Временные ряды

Эконометрическую модель можно построить, используя два типа исходных данных:

- данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;
- данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются ***пространственными моделями.*** Модели, построенные по данным второго типа, называются ***моделями временных рядов.***

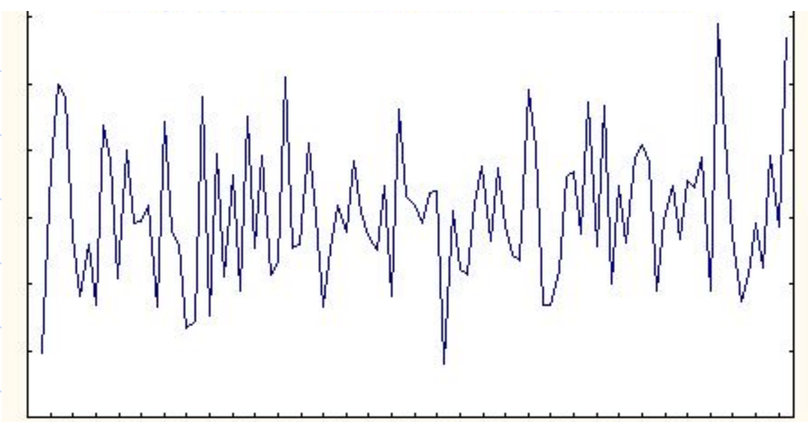
Временной ряд (динамический ряд, ряд динамики) – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени.

	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.
ВВП, млрд. руб.	7305,6	8943,6	10834,2	13285,2	17048,1

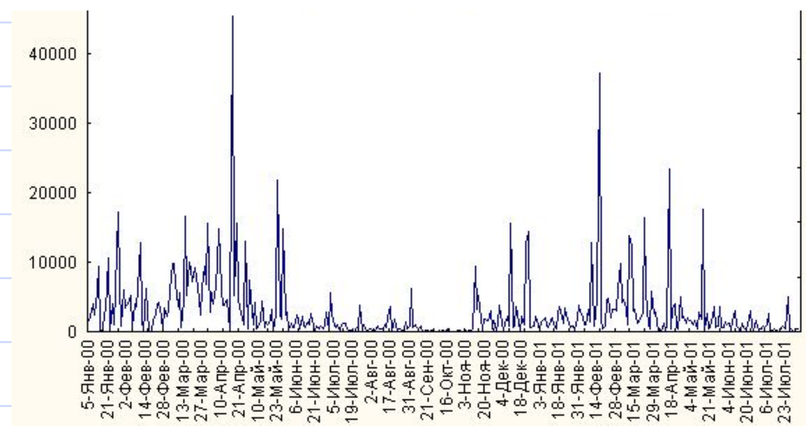
Виды временных рядов

- Стационарные
- Нестационарные
  - Содержащие тренд
  - Содержащие сезонную составляющую

