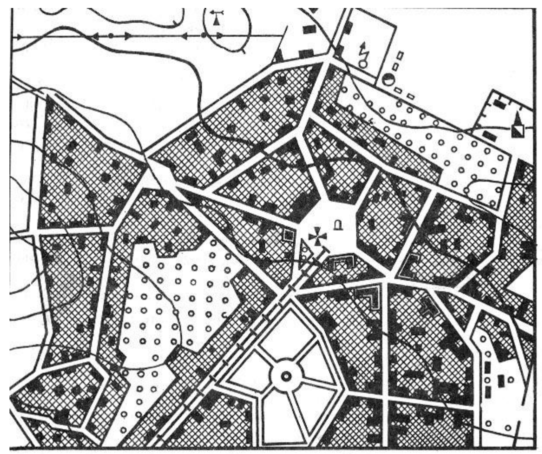
# ПОДОБИЕ В ГЕОМЕТРИИ

## ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

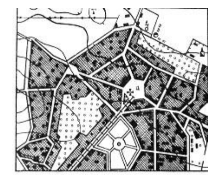
# Подобные фигуры

Предметы одинаковой формы, но разных размеров

Здание и его макет

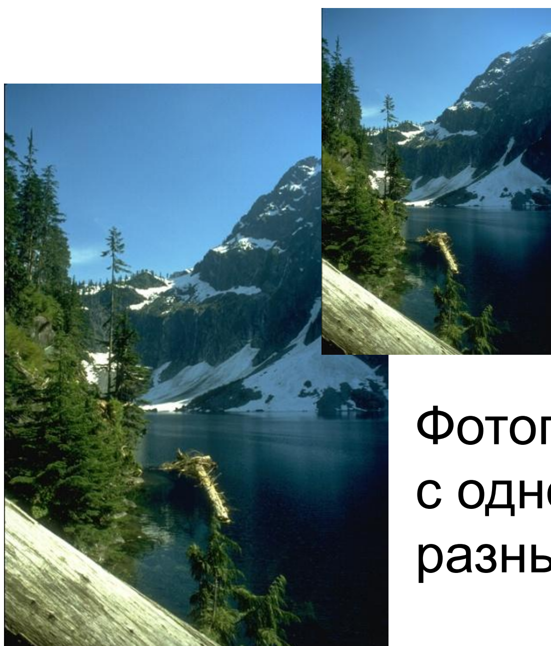


1 : 10 000



1 : 25 000

Планы, географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах.

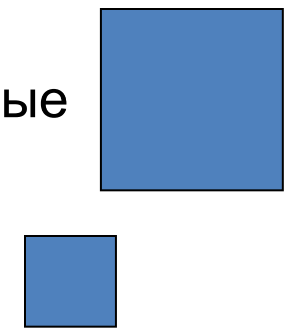


Фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями;

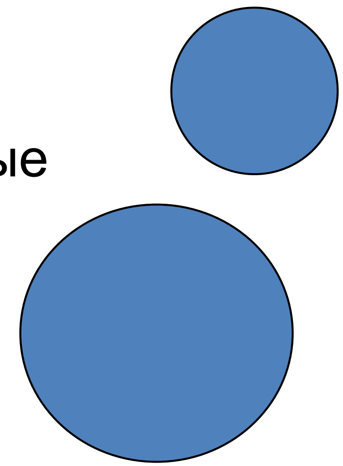
# Подобные фигуры

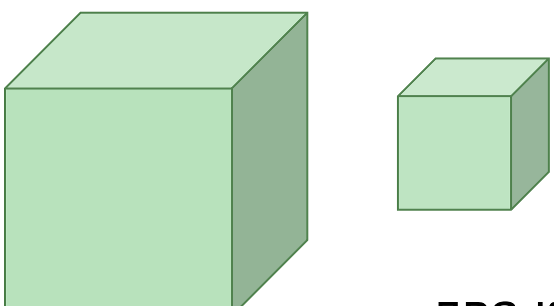
- В геометрии фигуры одинаковой формы называют *подобными* фигурами

Подобными являются любые два квадрата

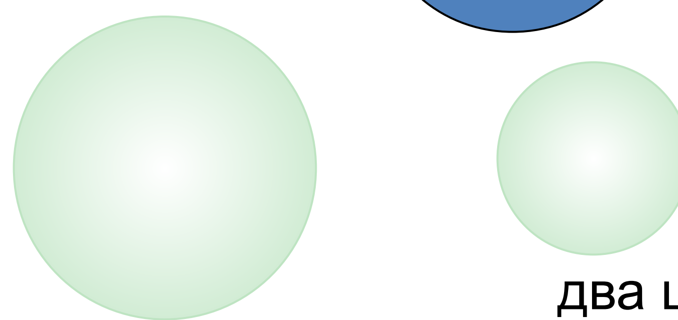


Подобными являются любые два круга





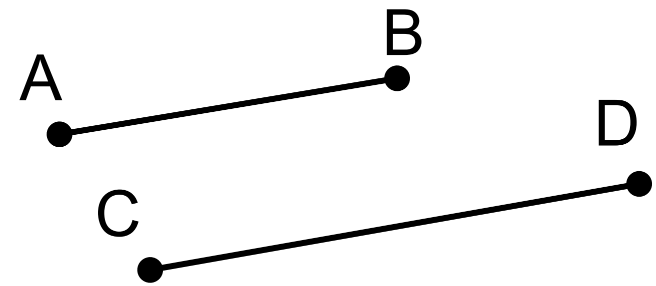
два куба



два шара

# Пропорциональные отрезки

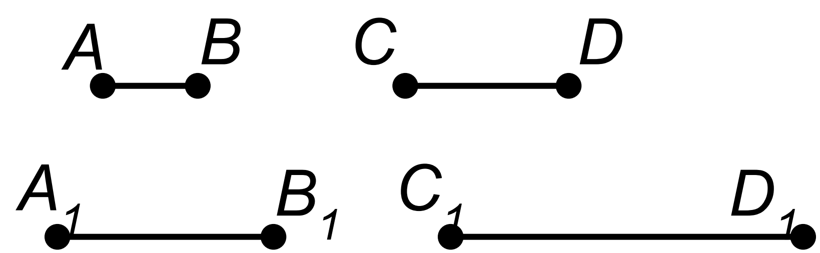
- Отношением отрезков называется отношение их длин.




$$\frac{AB}{CD}$$

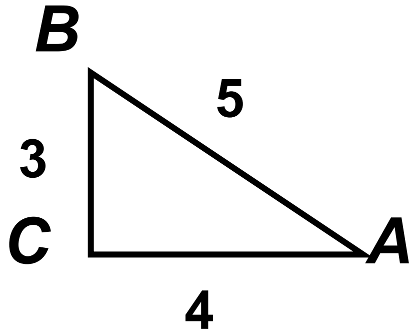
- Отрезки *AB* и *CD* *пропорциональны* отрезкам $A_1B_1$ и $C_1D_1$, если

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

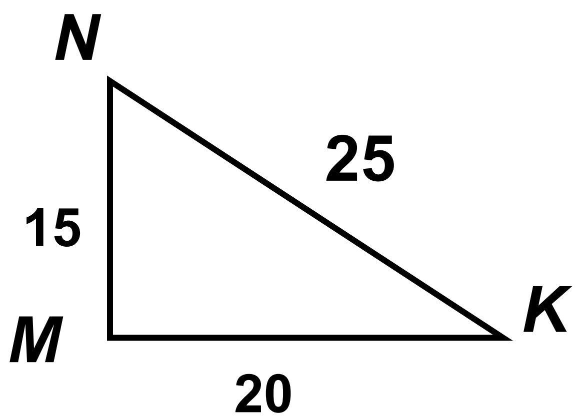


# Пропорциональность отрезков

- Понятие пропорциональности вводится для любого числа отрезков.



