

Лекция

Исчисление предикатов

Алгоритм получения (приведения) ПНФ.

- **Шаг 1.** Исключить связи эквивалентности (\sim) и импликации (\rightarrow).
- $x \sim y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x),$
- $A \rightarrow B = (\bar{A} \vee B).$
- **Шаг 2.** Переименовать, если необходимо, связанные переменные таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений

- **Шаг 3.** Удалить те квантификации, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.
- **Шаг 4.** Перенести отрицания внутри формулы в соответствии со следующими правилами:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}; \quad \overline{\forall x A} \sim \exists x \overline{A}, \quad \overline{A \& B} \sim \overline{A} \& \overline{B}, \quad \overline{\overline{A}} \sim A.$$

Пример

✚ **Пример.** Найти ПНФ формулы $x \rightarrow (y \rightarrow xy)$.

Решение.

Шаг 1: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{Q}(x,y) \vee \forall z R(a,x,y)))$

Шаг 2: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists u(\overline{Q}(u,y) \vee \forall z R(a,u,y)))$

Шаг 3: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{Q}(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 4: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(Q(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 5: $\forall x \forall y (p(x) \& \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

$\forall x \forall y \exists u (P(x) \& (Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

Скулемовские функции

- Приведение формулы ЛП к сколемовской форме (сколемизация) призвано обеспечить дальнейшее упрощение логических представлений и облегчить введение процедур машинной обработки в ЛП.
- Отправной точкой сколемизации является предваренная нормальная форма, матрица которой приведена к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).
- Цель сколемизации - исключение \exists -квантификаций.

Алгоритм получения сколемовской формы

- 1) сопоставить каждой \exists -квантифицированной переменной список \forall -квантифицированных переменных, предшествующих ей,
- а также некоторую еще не использованную функциональную константу, число мест, у которой равно мощности списка.
- Данная константа будет представлять сколемовскую функцию;

- 2) в матрице формулы заменить каждое вхождение \exists -квантифицированной переменной на некоторый терм.

Этот терм является функциональной константой, соответствующей данной переменной и снабженной списком аргументов, также соответствующим той же самой переменной;

- 3) устранить из формулы все \exists - квантификации.

- **Каузальная форма** -сколемовская форма, матрица которой приведена к КНФ.
- Любая сколемовская форма допускает эквивалентную каузальную форму

Пример

🚩 Пример.

$$\exists x \forall y P(x, y) \vee \overline{\forall x \exists y Q(x, y)} \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \overline{\exists x \forall y Q(x, y)} \stackrel{36}{=} \exists x [\forall y P(x, y) \vee \overline{\forall y Q(x, y)}] \equiv$$

обозначим в предикате Q переменную y через z

$$\equiv \exists x [\forall y P(x, y) \vee \overline{\forall z Q(x, z)}] \stackrel{53}{=} \exists x \forall y \forall z (P(x, y) \vee \overline{Q(x, z)})$$

Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов.

- **Определение** Формула A логики предикатов называется **выполнимой** в области M , если существуют значения переменных входящих в эту формулу и отнесенных к области M (иначе – существует модель), при которых формула A принимает истинные значения.
- **Определение** Формула A логики предикатов называется **общезначимой**, если она тождественна истинна на всякой области (на любой модели).

- Все логические законы, представленный в ЛВ формулами являются **общезначимыми формулами логики предикатов** .
- Общезначимость формулы логики предикатов, например, F **обозначается**
 $\vdash F$
Все общезначимые формулы могут быть источниками новых \vdash формул.

- **Определение** Формула A логики предикатов называется **тождественно ложной** в области M , если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу (на данной модели).



Пример

формула

$$\forall x [P(x) \wedge \bar{P}(x)]$$

является тождественно ложной

(невыполнимой) формулой логики предикатов.