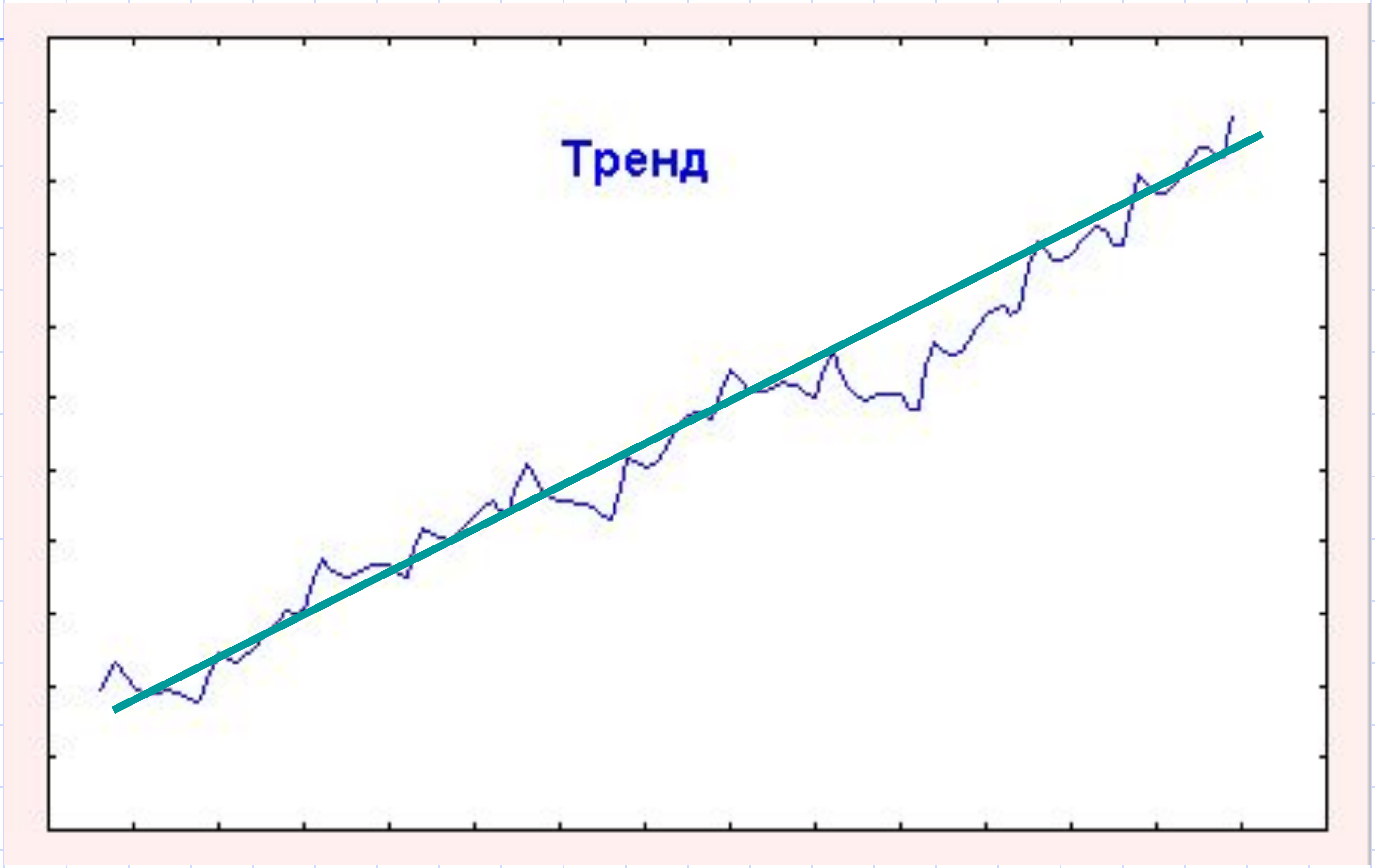
Стационарный временной ряд



Нестационарный временной ряд



Временной ряд с трендом



Отражает устойчивые средние изменения показателя

Временной ряд с сезонной компонентой

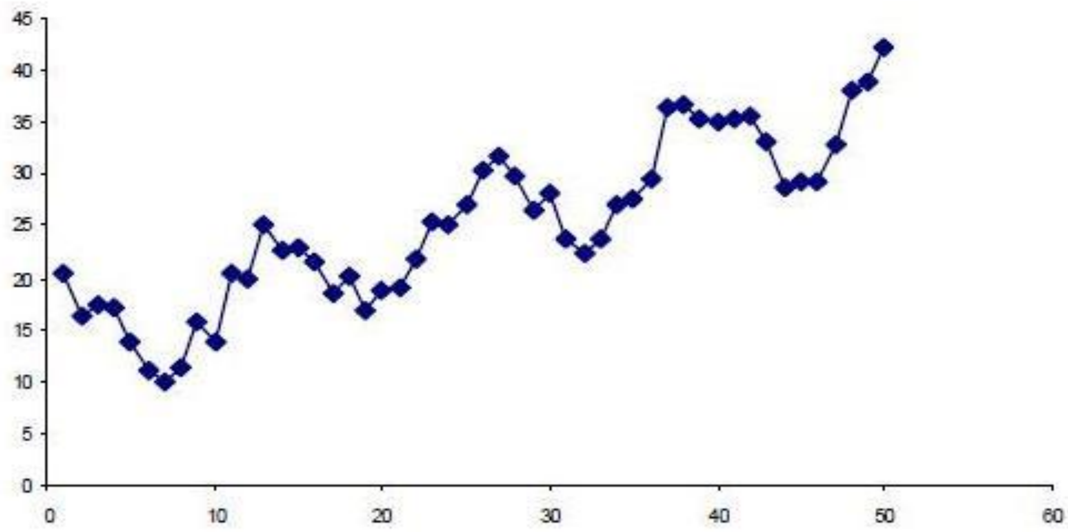
Отражает колебания показателя с определенным периодом

Три составляющие временного ряда

