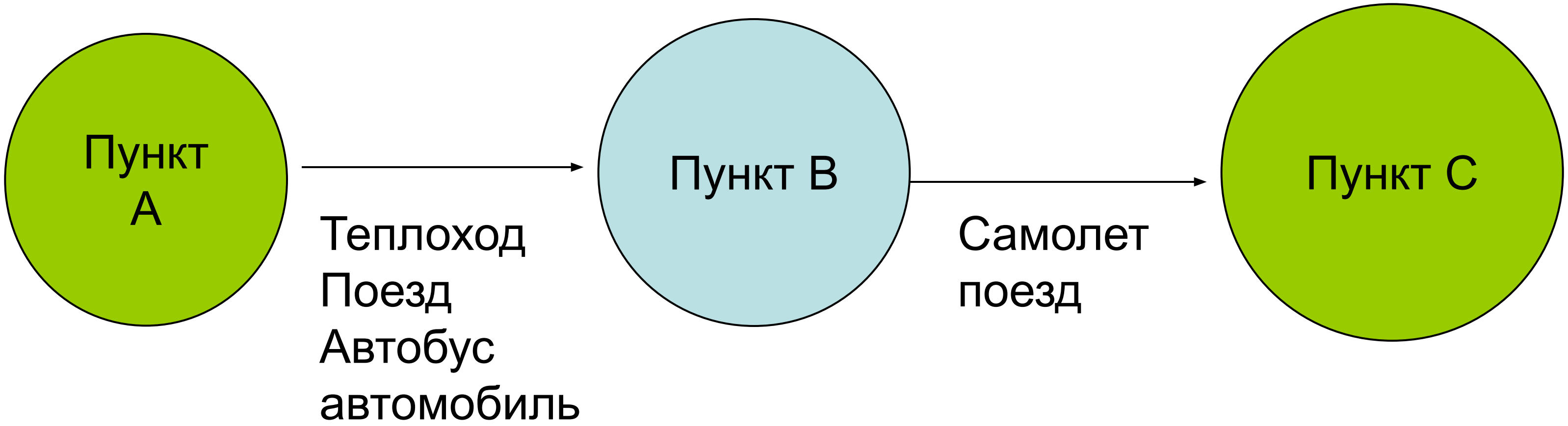
Лекция 3 Введение в комбинаторику

Цель лекции: принцип комбинаторики, число элементов суммы множеств, принцип математической индукции. Подмножества данного множества.

Комбинаторика

- Расчет способов осуществления некоторых действий - является сущностью комбинаторных задач.
- Задача 1: Сколько вариантов попасть из А в С?



Ответ m n = 4 2 = 8

Введение

- ЗАДАЧА 2: В соревновании участвуют 16 команд. Сколько способов распределения золотой, серебряной медали и бронзовой медали?

16 на 15 на 14 = 3360

Основное правило комбинаторики

- Правило умножения.
- Если необходимо выполнить по порядку k действий. Первое можно выполнить n1 способами, второе n2 – способами и т.д. То все k действий:

$$K = n_1 \times n_2 \times \ldots \times \mathrm{n}_\mathrm{k}$$

Задача

- Задача 3. Сколько четырех значных чисел можно составить из цифр {1,2,3,4,5}, если
- А) ни одна цифр не повторяется более одного раза 5543=300
- В) цифры могут повторятся 5666=1080
- С) числа должны быть нечетными 5663=540

Задача

- Задача 4. На гору ведет 7 дорог. Сколько вариантов подняться и спуститься с горы?

49

42

- А разными путями?
- Задача 5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если каждую можно использовать не более одного раза

543=60

Вычисление числа элементов суммы множеств

- Если задано множество А и множество В, то число элементов суммы (объединения) множеств равно:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

А как будет выглядеть формула, если существует три множества А,В,С?