Теорема Черча

- **Теорема (Теорема Черча).**
Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

Пример

- Из тождественно истинной формулы логики высказываний

$$x \vee y \equiv y \vee x$$

- Получаем общезначимую формулу

$$P(x, y) \vee Q(x, y) \equiv Q(x, y) \vee P(x, y)$$

Проблема разрешимости

- Существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы A логики предикатов установить, к какому типу (классу) она относится, т.е. является ли она
 - **общезначимой,**
 - **выполнимой**
 - **или тождественно ложной** (невыполнимой).
- Если бы такой алгоритм существовал, то он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы логики предикатов.
- Отметим, что, в отличие от алгебры логики, в логике предикатов не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество

Прямая, обратная и противоположная теоремы

- **Определение** Пара теорем, у которых условие одной является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются **взаимно обратными** друг другу.

Так, теоремы $\forall x \in E (P(x) \rightarrow Q(x))$ и $\forall x \in E (Q(x) \rightarrow P(x))$, а также $\forall x \in E (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ и $\forall x \in E (\bar{Q}(x) \rightarrow \bar{P}(x))$ - взаимно обратные теоремы. При этом если одну из них называют *прямой* теоремой, то вторая называется *обратной*.

- **Определение** Пара теорем, у которых условие и заключение одной являются отрицанием соответственно условия и заключения другой, называются **взаимно противоположными**

Так, теоремы $\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))$ и $\forall x \in E(\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$, а также $\forall x \in E(Q(x) \rightarrow P(x))$ и $\forall x \in E(\bar{Q}(x) \rightarrow \bar{P}(x))$ являются взаимно противоположными теоремами.

Пример

- **Теорема** “Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником ” (1)
 - **обратной** является
 - **Теорема** “Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны” (2).
 - **противоположной** является
 - **Теорема** «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником ” (3), а для теоремы (2) противоположной является
 - **Теорема** “Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны ” (4).
-
- теоремы (1) и (4) являются одновременно ложными, а теоремы (2) и (3) одновременно истинными.

- **Вывод: прямая и обратная теоремы, вообще говоря, не равносильны,**
- т. е. одна из них может быть истинной, а другая – ложной.
- Однако легко показать, что теоремы (1) и (4), а также (2) и (3) всегда равносильны

Необходимые и достаточные условия

- Некоторые теоремы существования сформулированы в виде « ... для того, чтобы..., необходимо и достаточно, что ...»,
- или « ... тогда и только тогда, когда ...», а это конструкция

$$\forall x \in E (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- предикат является истинным для всех x в том и только в том случае,
- когда множество истинности предиката $P(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q(x)$.

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

- При этом говорят, что предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, и предикат $Q(x)$ называют **необходимым условием** для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ – **достаточным условием** для $Q(x)$

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

Неполнота математики

- Класс всех теорем исчисления предикатов совпадает с классом общезначимых формул .
- В 1889 г. Пеано предложил свои аксиомы для аксиоматизации понятия натурального числа и, после этого была создана формальная теория, известная под названием *формальная арифметика*. Это теория является расширением исчисления предикатов

Аксиомы Пеано

- 1) 1 есть натуральное число;
- 2) следующее за натуральным числом есть натуральное число;
- 3) 1 не следует ни за каким натуральным числом;
- 4) если натуральное число a следует за натуральным числом b и за натуральным числом c , то натуральные числа b и c тождественны;
- 5) если какое-либо предложение доказано для 1 и если из допущения, что оно верно для натурального числа n , вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел (**принцип математической индукции**).

Теорема Геделя о неполноте

- **Теорема.**
- Всякая естественная непротиворечивая аксиоматическая теория T (формализация) арифметики или любой другой математической теории, содержащей арифметику (например, теория множеств), неполна и неполнима в том смысле, что
 - а) в T имеются содержательно истинные неразрешимые формулы, т. е. такие формулы A , что ни A , ни отрицание A не выводимы (не доказуемы) в T ;
 - б) каким бы конечным множеством дополнительных аксиом не расширить систему T , в новой, усиленной таким образом формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы.