Долговременна
я
тенденция **T**

Случайная
компонента
E

Периодические
(циклические или
сезонные)
колебания **S**



Модели временного ряда:

1) аддитивная $$Y_t = T_t + S_t + E_t$$

2) мультипликативная $$Y_t = T_t \times S_t \times E_t$$

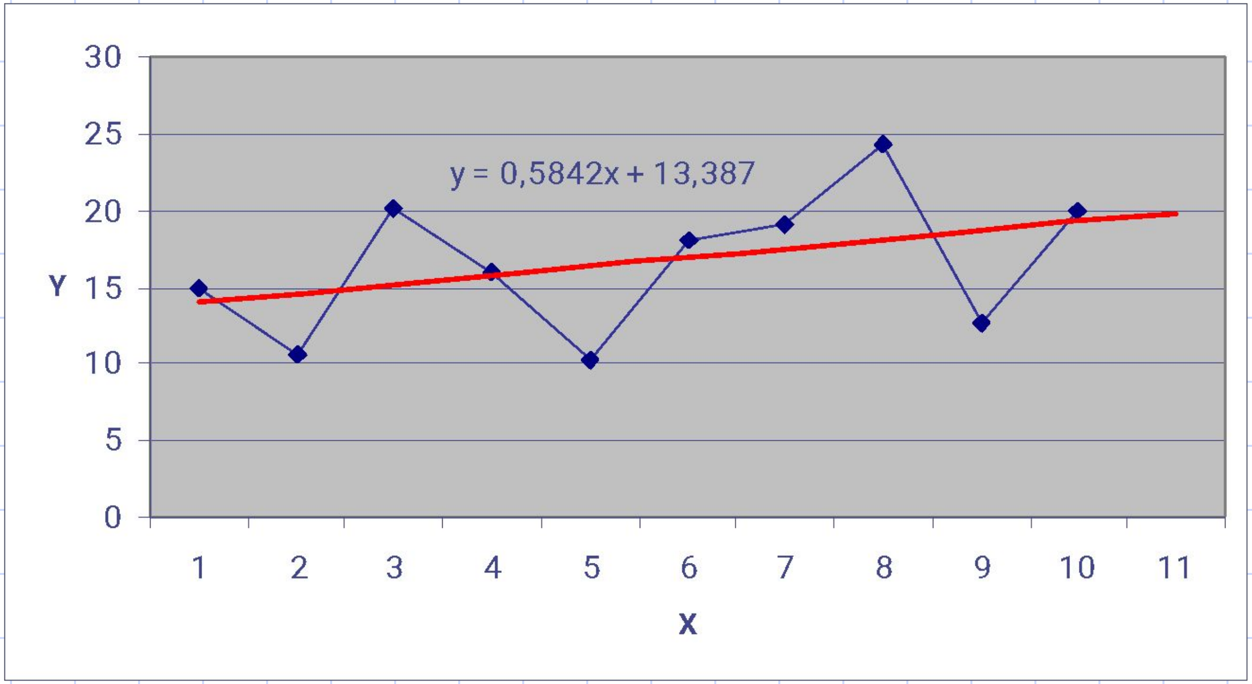
3) смешанная $$Y_t = T_t \times S_t + E_t$$