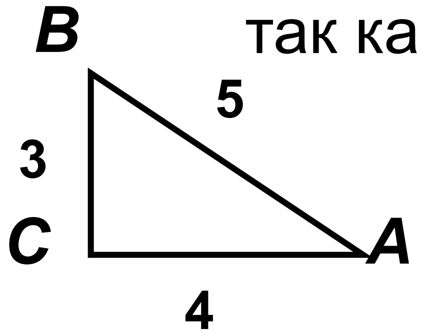

например




$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{AB}{NK}$$

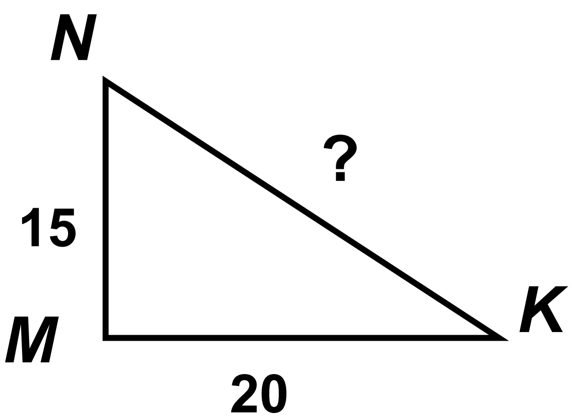
# ПРИМЕР

- Даны два прямоугольных треугольника




Стороны BC и CA пропорциональны MN и MK, так как

$$\frac{BC}{MN} = \frac{3}{15} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{MK} = \frac{4}{20}$$




т.е. $$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{1}{5}$$

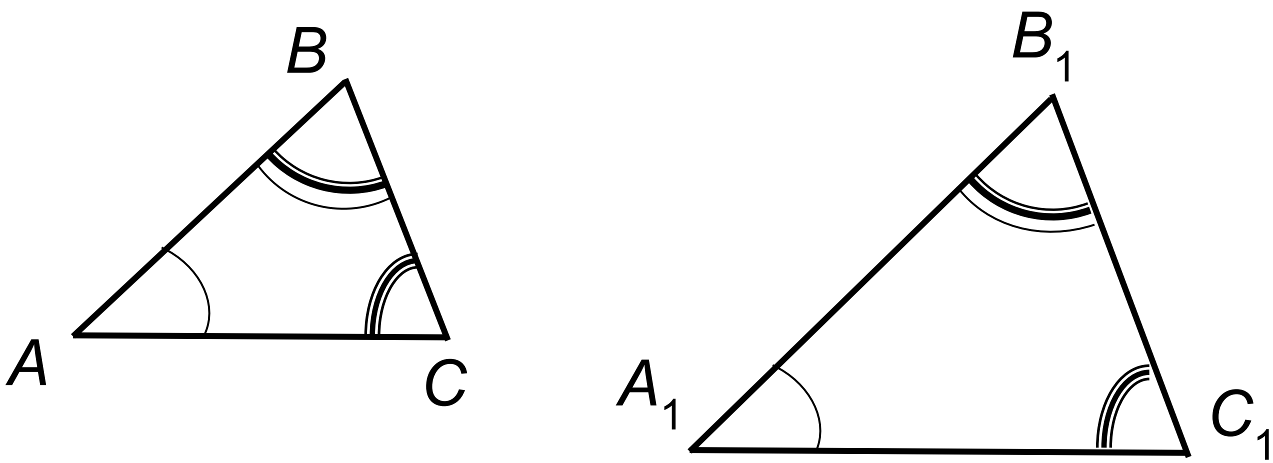
НАЙДИТЕ ГИПОТЕНУЗУ БОЛЬШЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

# Подобные треугольники

- Даны два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$,

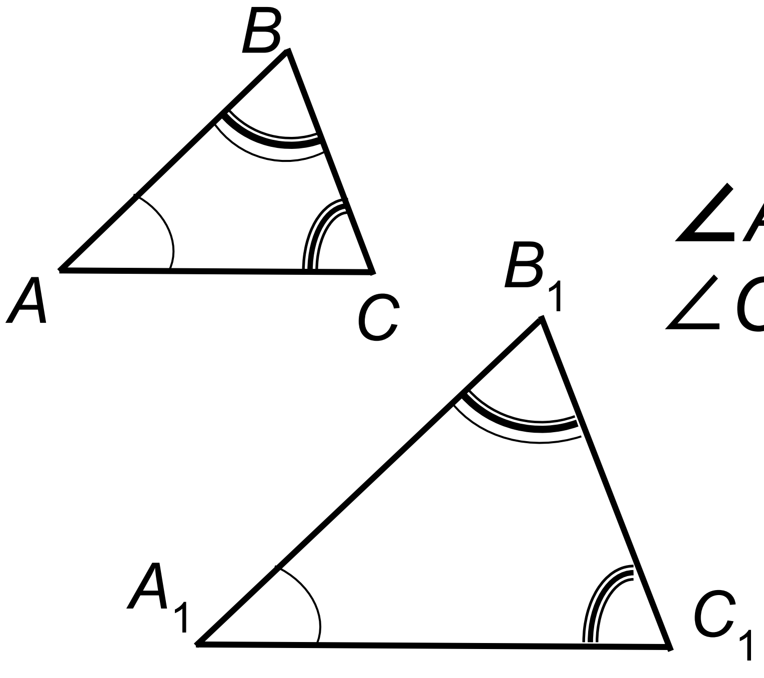
у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны $AB$ и $A_1B_1$, $AC$ и $A_1C_1$, $BC$ и $B_1C_1$, лежащие против равных углов, называют *сходственными*



# Определение

- Два треугольника называются *подобными,* если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



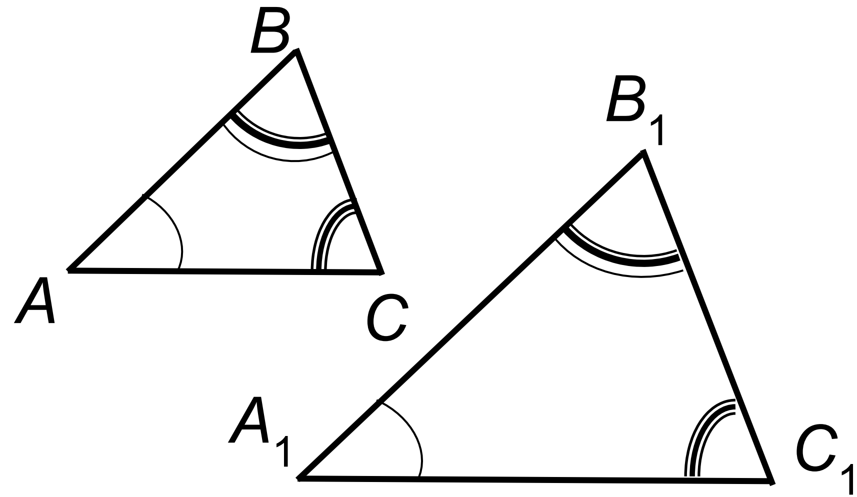

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

# Коэффициент подобия

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$




$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

*k – коэффициент подобия*.

