Дискретная математика

Лекция 1

Цель лекции: введение в курс дискретной математики, теория множеств

Рекомендуемая литература

- Баврин И.И. Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата.- М.: Издательство Юрайт, 2015.- 208 с.
- Селезнев С.Н. Основы дискретной математики.- М.: МГУ, 2010.- 59 с.
- Романов В.Ф. Основы дискретной математики. Методические указания к практическим занятиям.- Владимир.: Изд-во ВлГУ, 2008 г. – 39 с.
- Интернет ресурс. Интернет университет информационных технологий.http://www.intuit.ru

Введение

МАТЕМАТИКА

Условное деление

Непрерывная математика
Теория пределов и непрерывности

Дискретная математика
Прерывная.
Основа информатики

числа

Являются основами для создания систем

Числа и другие объекты

Аналоговые электронные системы

Цифровые электронные системы

Программные и аппаратные

Разделы дискретной математики

- Теория множеств.
- Комбинаторика
- Теория графов.
- Алгебра логики.
- Матрицы.
- Разностные уравнения.
- Дискретная вероятность.

Задачи курса

- УМЕТЬ
- Правильно употреблять математическую символику и оперировать математическим инструментарием.
- Классифицировать задачу. Выбирать модель представления задачи.
- ВЛАДЕТЬ
- Основами математического моделирования.

Раздел 1. Элементы теории
1.1 Множества и операции над ними

- Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединенные общими признаками.(A,B,C…)
- Элементы множества – это объекты, которые образуют множество. (a,b,c..)
- Если элементами множества являются цифры – это числовое множество

$$a \in A \qquad a \notin A$$

Принадлежит, содержится, а из А, а входит в А

Примеры

- Учебник –страницы.
- Группа ВТ-115 – ФИО студентов.
- Серия микросхем – состав серии.

Обозначения числовых множеств

N – множество натуральных чисел;

N0 – множество неотрицательных целых чисел;

Z – множество целых чисел;

R – множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Названия и обозначения числовых множеств

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$a \le x \le b \quad \Rightarrow \quad [a;\mathrm{b}]$$

Обозначение в теории множеств

$$a < x < b \quad \Rightarrow \quad ((a;\mathrm{b}))$$

Названия и обозначения числовых множеств

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$a \le x < b \quad \Rightarrow \quad [a;b)$$

Альтернативное обозначение

$$a < x \le b \quad \Rightarrow \quad \left((a;b]\right)$$

Названия и обозначения числовых множеств

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$x < a \Rightarrow (-\infty; a)$$

Альтернативное обозначение

$$x \le a \Rightarrow ((-\infty; a])$$

Названия и обозначения числовых множеств

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$x > b \Rightarrow (b;+\infty)$$

Альтернативное обозначение

$$x \geq b \Rightarrow ([b;+\infty))$$

Названия и обозначения числовых множеств

- Множество всех действительных чисел обозначается:

$$(-\infty;+\infty)$$ или $$|x| < +\infty$$

или $\boxed{R}$

Множество всех положительных чисел называют натуральным рядом или множеством натуральных чисел и обозначают ,буквой N

Множества конечные и бесконечные

- Множество содержащее конечное число элементов называют конечным, в противоположном случае множество называю бесконечным.
- ПРИМЕР: Множество студентов в группе – конечное множество.
- ПРИМЕР: Множество транзисторов в ИС – конечное множество.
- ПРИМЕР: N, R – бесконечные множества.

Формы задания множества
1 способ

- Например: A = {1,2,3} – означает, что множество А состоит из элементов 1,2,3. Это конечное множество.
- Например: N = {1,2,3,…} . Бесконечное множество.

Первый способ задания множества заключается в явном перечислении его элементов. При этом порядок перечисления элементов не имеет значения.

ВАЖНО – порядок перечисления будет важен в разделе КОМБИНАТОРИКА.