Основная задача эконометрического исследования временного ряда:

выявление и количественное выражение его компонент (тенденции, периодичности, случайной компоненты)

в целях их использования для прогнозирования будущих значений ряда.

Определение тенденции: метод аналитического выравнивания



Тенденцию (тренд) определяет линия, проходящая максимально близко к точкам временного ряда

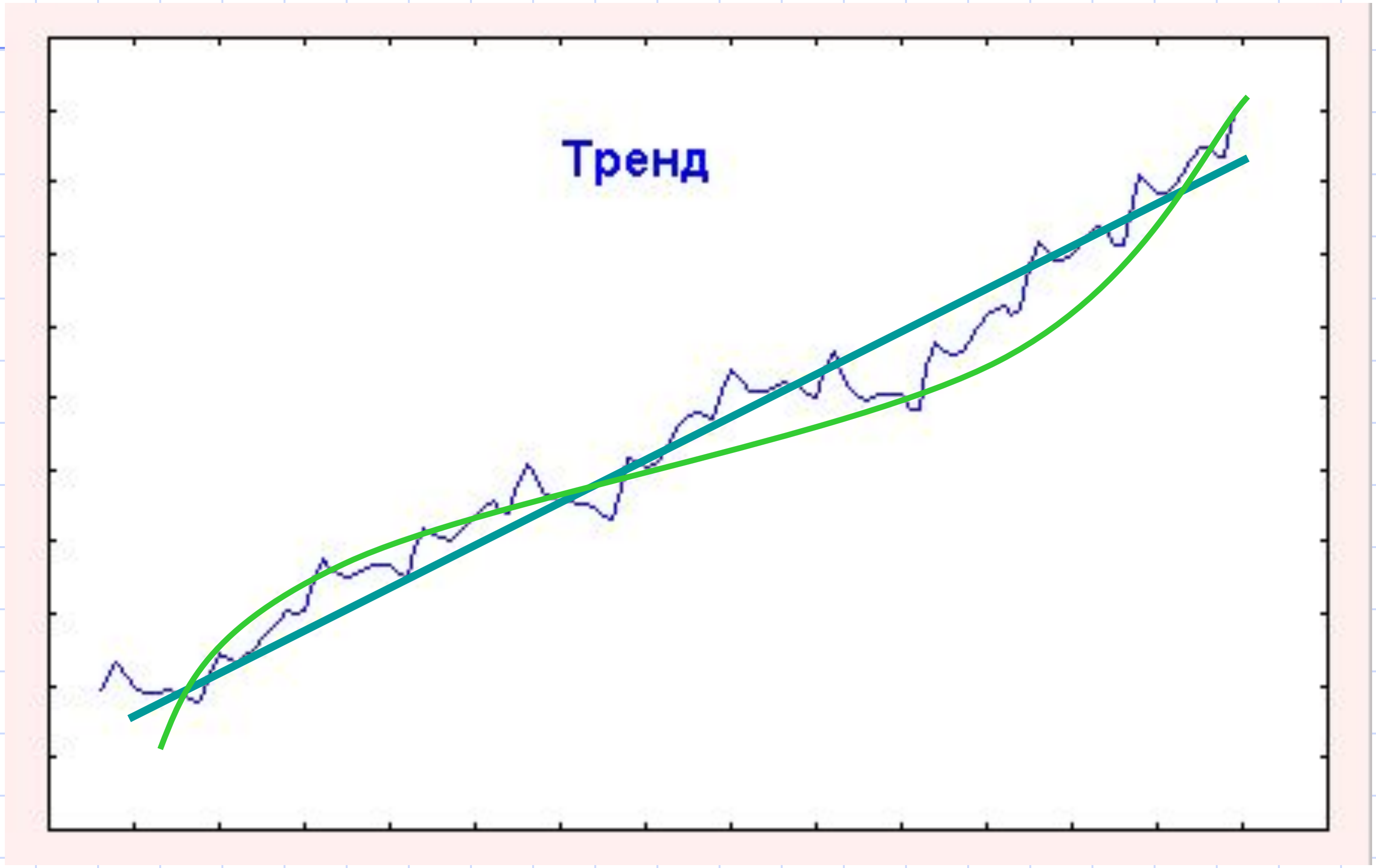
Типовые функции трендов

- Линейная $$y(x) = a * x + b$$
- Степенная $$y(x) = a * x^b$$
- Показательная $$y(x) = a * b^x$$
- Экспоненциальная $$y(x) = a * e^{bx}$$