Написать на доске

Закрепим эту формулу решением задачи 5

Задача 5

- Задача 5. Каждый студент группы либо девушка, либо имеет светлые волосы, либо обожает дискретную математику (ДМ). В группе 20 девушек, из них 12 блондинок и одна блондинка обожает ДМ. Всего в группе 24 светловолосых студента, из них ДМ обожают 12, а всего 17 студенток и студентов обожают ДМ из них 6 студенток.
- Сколько студентов в группе?

Решение задачи 5

- Пусть A множество студенток – 20.

  B – множество светловолосых (М и Д) – 24.

  C – множество студентов обожающих ДМ – 17.

$$N(A \cup B \cup C)$$ - Это решение

$A \cap B$ - множество блондинок из условия - 12

$B \cap C$ - множество всех светловолосых студентов (М и Д) - 12

$A \cap C$ - множество студенток, обожающих ДМ - 6

$A \cap B \cap C$ - Множество блондинок обожающих ДМ – 1 из условия

Ответ задачи 5

- Подставляем числа в формулу вычисления суммы числа трех множеств:

$$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-$$

$$-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+$$

$$+N(A\cap B\cap C)=20+24+17-(12+6+12)+1=32$$

Теорема о числе элементов объединения множеств

- Если A1,…,An – некоторые множества, то число элементов объединений этих множеств равно:

$$
\begin{aligned}
N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= N(A_1) + \ldots + N(A_n) - \\
&- \{N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \ldots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} + \\
&+ \{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \\
&+ \ldots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \ldots + \\
&+ (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}
$$

Продолжение теоремы

- Правая часть этого равенства является суммой n слагаемых, где к - тое по порядку слагаемое имеет вид :

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1,\dots,\mathrm{A}_\mathrm{n}),\ \text{где}$$

$S_k(A_1,\dots,\mathrm{A}_\mathrm{n})$ - Есть сумма чисел $N(A_{l1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_{\mathrm{l}2})$

по всем возможным перечислениям, равно k разных множеств из множеств A1,..,An.

Упорядоченное множество

- Определение: множество из которого задан порядок его элементов называется упорядоченным. Каждому элементу множества указан его порядок (место) в множестве.
- Если задано множество A={a1, a2, a3}, то A={a2, a1, a3} – упорядоченное множество.

Число возможных слов длины k из алфавита мощностью n

- Пусть задано два множества A – алфавит, и D – упорядоченное множество натуральных чисел.
- Если задать отображение F на множестве D со значениями в A, то получим, что каждому натуральному числу будет соответствовать некоторая последовательность элементов из множества A – эта структура - слово.
- **ТЕОРЕМА.** Число возможных слов длины k из алфавита мощностью n равно:

$$n^k$$

Принцип математической индукции

- Пусть имеется конечное упорядоченное множество n натуральных чисел A = {1,2,3,…,n}.
- Предположим, что для некоторых элементов этого множества выполняется некоторое утверждение, например:

$$2^1 \geq 1 + 1$$

$$2^2 \geq 2 + 1$$

$$2^3 \geq 3 + 1$$

ВОПРОС. Всегда ли можно считать, что это утверждение будет справедливым для всех элементов множества А

$$2^k \geq k + 1$$

Ответ на это дает принцип математической индукции

Принцип математической индукции

- 1) *Если некоторое утверждение справедливо для $k=1$.*
- *2) из справедливости утверждения для произвольного натурального k, следует его справедливость для $k+1$, то это утверждение справедливо для всякого натурального n.*

Пример доказательства

- При n = 1 неравенство $2^n \geq n+1$ выполняется.
- Предположим, что выполняется неравенство $2^k \geq k+1$
- Докажем, что справедливо неравенство

$$2^{k+1} \geq (k+1)+1$$

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2(k+1) = 2k+2 > \mathrm{k}+2$$

$$\text{при k} > 1$$

Таким образом, оба условия математической индукции выполняются и неравенство справедливо для любого натурального n.