Формы задания множества
2 способ

- Заключается в описании элементов определяющим свойством P (x), общим для всех элементов множества.
- Например: A= {x: P (x)}
- Например: A = {x: x=2k, $k \in N$

  A - Множество положительных четных чисел 2,4,6,…и до бесконечности.
- B= {x:0<x<10 и x – четное}, B={2,4,6,8}

Формы задания множества
2 способ

- C = {x: x – пациент больницы №4 г. Владимир}
- D = {x: x – студент группы ВТ-115 ВлГУ}

Формы задания множества
3 способ

- Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из других объектов или уже полученных элементов множества.

Равенство множеств

- Если множество А и множество В состоит из одних и тех же элементов, то такие множества называют равными. Равные множества обозначаются:

A=B

Например: {1,2} = {2,1}

или A={1<x<4, x – целое}

C={ $x : x^2 - 5x + 6 = 0$

A=C ?

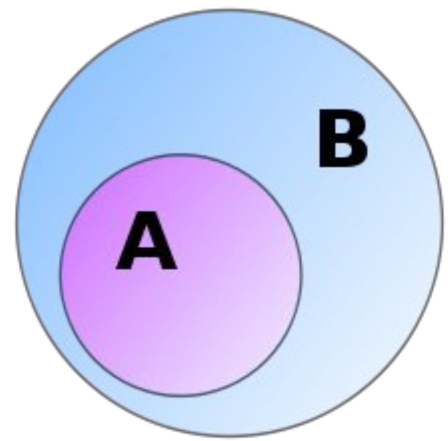
Докажите

Подмножество множества

- Если имеется два множества А и В и известно, что каждый элемент множества В является элементом множества А, то множество В является подмножеством множества А.

$$B \subset A$$

Знак включения



В содержит А

Говорят, что А содержит В или В включено в А

Подмножество множества

- Пример 1: Множество четных чисел, есть подмножество множества целых чисел.
- Пример 2: A={x: x – группа студентов ВТ}

B={b: b – факультет ИТ},

то A подмножество B

ТЕОРЕМА 1

- Если $B \subset A$ а

$A \subset B$ то A=B

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1.Любой элемент из множества В является элементом множества А.

2.Любой элемент из множества А является элементом множества В.