- Гиперболическая $$y(x) = a + b / x$$
- Логарифмическая $$y(x) = a + b * \lg(x)$$

Для определения вида тенденции применяются следующие методы:

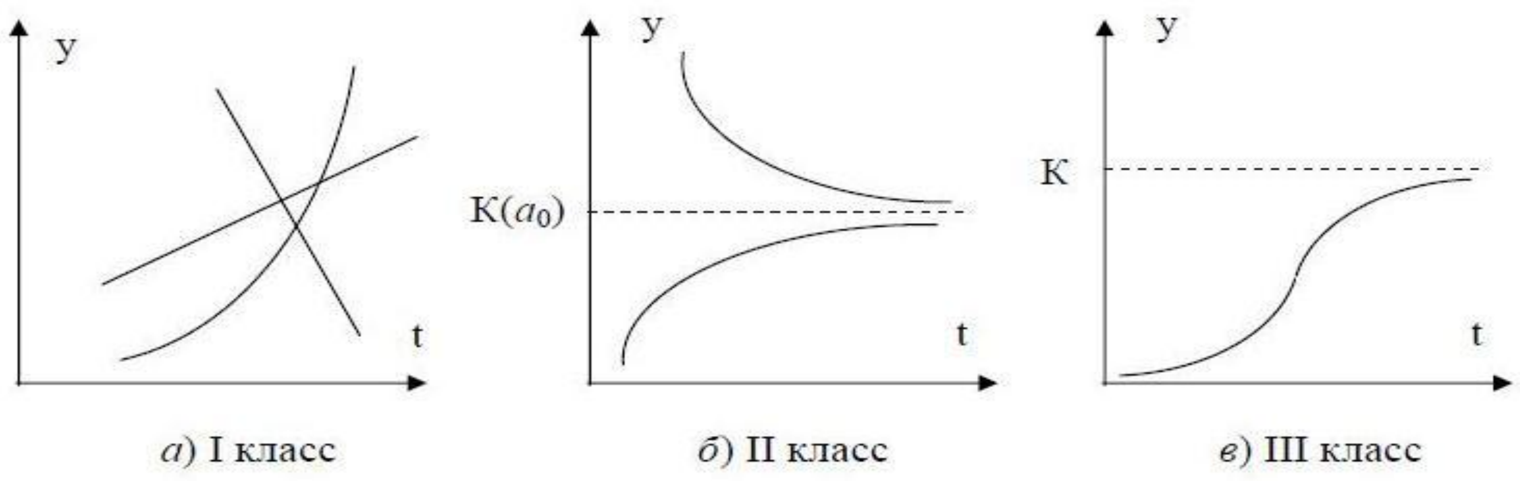
- *качественный анализ изучаемого процесса;*
- *построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени;*
- *расчет и анализ показателей динамики временного ряда (абсолютные приросты, темпы роста и др.);*
- *метод перебора, при котором строятся тренды различного вида с последующим выбором наилучшего на основании значения скорректированного коэффициента детерминации.*

Различные виды тренда



Какую линию следует использовать?