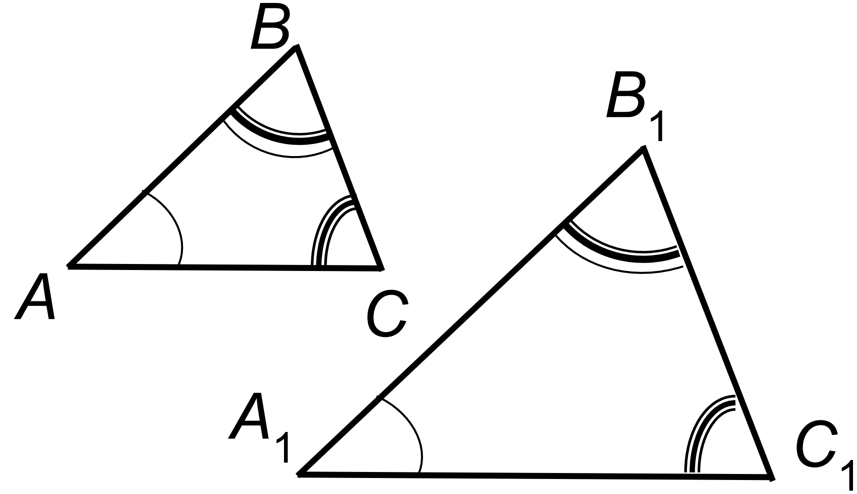
- Число *k* , равное отношению сходственных сторон, называется *коэффициентом подобия*.

# Дополнительные свойства

- Отношение *высот* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*
- Отношение *медиан* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*
- Отношение *биссектрис* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*

# Отношение периметров

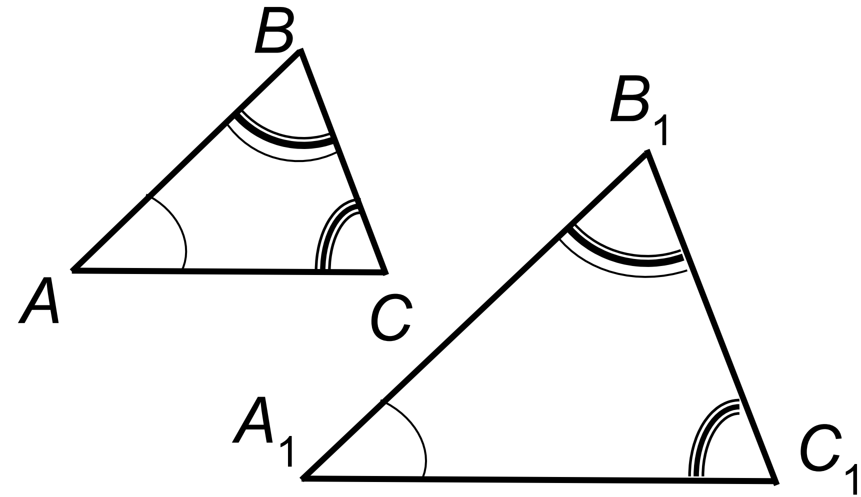
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$




- **Отношение периметров подобных треугольников равно *коэффициенту подобия*.**

# Отношение площадей

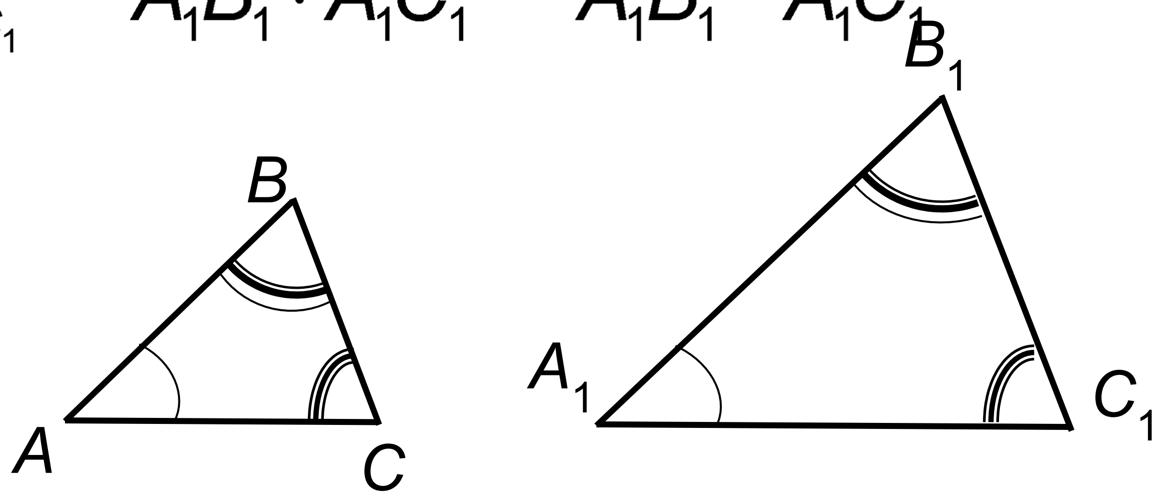
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$




- **Отношение площадей подобных треугольников равно *квадрату коэффициента подобия*.**