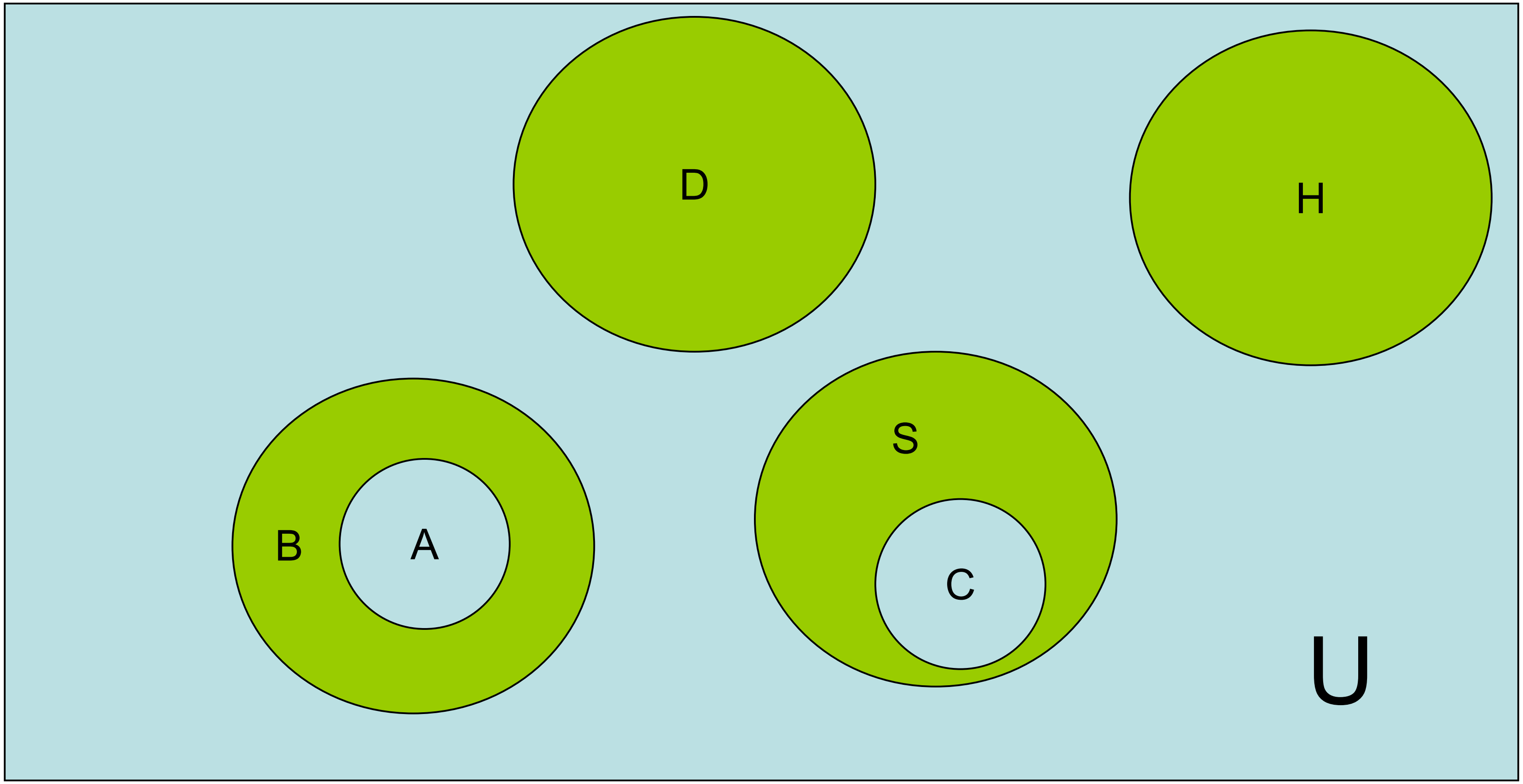
ТО есть множество А и В состоят из одних и тех же элементов - это означает, что А=В

Определение - булеан

- Элементами множества могут быть подмножества.
- Множество всех подмножеств множества А называется его булеаном или множеством-степенью и обозначается: Р(А) или

$$2^A$$

Универсальное множество



Множество U – универсальное множество, которое задает область исследования

Пустое множество

- Множество, не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается знаком:

$$\varnothing$$

Пример1: множество людей на солнце.
Пример 2: множество действительных корней уравнения:

$$x^2 + 1 = 0$$

ТЕОРЕМА 2

- Пустое множество является подмножеством любого множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из определения подмножества следует, что B является подмножеством A, если B не содержит элементов не являющихся элементами множества A.
Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов не принадлежащих A.

ВЫВОД: пустое подмножество, есть подмножество любого множества.

Операции над множествами
Объединение или сумма

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** если даны два множества **A** и **B**, то их объединением или суммой будет называться множество **C**, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств **A** и **B**.

$$C = A \cup B$$

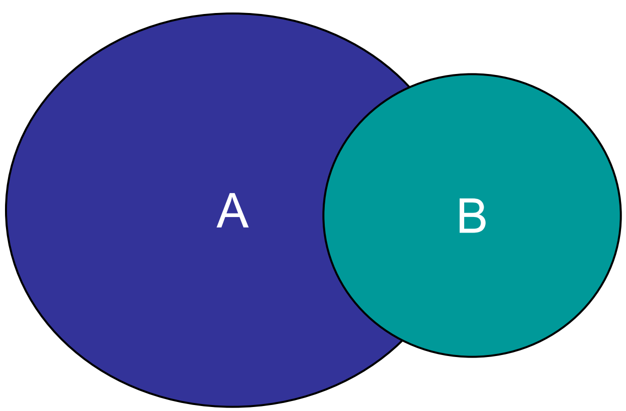
(C=A+B)