Выбор вида тенденции на основе качественного анализа



Процессы с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста

Функции:

✔линейная,
✔параболическая,
✔экспоненциальная,
✔степенная.

Процессы, имеющие предел роста (падения), так называемые процессы с «насыщением»

Функции:

✔гиперболическая,
✔модифицированная экспонента.

S-образные процессы

Функция:

✔логистическая.

$$y_t = \frac{K}{1 + a_0 e^{-bt}}$$

Метод скользящего среднего

Позволяет сгладить случайные и периодические колебания и выявить тенденцию

1. Определить длину интервала сглаживания. Чем он больше, тем в большей степени поглащаются колебания (***l***)

2. Весь ряд данных разбивается на участки длиной ***l***, при этом он скользит по ряду с шагом 1

3. Рассчитать средние каждого участка

4. Фактические значения стоящие в центре каждого участка заменяют на соответствующие средние (удобно брать длину интервала сглаживания нечетной)

При сглаживании ряд становится «короче» на (*l*-1) значение

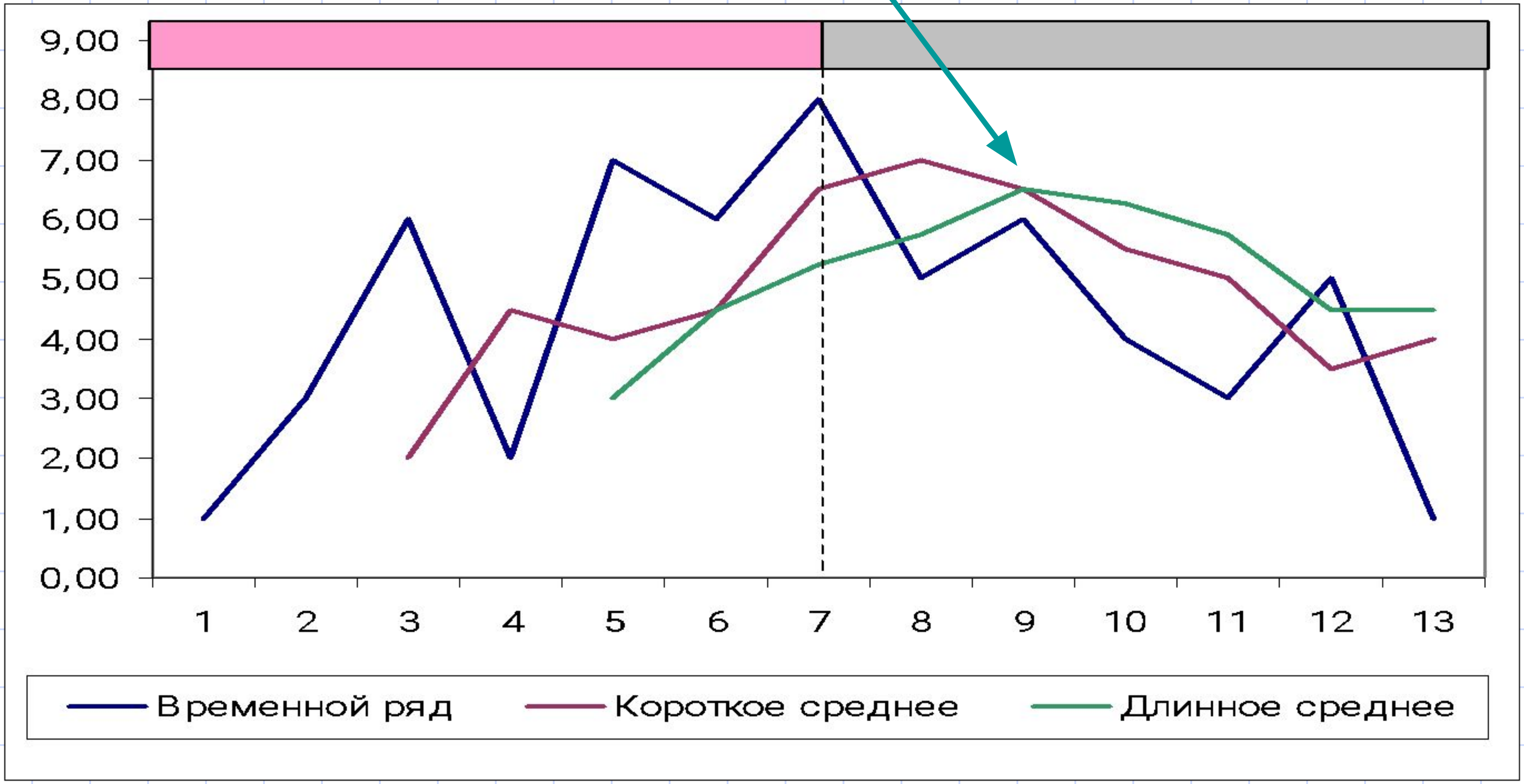
Чем больше *l*, тем сильнее сглаживается ряд