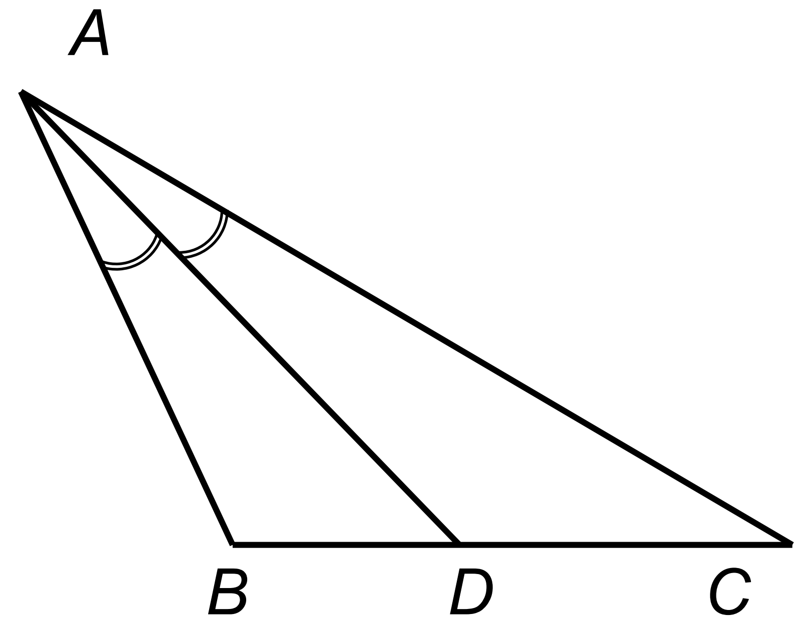
# Отношение площадей

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$



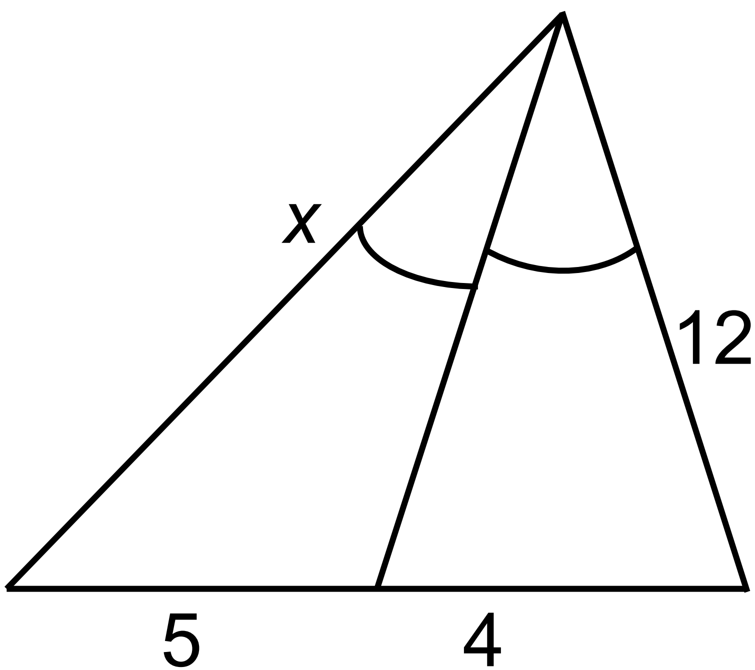
# Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.




$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

# задача




- По данным на рисунке найдите *x*.

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{4}$$

***x* = 15**

# задача

- Отношение площадей двух квадратов равно 9 : 1.
- Найдите сторону большего их них, если сторона меньшего равна 2.

$k^2 = 9$, $k = 3$

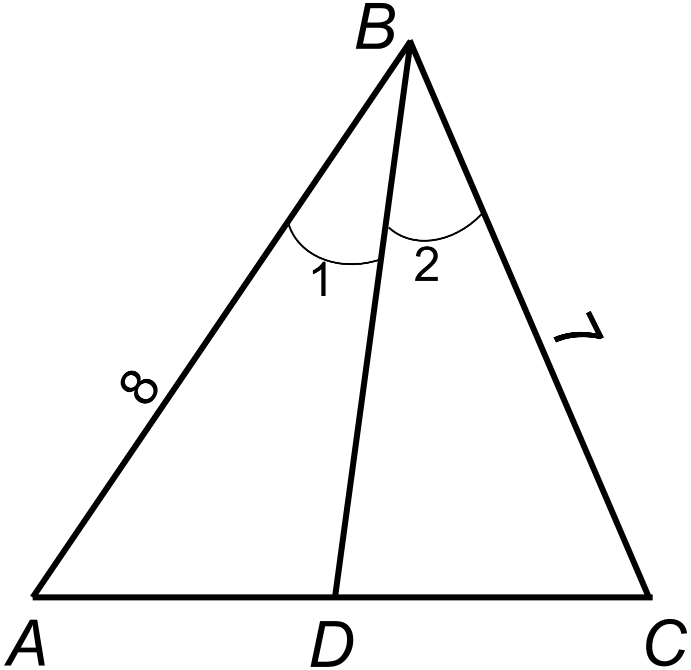
Коэффициент подобия

$3 \cdot 2 = 6$

**6**

сторона большего квадрата

# задача




В треугольнике $ABC$

$AC = 6$ см,

$BC = 7$ см,

$AB = 8$ см,

$BD$ – биссектриса.

Найдите, $AD$, $CD$.

# задача

Треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 4 см подобен треугольнику со сторонами 5 мм, 7,5 мм и 1 см.

Найдите коэффициент подобия.

# задача

Сходственные стороны подобных треугольников относятся как 1 : 3. Найдите периметр большего треугольника, если периметр меньшего 15 см.

# задача

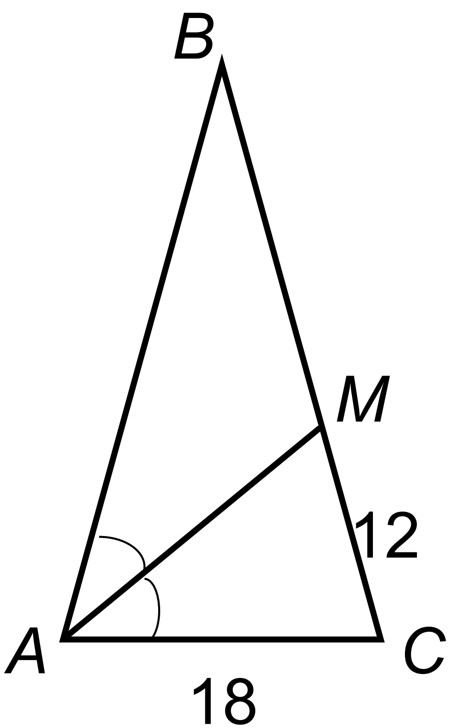
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ,

$AB : A_1B_1 = \mathrm{k} = 4$

$S_{\Delta ABC} = 48$ м$^2$.

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$ .

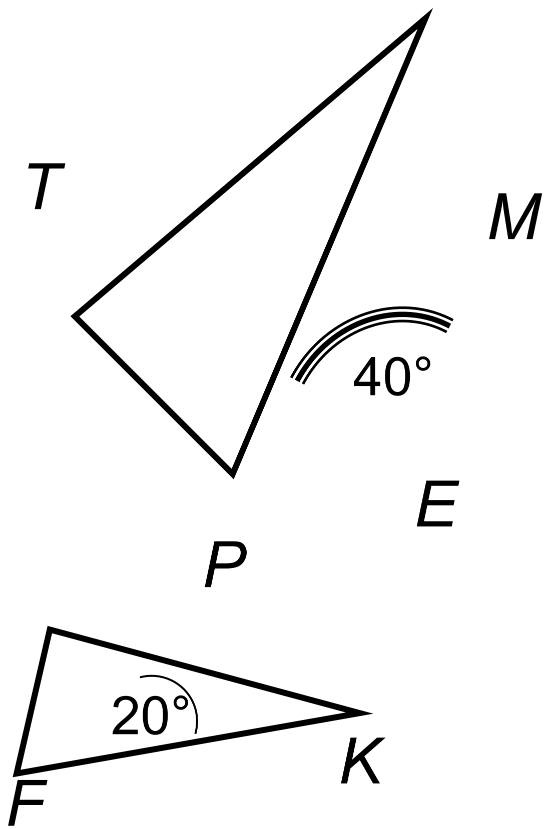
# задача




Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника

# задача

Треугольники *KPF* и *EMT* подобны, причем




$$\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$$

$\angle F$ = 20°, $\angle E$ = 40°.

Найдите остальные углы этих треугольников.

# задача

Периметры подобных треугольников

12 мм и 108 мм соответственно.

Стороны одного из них 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Найдите стороны другого и

определите его вид.