Понятие собственного подмножества

- Если каждый элемент множества В принадлежит множеству А, то В подмножество множества А. $A \supset B.....B \subset A$
- Пусть подмножество $\varnothing$ является подмножеством любого множества. $\varnothing \subset A$
- Подмножество В множества А называют собственным, если

$$B \neq A...u...B \neq \varnothing$$

Множество всех его подмножеств

- Если задано множество А, то можно рассматривать новое множество М(А) – множество всех подмножеств А, которые имеют k элементов.

$$B \subset M_k(A), \text{если } \mathrm{B} \subset M(A).. \text{ и } \mathrm{N(B)} = \mathrm{k}$$

Пример множества всех подмножеств

- Пусть A={a,b,c}, тогда
- M(A)={{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c},$\varnothing$}
- $M_2(A) =$ {{a,b},{a,c},{b,c}}

$$N(M(A)) = 8 = 2^3 \ldots\ldots\ldots \mathrm{N}(\mathbf{M}_2(A) = 3$$

ВЫВОД -Число всех подмножеств равно n!

ВОПРОС – сколько разных k – элементных подмножеств можно получить из множества с n - элементами

Число сочетаний из n по k

- ТЕОРЕМА: Число всех k - элементарных подмножеств множества A из n элементов равно:

$$N(M_k(A)) = \frac{n(n-1)\dots(\mathrm{n} - \mathrm{k} + 1)}{1 \times 2 \times \dots \mathrm{k}} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Произвольное **k** - элементное подмножество **n** - элементного множества называется сочетанием или комбинацией из **n** по **k**. Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

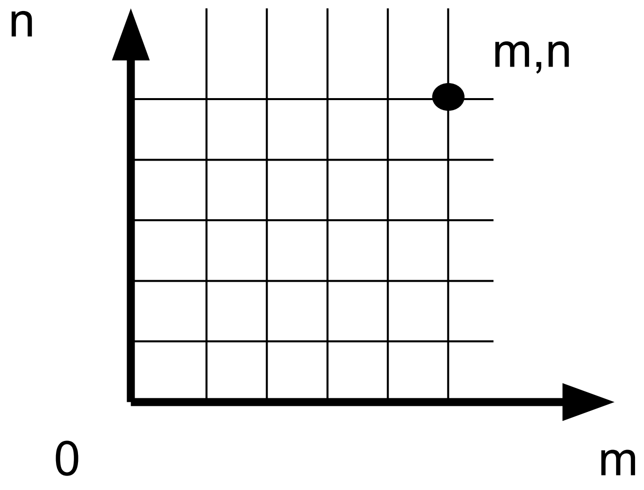
Примеры задач

- Задача 6. Сколько способов выбора трех книг из пяти.
- Задача 7. В комиссию надо 3 человека. В группе 7 человек. Определите количество вариантов состава комиссии.
- Задача 8. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые встретились один раз. Сколько сыграно партий?

10 35 190

Пример графической задачи

- Задача 9. Задана прямоугольная сетка квадратов размерами m на n. Определите число различных вариантов путей из точки (0,0) в точку (m,n) по вертикальным и горизонтальным отрезкам.



Теорема о сумме числа сочетаний

- Число сочетаний из n по k равно сумме числа сочетаний из (n-1) по k и числа сочетаний из (n-1) по (k-1).

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Теорема о сумме числа сочетаний

- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:
- Число кратчайших путей из точки (0,0) в точку A(k, n-k) равно: $$C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$$

Все такие пути можно разделить на две группы проходящие через точку A1(k-1;n-k) и точку A2(k;n-k-1), соответственно число путей проходящих Через A1 и A2:

$$C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1} /////// C_{k+(n-k-1)}^{k} = C_{n-1}^{k}$$