Знак объединения

Пример операции объединения

- ПРИМЕР 1: {1,2,3} $\cup$ {2,3,4}= {1,2,3,4}

ПРИМЕР 2: А – множество компонентов резисторов,
В – множество компонентов диодов, тогда
объединение А и В – это множество С
компонентов, которые являются либо резисторами
либо диодами



Следствие операции объединения

$$\boldsymbol{A \cup A = A}$$

$$A \subset \left(A \cup B\right)$$

$$B \subset \left(A \cup B\right)$$

Объединение N множеств

- Операция объединения может быть распространена на N множеств. Тогда записывают:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_\mathrm{N}$$

или $$\mathrm{C} = \bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} A_k$$

Задача

A [illegible] $\varnothing = ?$

Операция пересечения или умножения

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** если даны два множества **A** и **B**, то пересечением их будет называться множество **C**, которое будет состоять из элементов принадлежащих одновременно множеству **A** и множеству **B.**

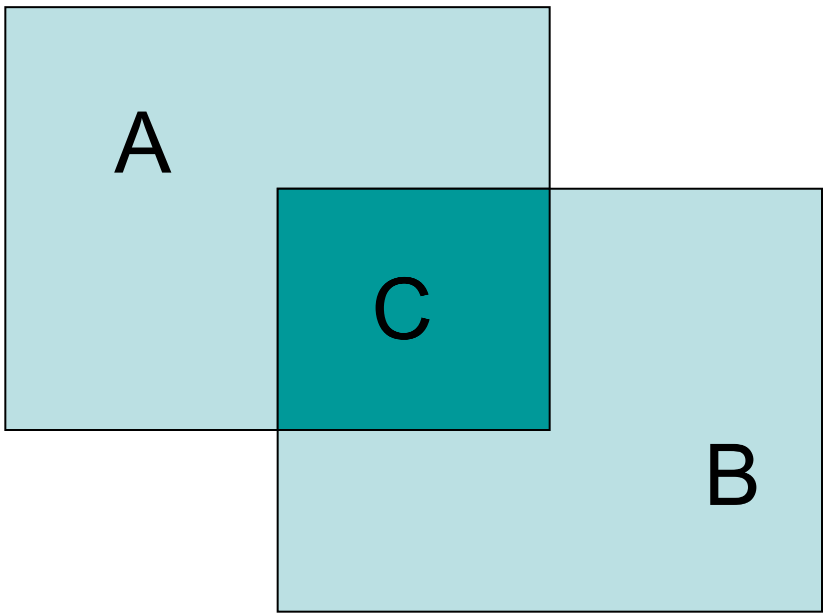
$$C = A \cap B$$

C=A B

Знак пересечения

Пример операции пересечения

- ПРИМЕР: {1,2,3} ⊠ {2,3,4} ={2, 3}



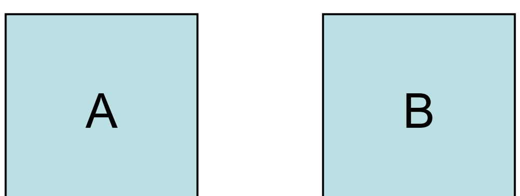
СЛЕДСТВИЯ операции пересечения

1. $A \cap A = A$

2. $(A \cap B) \subset A$

3. $(A \cap B) \subset B$

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение равно пустому множеству. НАПРИМЕР A={1,2,3} B={4,5,6}, то пересечение A с B равно пустому множеству.