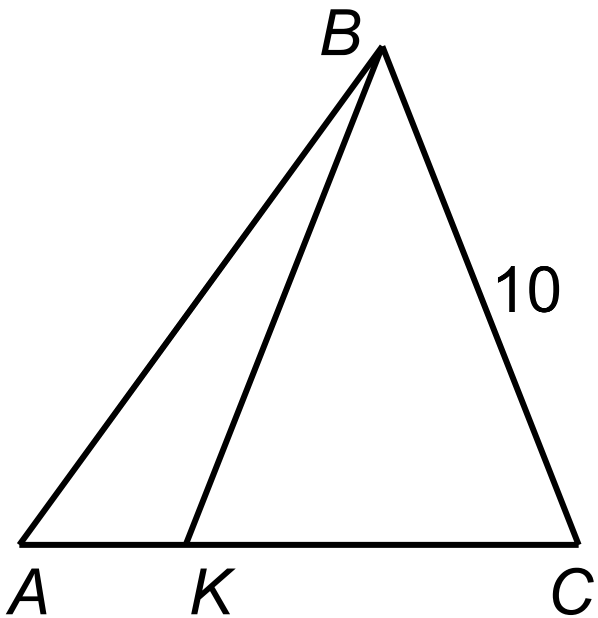
# задача

Площади двух подобных треугольников равны 16 см$^2$ и 25 см$^2$.

Одна из сторон первого треугольника равна 2 см.

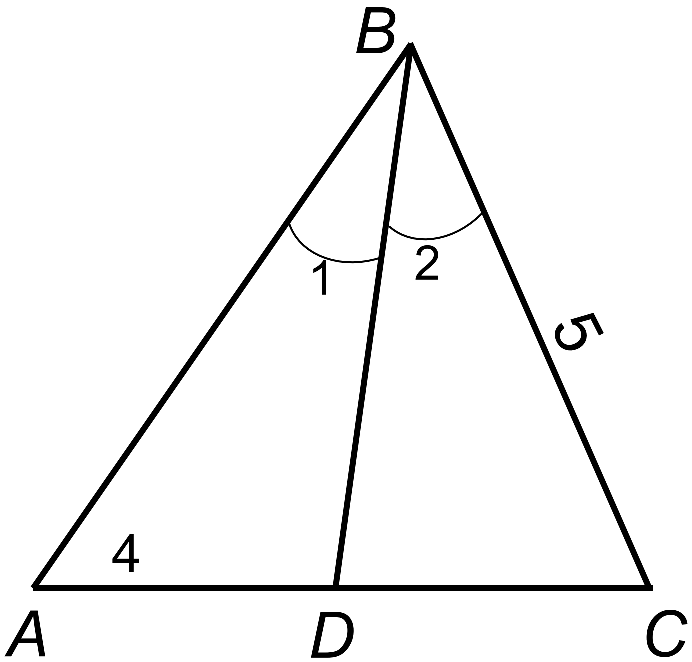
Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

# задача




В треугольнике *ABC* точка *K* лежит на стороне *AC.* Площади треугольников *ABK* и *KBC* относятся как 1 : 3, *BC* = 10 см. Найдите *AC* , если $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$

# задача



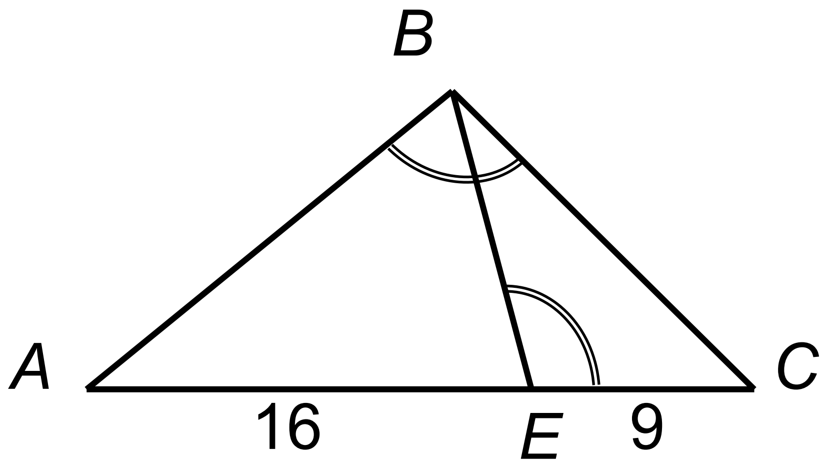

$AD = 4$

$BC = 5$

$AB + DC = 12$

Найти $AB$, $DC$, $AC$

# задача




На рисунке

$\Delta BEC \sim \Delta ABC$,

$AE$ = 16 см,

$CE$ = 9 см. Углы

$ABC$ и $BEC$ тупые.

Найдите $BC$.

# задача

Периметры подобных треугольников

относятся как 2 : 3,

сумма их площадей равна 260 см$^2$.

Найдите площадь каждого

треугольника.

# ЗАДАЧИ

**1.**

Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *BOC* и *AOD* относятся как 1 : 9. Сумма оснований *BC* и *AD* равна 4,8 см. Найдите основания трапеции.

Решение:

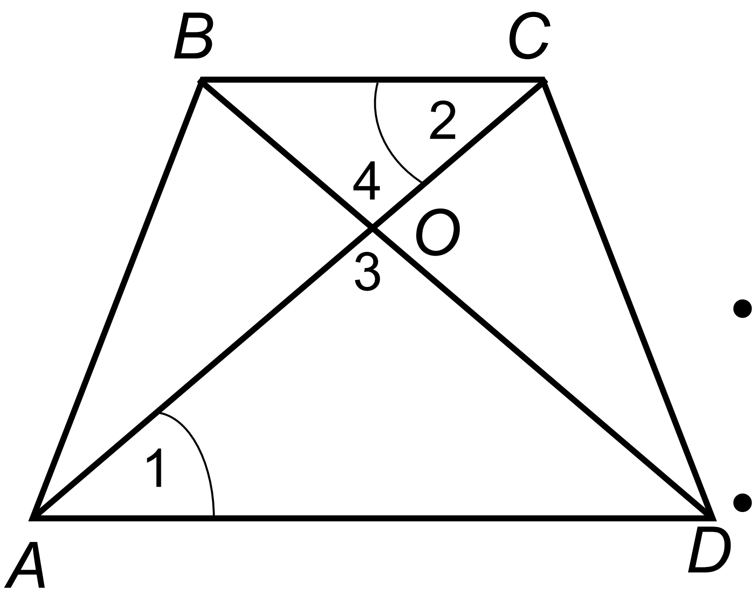
# Решение

- Рассмотрим $\Delta AOD$ и $\Delta BOC$:

$\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$, и секущей $AC$;

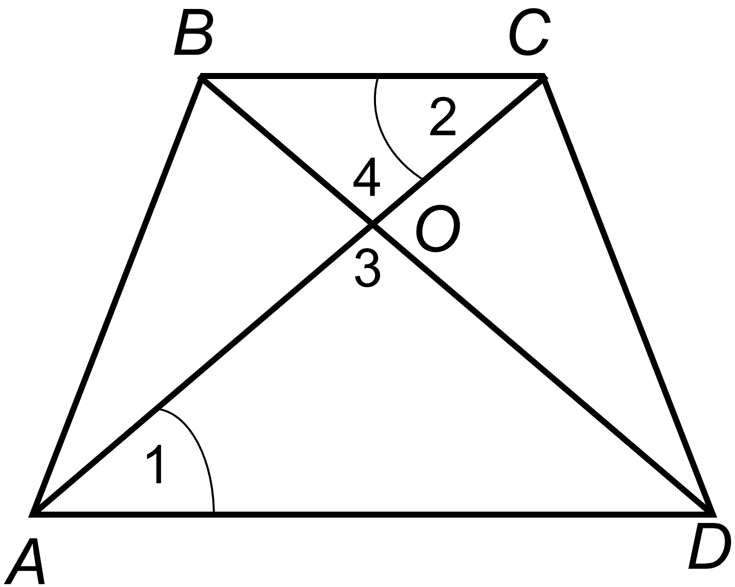
$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные)

