ввод x, y, h, b
Вывод x, y
$y := y + hf(x, y)$
$x := x + h$
$x \le b$
+
-
конец

Усовершенствованный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h\cdot[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})]/2$$

вернемся к разложению функции в ряд Тейлора

$$y(t_0+h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + \dots .$$

повышение точности расчета может быть достигнуто за счет сохранения члена, содержащего h^2. $y''(t_0)$ можно аппроксимировать конечной разностью:

$$y''(t_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{y'(t_0+h) - y'(t_0)}{h}.$$

С учетом этого выражения разложение функции в ряд Тейлора принимает вид

$$y(t_0+h) = y(t_0) + \frac{1}{2}h[y'(t_0+h) + y'(t_0)],$$

ошибка при этом имеет порядок h^3

МЕТОД

РУНГЕ-КУТТЫ

Задача. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0$$

Найти решение уравнения на отрезке *[a, b]*

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x + h, y + k_3)$$

$$\boxed{\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta y_i}$$

i	x	y	y'=f(x, y)	k=hf(x,y)	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0+h, y_0+k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$

1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+k_3^{(1)}$	$f(x_1+h, y_1+k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_1$
2	x_2	$y_1 = y_2 + \Delta y$	…	…	….

Погрешность метода $\mathbf{R_n(h^5)}$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0=0$, $y(x_0)=y_0=1.5$ методом Рунге-Кутта. Вычислить с точностью до 0,01.

Решение

$k_1^{(0)}=(y_0-x_0)h=1.5000*0.25=0.3750$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1.5000 + 0.1875) - 0.125]0.25 = 0.3906$$

*

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1.5000 + 0.1953) - 0.125]0.25 = 0.3926$$

$k_4^{(0)}=[(y_0+k_3^{(0)})-(x_0+h)]h=[(1.5000+0.3926)$

-

$0.125]*0.25=0.4106$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0.3750 + 2*0.3906 + 2*0.3926 + 0.4106)$$

$=0,3920$

$y_1=1.50000+0.3920=1.8920$

*

i	x	y	y'=f(x, y)	k=hf(x,y)	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,3750
	0,125	1,6875	1,5625	0,3906	0,7812
	0,125	1,6953	1,5703	0,3926	0,7852
	0,25	1,8926	1,6426	0,4106	0,4106
					0,3920
1	0,25	1,89	1,6420	0,4105	0,4105
	0,375	2,0973	1,7223	0,4306	0,8612
	0,375	2,1073	1,7323	0,4331	0,8662
	0,50	2,3251	1,8251	0,4562	0,4562
					0,4323
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	0,4561
	0,625	2,5523	1,9273	0,4818	0,9636
	0,625	2,5652	1,9402	0,4850	0,9700
	0,75	2,8093	2,0593	0,5148	0,5148
					0,4841

3	075	2,8084	2,0584	0,5146	0,5146
	0,875	3,0657	2,1907	0,5477	1,0954
	0,875	3,0823	2,2073	0,5518	1,1036
	1,00	3,3602	2,3602	0,5900	0,5900
					0,5506
4	1,00	3,3590	2,3590	0,5898	0,5898
	1,125	3,6539	2,5289	0,6322	1,2644
	1,125	3,6751	2,5501	0,6375	1,2750
	1,25	3,9965	2,7465	0,6866	0,6866
					0,6360
5	1,25	3,9950	2,7450	0,6862	0,6862
	1,375	4,3381	2,9631	0,7408	1,4816
	1,375	4,3654	2,9904	0,7476	1,4952
	1,50	4,7426	3,2426	0,8106	0,8106
					0,7456
6	1,50	4,7406			

Метод Рунге-Кутта при решении систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

,

*

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)})$$

, где

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1^{(i)} = hq(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2})$$

$$l_2^{(i)} = hq(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2})$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$l_3^{(i)} = hq\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3^{(i)}}{2}, z_i + l_3^{(i)})$$

$$l_4^{(i)} = hq(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3^{(i)}}{2}, z_i + l_3^{(i)})$$

,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

Метод последовательных приближений

$$y' = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$dy = f(x, y)\, dx$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx$$

Первое приближение: $y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\ dx$

Второе приближение: $y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\ dx$

Третье приближение: $y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\ dx$

…

n-е приближение: $y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\ dx$

Теорема. Пусть в окрестности точки $(x_0; y_0)$ функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$. Тогда в некотором интервале, содержащем точку x_0, последовательность $\{ y_i(x)\}$ сходится к функции $y(x)$, служащей решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$

Оценка погрешности метода Пикара

$$|y - y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

где M = max |f(x, y)|

N = max |f ’$_y$(x, y)|

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Метод Пикара последовательных приближений

Дифференциальное уравнение n-ого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2).$$

Предполагается, что в некоторой окрестности точки $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ уравнение **(1)** удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Будем строить искомое решение $y = y(x)$ для значений $x \geq x_0$.

Случай $x \leq x_0$ аналогичен.