Выявление смены тенденции

Область роста
Короткое среднее располагается выше длинного

Индикатор смены тенденции

Область спада
Короткое среднее располагается ниже длинного



Автокорреляция уровней временного ряда –

это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Измеряется с помощью *линейного коэффициента корреляции* между уровнями исходного временного ряда и уровнями ряда, сдвинутыми на несколько шагов назад во времени:

$$r_\tau = \frac{\sum\limits_{t=\tau+1}^{n}(y_t - \bar{y}_{1\tau})\cdot(y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})}{\sqrt{\sum\limits_{t=\tau+1}^{n}(y_t - \bar{y}_{1\tau})^2 \cdot \sum\limits_{t=\tau+1}^{n}(y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})^2}}$$

$$\bar{y}_{1\tau} = \frac{\sum\limits_{t=\tau+1}^{n} y_t}{n-\tau} \qquad \bar{y}_{2\tau} = \frac{\sum\limits_{t=\tau+1}^{n} y_{t-\tau}}{n-\tau}$$

τ – величина сдвига во времени, или лаг

Например, лаг τ=1 означает, что ряд сдвинут на один период (момент) назад и т.д. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается.

τ=1 =>

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)\cdot(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n}(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}$$

τ=2 =>

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)\cdot(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}$$

Свойства коэффициента автокорреляции:

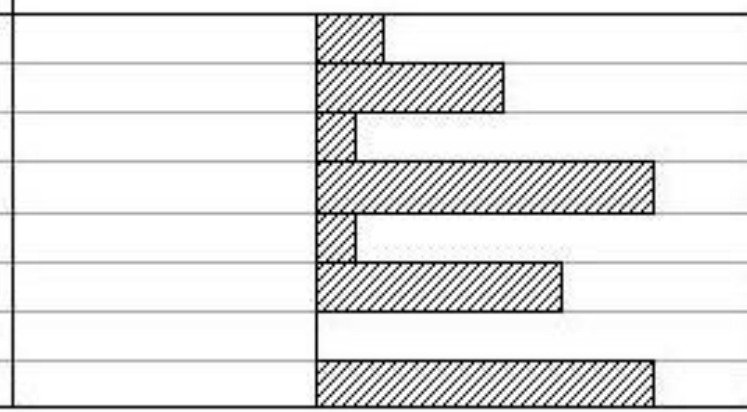
- характеризует *тесноту только линейной связи* текущего и предыдущего уровней ряда, поэтому по данному коэффициенту можно судить о наличии линейной или близкой к линейной тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию, коэффициент автокорреляции может приближаться к нулю;
- по *знаку* коэффициента автокорреляции нельзя судить о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда.