- $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ (по двум углам)
-




$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$$

# Решение




- $$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = k^2 = \frac{9}{1}.$$

  k = 3
- *AD* + *BC* =

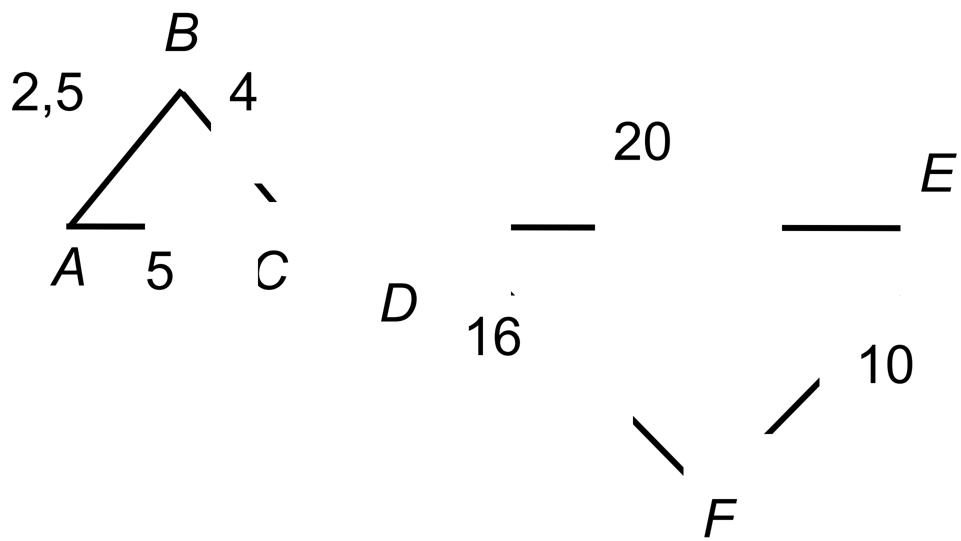
  = 3*BC* + *BC* = 4*BC*

  *AD* + *BC* = 4,8см

  (по условию)
- *BC* = 1,2 см
- *AD* = 3,6 см

Ответ: *BC* = 1,2 см *AD* = 3,6 см

# ЗАДАЧИ

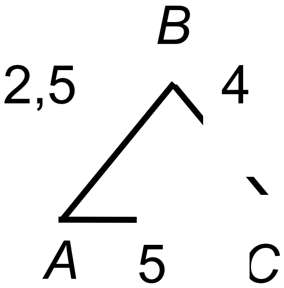


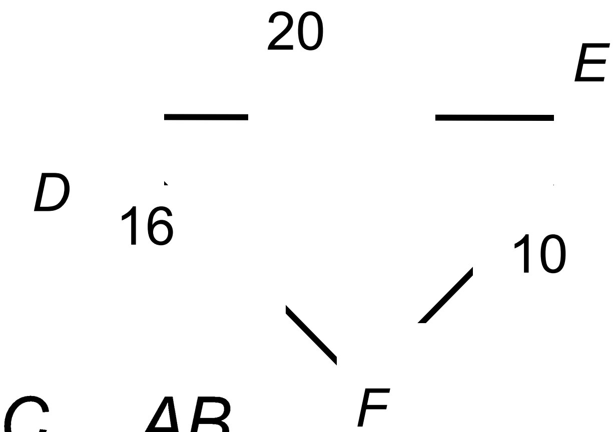

**2.**

Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке, подобны, и выясните взаимное положение прямых *CB* и *DF*.

Решение:

# Решение




- Найдем отношение сходственных сторон данных треугольников

$$\frac{AB}{EF}=\frac{2,5}{10}=0,25$$

$$\frac{AC}{ED}=\frac{5}{20}=0,25$$

$$\frac{BC}{DF}=\frac{4}{16}=0,25$$

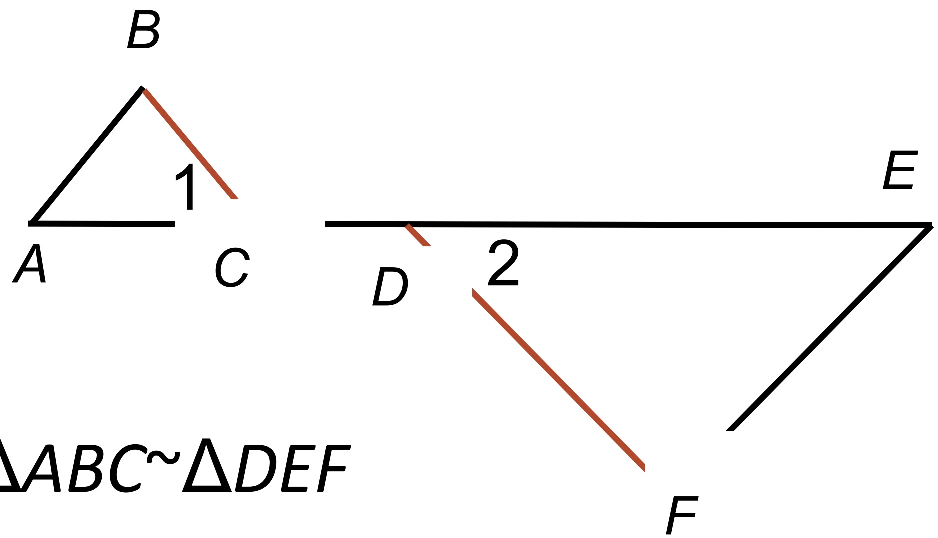
- Отсюда

$$\frac{BC}{DF}=\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{EF}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

по трем пропорциональным сторонам

# Решение




$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Соответственно

$\angle A = \angle E$

$\angle B = \angle F$

$\angle ACB = \angle EDF$

- .

Рассмотрим прямые *BC* и *DF*, секущую *AE*

$\angle 1 = \angle 2$

(внешние накрест лежащие)

*BC* || *DF*.

# ЗАДАЧИ

**3.**

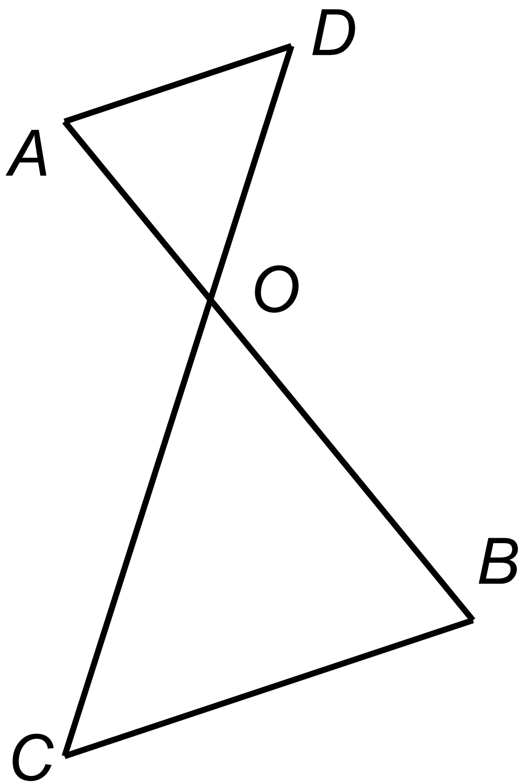
Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются

в точке $O$, причем $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{DO}{OC}$.

Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.

Решение:

# Решение




- Рассмотрим $\Delta AOD$ и $\Delta COB$
- $\angle DOA = \angle COB$ (вертикальные).
- $$\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$$
- $\Delta AOD \sim \Delta COB$ по углу и двум пропорциональным сторонам.
- $\angle CBO = \angle DAO$ *(из подобия)*.

# ЗАДАЧИ

**4.** В треугольнике $ABC$

$AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$.

Точка $E$ лежит на стороне $AB$.

Внутри треугольника взята точка $M$ так,

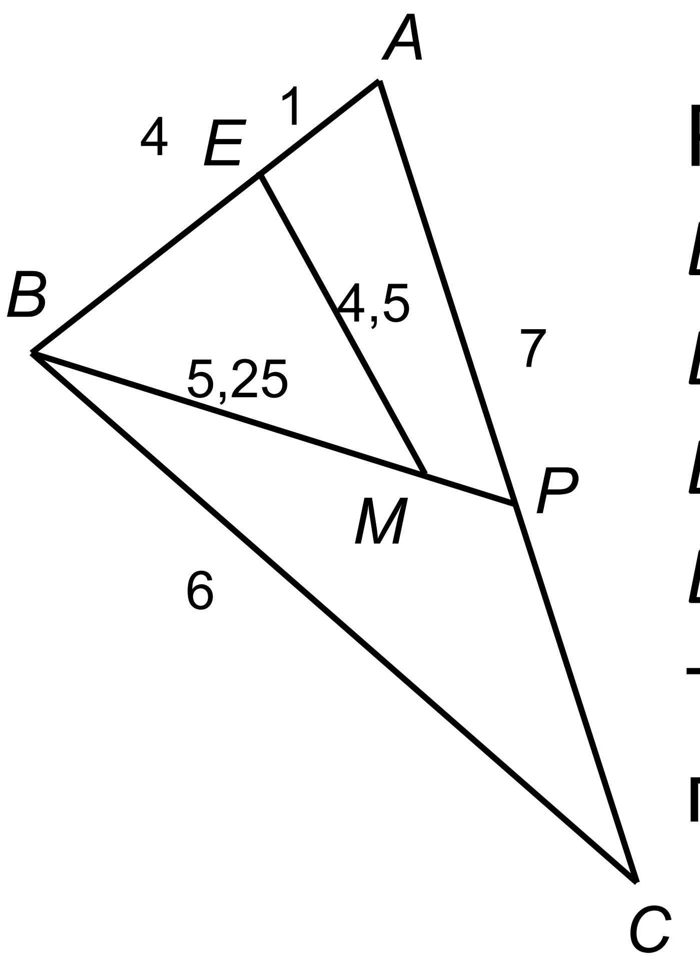
что $MB = 5{,}25$, $ME = 4{,}5$, $AE = 1$.

Прямая $BM$ пересекает $AC$ в точке $P$.

Докажите, что $\Delta APB$ равнобедренный.

Решение:

# Решение




- .

Рассмотрим $\Delta BEM$ и $\Delta ABC$

$BE = AB - AE = 4 – 1 = 3$

$BE : AB = 3 : 4 = 0,75$

$EM : BC = 4,5 : 6 = 0,75$

$BM : AC = 5,25 : 7 = 0,75$,

т.е. стороны треугольников пропорциональны

# Решение

- $\Delta BEM \sim \Delta ABC$ по трем пропорциональным сторонам. Следовательно, $\angle BME = \angle ACB$
  $\angle EBM = \angle BAC$
  $\angle BEM = \angle ABC$.
- Рассмотрим треугольник $ABP$: $\angle EBM = \angle BAC$, т.е. $\angle ABP = \angle BAP$.
  $\Delta ABP$ – равнобедренный, что и требовалось доказать.

# ЗАДАЧИ

**5.**

Диагональ *AC* параллелограмма *ABCD* равна 90.

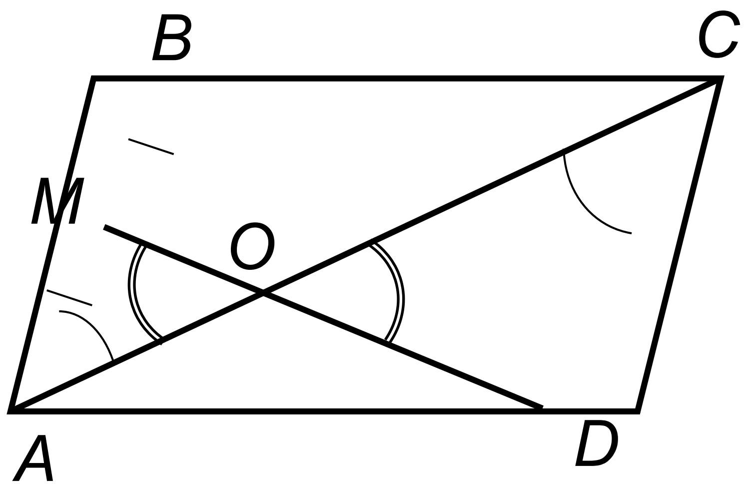
Середина *M* стороны *AB* соединена с вершиной *D.*

Отрезок *MD* пересекает *AC* в точке *O*.

Найдите отрезки *AO* и *CO*.

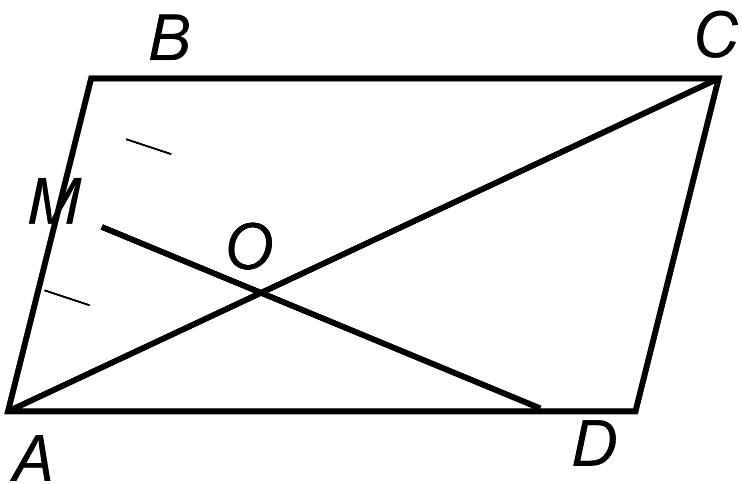
Решение:

# Решение




- Рассмотрим $\Delta AOM$ и $\Delta COD$
  $\angle AOM = \angle COD$ (вертикальные),
  $\angle MAO = \angle OCD$ (накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей $AC$).
  Отсюда $\Delta AOM \sim \Delta COD$ по двум углам.

# Решение




- .