$$A \cap B = \varnothing$$

Непересекающиеся множества

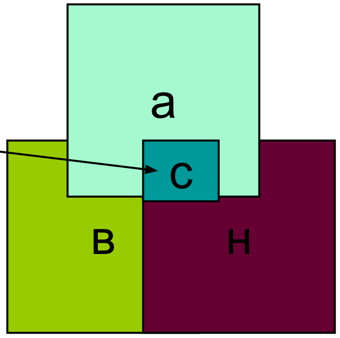
- Множества, пересечение которых, является пустым множеством называются непересекающимися.
- ПРИМЕР 1: А – множество целых положительных чисел, В – множество целых отрицательных чисел. А и В – непересекающиеся множества.
- ПРИМЕР 2: А – множество людей старше 20 лет, В – множество людей младше 15 лет.

Пересечение N множеств

- Операция пересечения может быть распространена на N множеств. Тогда записывают

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N$$

$$\text{или } \mathrm{C} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

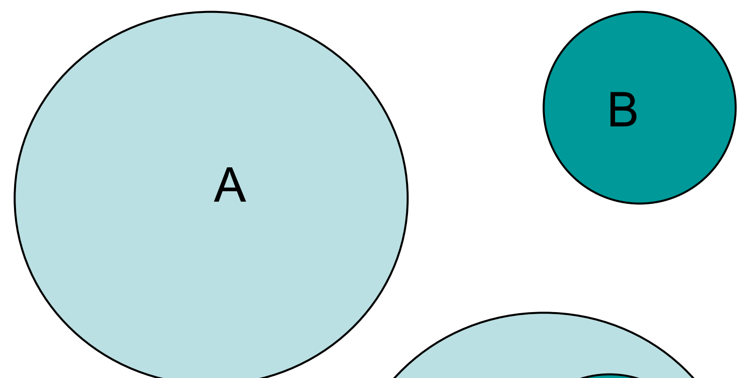


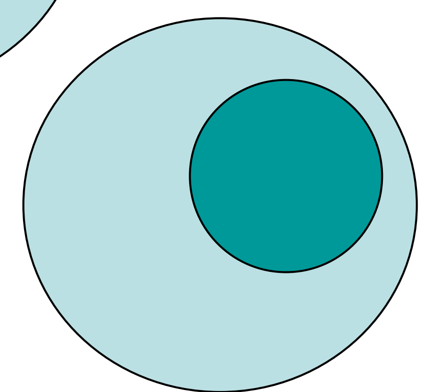
Вычитание множеств

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Разностью множеств **A** и **B** называется совокупность тех элементов множества **A**, которые не являются элементами множества **B**.