Следовательно: $$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

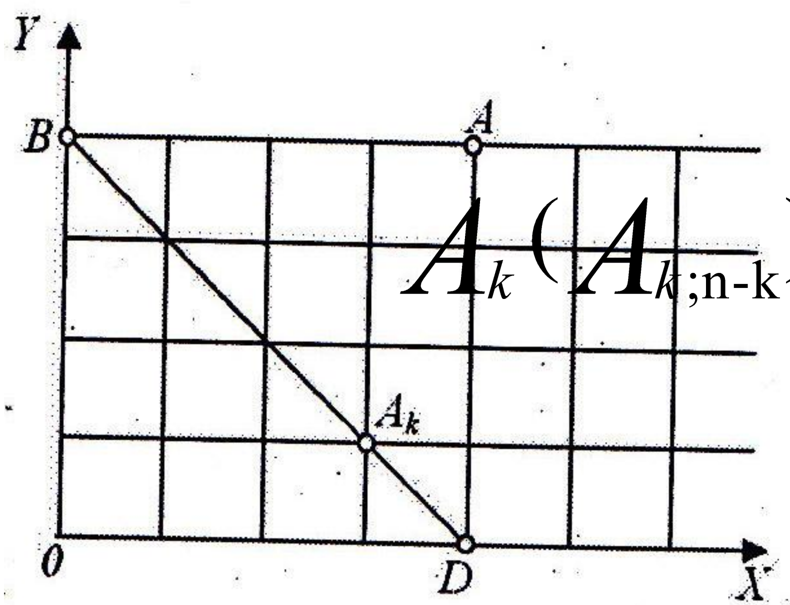
Задача

- Докажите тождество

$$C_{2n}^{n}=(C_{n}^{0})^{2}+(C_{n}^{1})^{2}+\ldots+(C_{n}^{n})^{2}$$

1. Множество всех кратчайших путей
Из (00) в A(n,n)

2. Каждый такой путь проходит через
Точку Ak лежащих на диагонали BD.



$$A_k(A_{k;\text{n-k}})$$

3. Число путей из точки 0 до Ak равно:

$$C_{\text{k+(n-k)}}^{\text{k}}=C_{n}^{k}$$

4. Число путей из Ak в A равно:

$$C_{n-k+k}^{k}=C_{n}^{k}$$

5. Число путей из 0 в A равно:

$$C_{n}^{k}\times C_{n}^{k}=(C_{n}^{k})^{2}$$

Переберем все точки k от 0 до n

Количество подмножеств данного множества

- ВОПРОС. Сколько всего подмножеств имеет множество А, состоящее из n элементов, с учетом того, что пустое множество также включено в А.

- Число всех подмножеств из элементов n равно:

$$N(M(A)) = 2^n$$

Следствие теоремы

- Имеет место равенство:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Действительно, если число k – элементных подмножеств множества n
Элементов, то сумма в левой части есть число всех подмножеств множества

Упорядоченные множества. Перестановки и размещения

- Множество называется упорядоченным. Если каждому элементу множества противопоставлено некоторое число от 1 до n. Каждый элемент множества имеет свой номер.
- Упорядоченные множества, отличающиеся только номерами своих элементов, называются перестановками.
- ПРИМЕР. Составить все перестановки множества A={a,b,c}?

Варианты перестановок множества

- Пусть задано множество А из n – элементов, а Pn – число перестановок.
- ТЕОРЕМА:

$$P_n = n!$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Будем последовательно выбирать элементы множества А и размещать их в определенном порядке на n местах. На первом месте может оказаться любой из n. На втором любой из (n-1) и т.д. По правилу умножения:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1 = \mathrm{n}!$$

Примеры

- Задача 11. Сколькими способами можно поставить 4 книги на полке.
- Задача 12. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,3\ldots 2n\}$ так, чтобы каждому четному элементу множества соответствовал четный номер.

Число размещений длины k из алфавита n

- Число размещений длины k из алфавита n определяется формулой:

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (\mathrm{n} - \mathrm{k} + 1)$$

Схема выбора формулы