Автокорреляционная функция временного ряда (АКФ) *– это последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и т.д. порядков.*

Коррелограмма – *это график зависимости значений АКФ от величины лага.*

Коррелограмма временного ряда потребления электроэнергии

Лаг (квартал)	Коэффициент автокорреляции уровней	Коррелограмма
1	0,165154	
2	0,566873	
3	0,113558	
4	0,983025	
5	0,118711	
6	0,722046	
7	0,003367	
8	0,973848	



Анализ автокорреляционной функции

Если максимальный коэффициент автокорреляции оказался **1-го порядка**, то исследуемый ряд содержит **только тенденцию**

Если максимальным оказался **коэффициент автокорреляции порядка t**, то ряд **содержит колебания** с периодичностью в t моментов времени

Если **ни один** не является значимым – ряд не содержит тенденции и нет циклической компоненты. Ряд формируется под воздействием случайных факторов (можно провести дополнительный анализ на наличие нелинейной тенденции)

Моделирование периодических колебаний

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T, S, E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие этапы:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений периодической компоненты S.
3. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных *(T+E)* в аддитивной или *(T•E)* в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений *T* с использованием полученного уравнения тренда.
5. Расчет полученных по модели значений *(T+S)* или *(T•S)*.
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Корректировочный коэффициент для сезонной компоненты

Должно выполняться условие:

Для аддитивной модели: ***Для мультипликативной модели:***

$$\sum \bar{S}_i = 0$$

$$\sum \bar{S}_i = \tau$$

Если условие не выполняется, то вводится корректировочный коэффициент:

$$k = \frac{\sum \bar{S}_i}{\tau}$$

$$k = \frac{\tau}{\sum \bar{S}_i}$$

Корректировка сезонной компоненты:

$$S_i = \bar{S}_i - k$$

$$S_i = \bar{S}_i \cdot k$$

Для оценки качества построенной модели используют сумму квадратов ошибок (случайной компоненты):

$$(1-\frac{\sum E^2}{\sum (y-\overline{y})^2})\cdot 100$$

коэффициент показывает долю вариации результативного признака, которая объясняется построенной моделью

1 этап. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней

Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

Кварталы	Потребление эл/энергии	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6=2-5*
1	6,0				
2	4,4	24,4	6,10		
3	5,0	25,6	6,40	6,250	-1,250
4	9,0	26,0	6,50	6,450	2,550
5	7,2	27,0	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28,0	7,00	6,875	-2,075
7	6,0	28,8	7,20	7,100	-1,100
8	10,0	29,6	7,40	7,300	2,700
9	8,0	30,0	7,50	7,450	0,550
10	5,6	21,0	7,75	7,625	-2,025
11	6,4	32,0	8,00	7,875	-1,475
12	11,0	33,0	8,25	8,125	2,875
13	9,0	33,6	8,40	8,325	0,675
14	6,6	33,4	8,35	8,375	-1,775
15	7,0				
16	10,8				

2 этап. Расчет значений периодической компоненты S

Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатель	Год	Кварталы			
		1	2	3	4
	1ый	-	-	-1,250	2,550
	2ой	0,575	-2,075	1,100	2,700
	3ий	0,550	-2,025	-1,475	2,875
	4ый	0,675	-1,775	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)	x	1,800	-5,875	-3,825	8,125
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\bar{S}_i$	x	0,600	-1,958	-1,275	2,708
Скорректированная сезонная компонента, S_i	x	0,581	-1,977	-1,294	2,690

3 этап. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных *(T+E)*

Расчет выравненных значений T и E в аддитивной модели

t	*y*	*S*	*T+E=y-S*	*T*	*T+S*	*E=y-(T+S)*	E^2
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	6,0	0,581	5,914	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5,0	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9,0	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6,0	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10,0	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8,0	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,030	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11,0	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9,0	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

4 этап. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений *T* с использованием полученного уравнения тренда

$$T = 5{,}715 + 0{,}186t$$