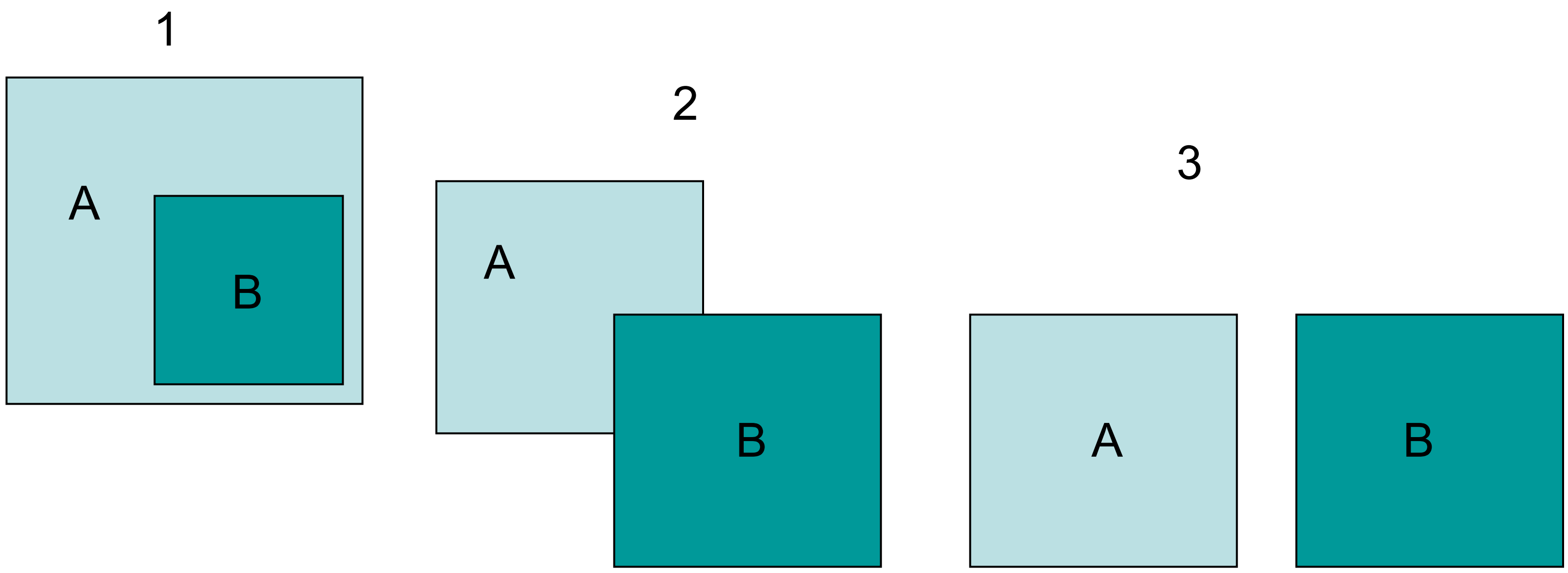
$$A \setminus B$$

Обозначение разности





Варианты вычитания множеств



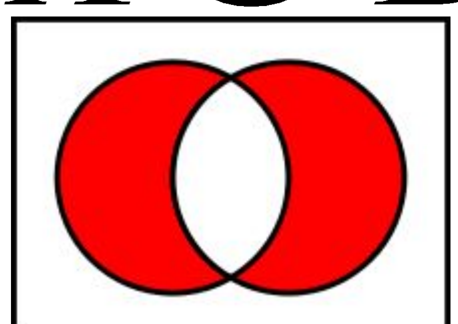
Симметричная разность или кольцевая сумма

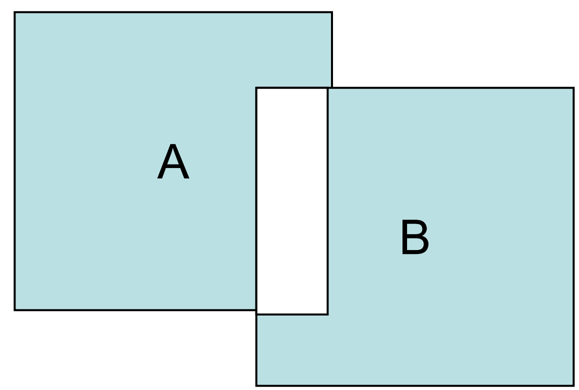
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричной разностью множеств **A** и **B** называется совокупность тех элементов множества **A и B**, которые не являются одновременно элементами множества **A** и **B**.