Интегрируя правую и левую части уравнения (1) в пределах от x_0 до x, получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

или в силу начального условия **(2)**, будем иметь

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad \textbf{(3)}$$

Так как искомая функция **y = y(x)** находится под знаком интеграла, то уравнение **(3)** является ***интегральным.***

Очевидно, решение интегрального уравнения **(3)** удовлетворяет дифференциальному уравнению **(1)** и начальному условию **(2).**

Для нахождения этого решения применим метод ***последовательных приближений***.

Заменяя в равенстве **(3)** неизвестную функцию ***y*** данным значением $\mathbf{y_0}$, получим ***первое приближение***

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$$

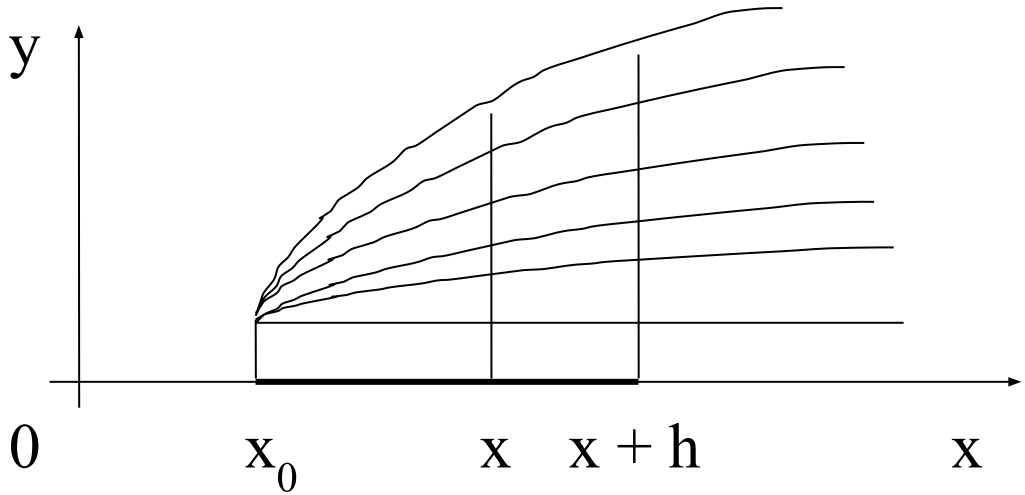
Далее подставив в равенстве **(3)** вместо неизвестной функции ***y*** найденную функцию $\boldsymbol{y_1}$, будем иметь ***второе приближение***

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \qquad \text{и т.д.}$$

Все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \qquad \mathbf{(n = 1, 2, \ldots)}$$

Геометрически последовательные приближения представляют собой кривые $\mathbf{y_n = y_n(x)}$ $\mathbf{(n = 1, 2, \ldots)}$, проходящие через общую точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$.



Замечание. При методе последовательных приближений в качестве начального приближения $\mathbf{y_0}$, можно выбирать любую функцию, достаточно близкую к точному решению **y**.

Например, иногда выгодно в качестве $\mathbf{y_0}$ брать конечный отрезок ряда Тейлора искомого решения.

Заметим, что при пользовании методом последовательных приближений аналитичность правой части дифференциального уравнения необязательна, поэтому этот метод можно применять и в тех случаях, когда разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд невозможно.

Пример 1. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$\mathbf{y' = x - y,}$$

Удовлетворяющее начальному условию **y(0) = 1.**

Решение. В качестве начального приближения возьмем $\mathbf{y_0(x) = 1}$. Так как

$$y = 1 + \int_0^x (x - y)dx$$

то будем иметь

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x - 1)dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Аналогично

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$$

Подобным же образом получим

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$ и т.д.

Система дифференциальных уравнений (метод Пикара)

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}) \qquad \textbf{(4)}$$

где

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \qquad \textbf{(5)}$$

Записывая векторное уравнение **(4)** в интегральной форме, будем иметь

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{f}(x, \bar{y})dx \qquad (6)$$

где под интегралом от вектор-функции $\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

понимается вектор

$$\int_{x_0}^{x} \bar{f}\, dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1\, dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x} f_n\, dx \end{bmatrix}$$

Последовательные приближения $\overline{y}^{(p)}$ **(p = 1, 2, …)** определяются по формуле

$$\overline{y}^{(p)} = \overline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f}(x, \overline{y}^{(p-1)})dx$$

Причем обычно полагают $\overline{y}^{(0)} \equiv \overline{y}$

Этот метод годится также для дифференциального уравнения **n**-го порядка, если его записать в виде системы.

<u>Пример 2.</u> Построить несколько последовательных приближений для решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2 \end{cases}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\mathbf{y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 0}$$

Решение.

Имеем:

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2)dx$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1^2)dx$$

Отсюда, полагая

$$y_1^{(0)} = 1; \quad y_2^{(0)} = 0$$

получаем

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + 0)dx = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 - 1)dx = -x + \frac{x^3}{3}$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x \left[x + \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\left(-x + \frac{x^3}{3}\right) \right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36}$$

$$y_2^{(2)} = \int_0^x \left[x^2 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{4}\right) \right] dx = -x - \frac{x^5}{20}$$

и т.д.

Окончание вычислений

$$| y - y_n | \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$