- Вывод : в сложной аксиоматической
- системе
- существуют формулы, которые **нельзя ни доказать, ни опровергнуть.**

- Может в этом причина, что не все задачки имеют решения?!

Аксиомы и основные правила вывода исчисления предикатов

- Аксиомами ИП являются все 4 группы аксиом ИВ и

- 5 группа :

1. $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$; аксиома P1;

2. $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$; аксиома P2.

Правила вывода ИП

- 1) правила вывода ИВ (подстановка ПП и заключение (MP));

2) правило обобщения (правило \forall -введения):

Если $F \rightarrow G(x)$ - выводимая формула в ИП и F - не содержит переменной x , то формула $F \rightarrow \forall x G(x)$ также выводима в ИП

$$\frac{F \rightarrow G(x)}{F \rightarrow \forall x G(x)}$$

правило ПП 1,

3) правило \exists -введения:

Если $G(x) \rightarrow F$ - выводимая формула в ИП и F - не содержит переменной x , то формула $\exists x G(x) \rightarrow F$ также выводима в ИП

причем $G(x)$ содержит свободные вхождения x , а F - не содержит;

$$\frac{G(x) \rightarrow F}{\exists x G(x) \rightarrow F} \quad \text{правило ПР2.}$$

Пример

- Даны два предиката:
- $B(x) =$ "x делится на 6";
- $A(x) =$ "x делится на 3".
- применение правила П2 неправомерно, если B зависит от x

Тогда $B(x) \rightarrow A(x) =$ "Если x делится на 6, то x делится на 3" = И для всех x .

Однако $B(x) \rightarrow \forall x A(x) =$ "Если x делится на 6, то все x делятся на 3" не

всегда истинно.

Если же к формуле $B(x) \rightarrow A(x)$ применить правило ПЗ,

то получим $\exists x B(x) \rightarrow A(x)$.

После применения правила П₂ получим $\exists x B(x) \rightarrow \forall x A(x)$ или

"Если некоторые x делятся на 6, то все x делятся на 3" = Л.

Таким образом, применение правила ПЗ также неправомерно, если B зависит от x .

Дополнительные правила вывода для исчисления предикатов

1. Введение квантора общности: $\frac{A(y)}{\forall x A(x)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки переменной y вместо x в $A(x)$.

2. Удаление квантора общности: $\frac{\forall x A(x)}{A(y)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки терма y вместо x в $A(x)$.

3. Отрицание квантора общности: $\frac{\neg \forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$.

4. Введение квантора существования: $\frac{A(y)}{\exists x A(x)}$, где $A(y)$ – результат правильной подстановки термина y вместо x в $A(x)$.

5. Удаление квантора существования: $\frac{\exists y A(y)}{A(x)}$, где $A(x)$ – результат правильной подстановки переменной x вместо y в $A(y)$.

6. Отрицание квантора существования: $\frac{\neg \exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}$.

Пример

- Всякое нечетное натуральное число есть разностью квадратов двух натуральных чисел.
- 5 – натуральное число. Следовательно, 5 – разность квадратов двух натуральных чисел
- **Решение**
- $A(x)$ = “ x – нечетное число”.
- $B(x)$ – “ x – разность квадратов двух чисел”.

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(5) \vdash B(5).$$

Построим вывод.

- (1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ – гипотеза;
- (2) $A(5)$ – гипотеза;
- (3) $A(5) \rightarrow B(5)$ – из (1) и удаления \forall ;
- (4) $B(5)$ – из (2) и (3) по *т. р.*

Метод резолюций в ИП

- Главная идея метода резолюций
- если одна и та же формула появляется в одном дизъюнкте без отрицания, а в другом - с отрицанием,
- то дизъюнкт, называемый **резольвентой** и получаемый в результате соединения этих двух дизъюнктов, из которых вычеркнута упоминавшаяся повторяющаяся формула является следствием указанных дизъюнктов