$$A \Delta B \text{ или}$$

Обозначение кольцевой суммы

$$A \oplus B$$

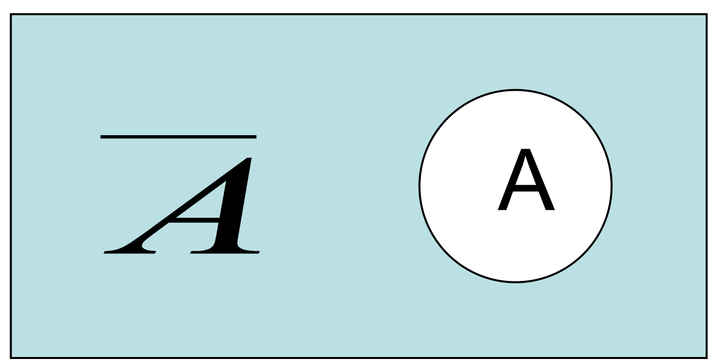




Дополнение

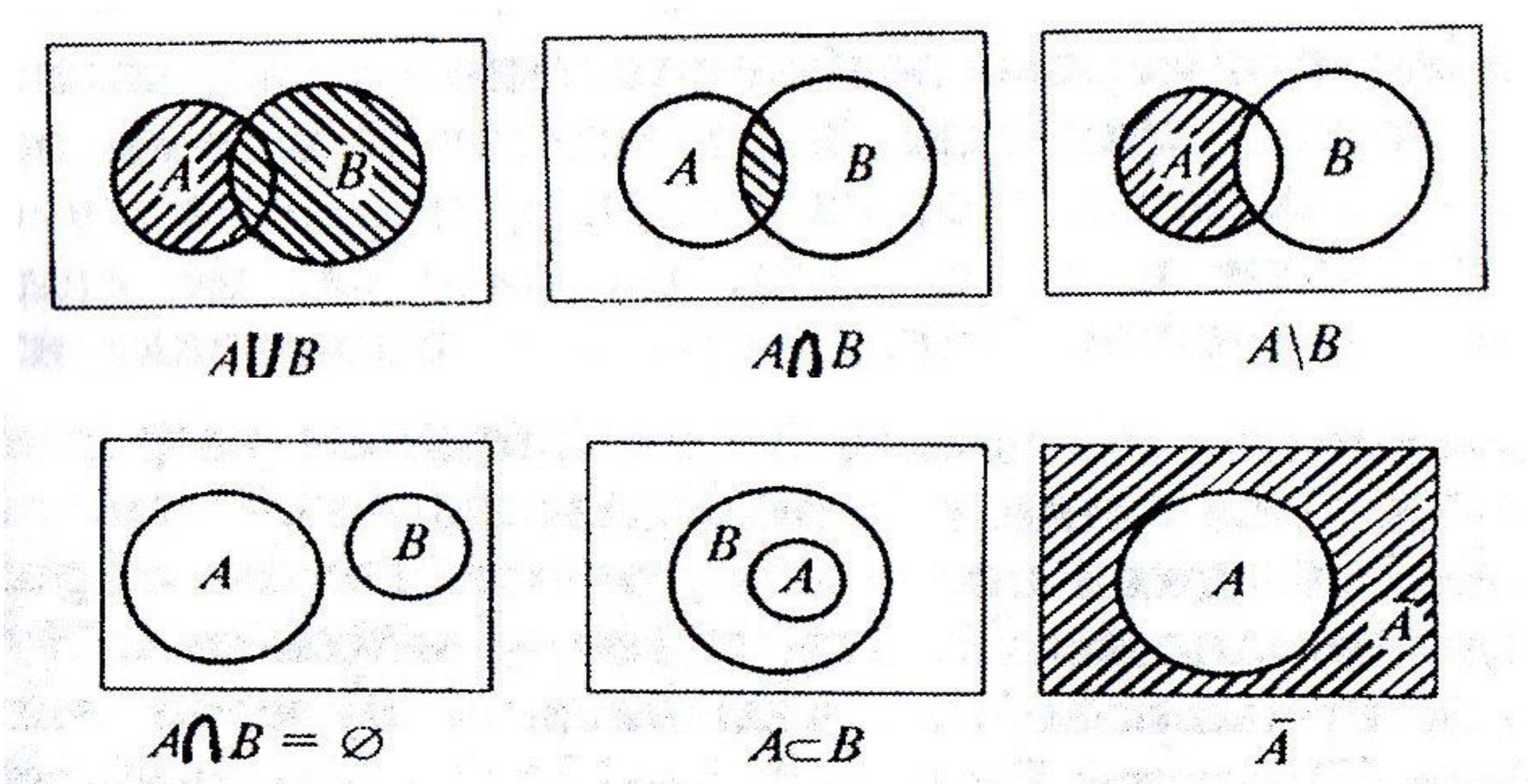
- Дополнением множества A до универсального множества U, является частный случай разности:

$$\overline{A} = U \setminus A$$



Диаграммы Эйлера-Венна

- Применяются для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого либо универсального множества.