$AM = ½\ AB$ (по условию)

$AB = CD$ ($ABCD$ - параллелограмм),

$AM : CD = 1 : 2$

- $\Delta AOM \sim \Delta COD$

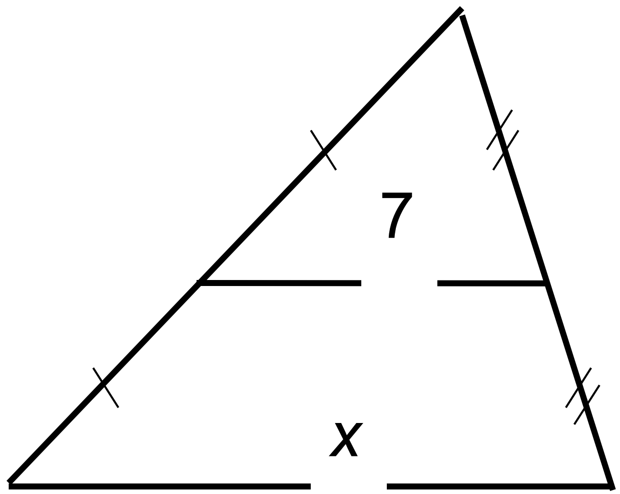
$$\frac{AO}{OC} = \frac{OM}{OD} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$$

т.е. $AO = 0{,}5CO$

- $AO = ⅓AC = ⅓\cdot 90 = 30$

$CO = ⅔AC = ⅔\cdot 90 = 60$

# ТЕСТ




**1.** По данным рисунка *x* равен

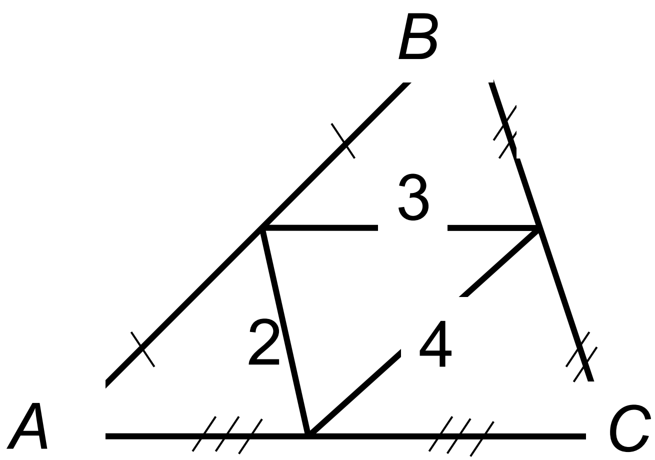
А) 7

Б) 14

В) 3,5

Г) 14/3

# ТЕСТ




2) По данным рисунка периметр $\Delta ABC$ равен

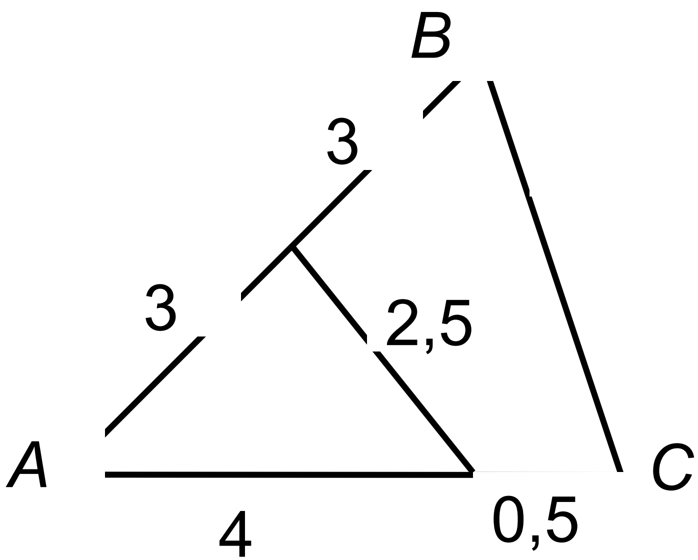
А) 9

Б) 27

В) 36

Г) 18

# ТЕСТ




3) По данным рисунка отрезок *BC* равен

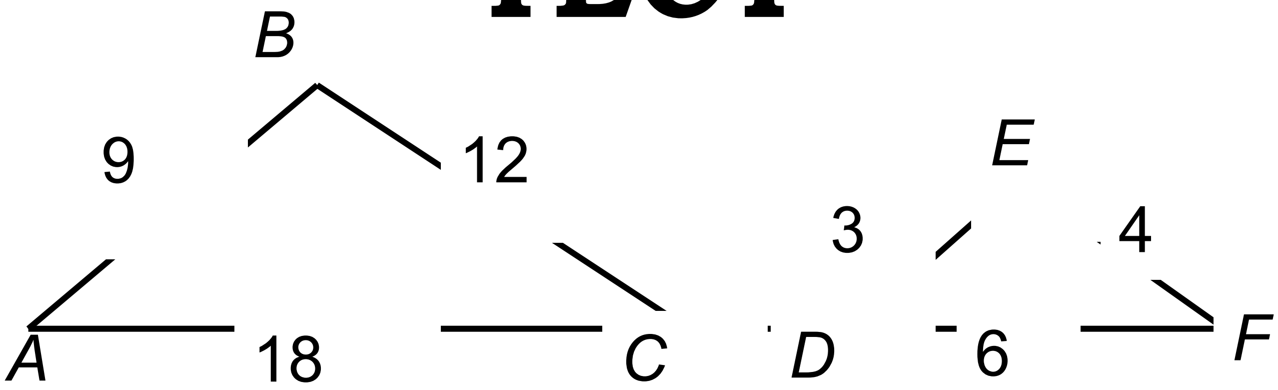
А) 3,75

Б) 7,5

В) 5

Г) 4,5

# ТЕСТ




4) По данным рисунка площади данных треугольников относятся

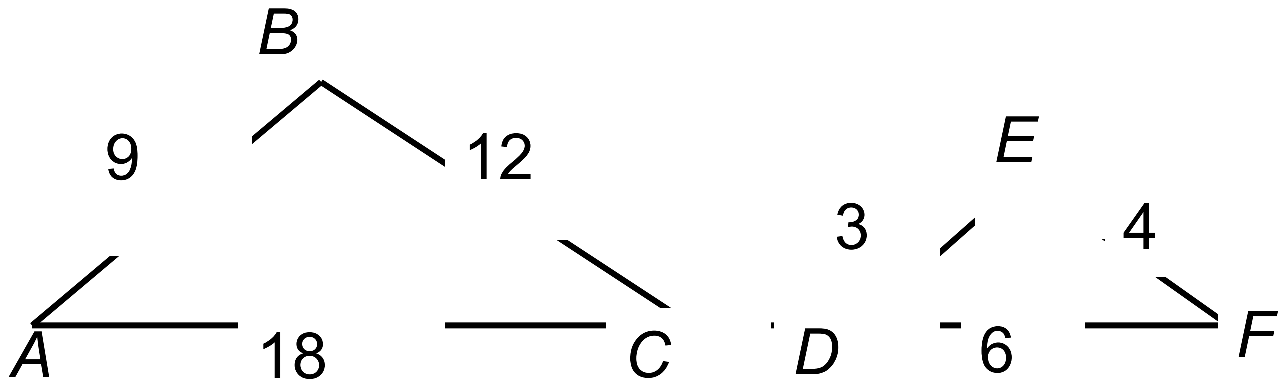
А) 3 : 1

Б) 9 : 1

В) 6 : 1

Г) 9 : 4

# ТЕСТ




5) По данным рисунка прямые *AB* и *DE*

А) нельзя ответить

Б) пересекаются

В) параллельны