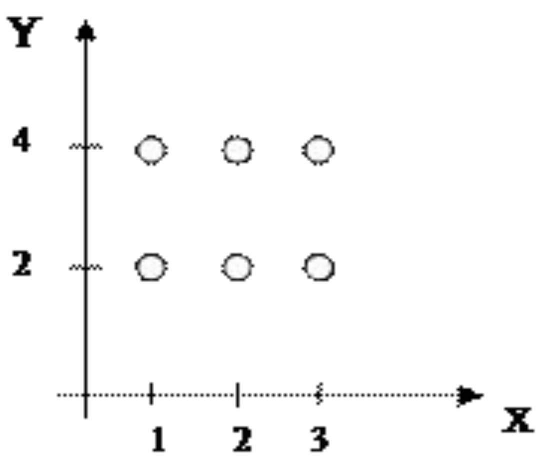


Декартово произведение множества А на множество В

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ: это множество всех упорядоченных пар элементов из А и В.

$$A \times B = \{(x, \mathrm{y}); \mathrm{x} \in \mathrm{A}, y \in B\}$$

ПРИМЕР: A={x.y.z} B={1,2,3}
Напишите элементы произведения множеств



Графическое представление декартова произведения множества X и множества Y

Декартова степень

$$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n}. \longrightarrow X^n$$

ЗАДАЧА; дано множество X={0,1,2} вычислить

$$X^3$$

Порядок выполнения операций над множествами

- Дополнение – (пересечение- объединение) и разность - умножение.
- Изменить порядок выполнения можно заданием скобок.

$$A \boxtimes B \boxtimes C \boxtimes \overline{D} \setminus X$$

Мощность множества

- Это характеристика количества элементов множества. Используется как класс эквивалентности над множествами, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие.

$$|A| \qquad |\varnothing| = 0$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 1. ЗАКОН. Свойство двойного дополнения.

Двойное дополнение множества А равно множеству А

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 2 ЗАКОН. Свойство идемпотентности объединения или пересечения множества А.

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 3 ЗАКОН. Дополнения.

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 4. ЗАКОН. Свойство единицы.

$$A \cap U = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cup U = U$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 5 ЗАКОН. Свойство нуля.

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup \varnothing = A$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 6 ЗАКОН. де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 7 ЗАКОН. Коммутативность пересечения или объединения множеств.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 8 ЗАКОН. Ассоциативности пересечения или объединения.

$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 9 ЗАКОН. Дистрибутивность объединения относительно пересечения и пересечения относительно объединения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Проверка закона де Моргана

- Пусть

$x \in \overline{A \cup B}$

тогда $\mathrm{x} \in \mathrm{U}$ и $\mathrm{x} \notin \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, следовательно

$\mathrm{x} \notin \mathrm{A}$ и $\mathrm{x} \notin \mathrm{B}$, отсюда $\mathrm{x} \in \overline{\mathrm{A}}$ и $\mathrm{x} \in \overline{\mathrm{B}}$

поэтому $\mathrm{x} \in \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{B}$

следовательно $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Проверка закона де Моргана

- Пусть

$x \in \overline{A} \,\square\, \overline{B}$, ттогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$

отсюда $x \in U$ и $x \notin \overline{A}$ и $x \notin \overline{B}$

Значит $x \notin A \,\square\, B$ т есть $x \in \overline{A \,\square\, B}$

Следовательно $\overline{A} \,\square\, \overline{B} \subset \overline{A \,\square\, B}$