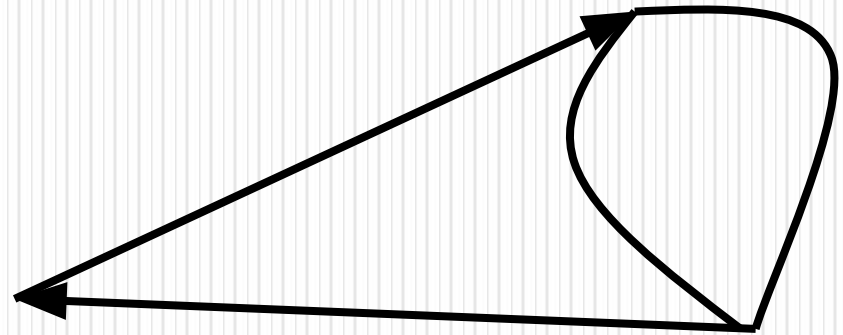
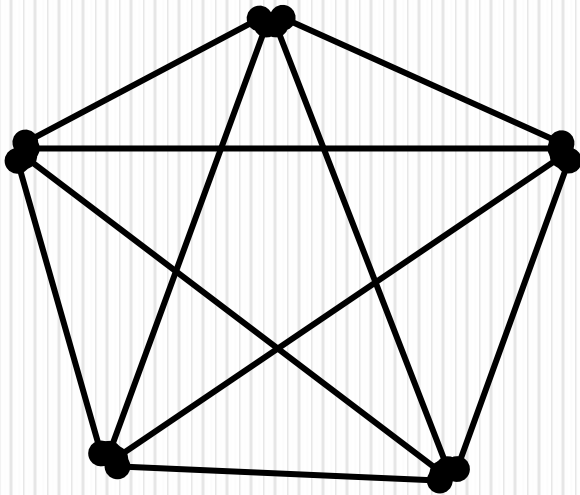


Графы. Элементы графов. Виды графов и операции над ними



ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- *Сведения из истории графов. Граф и его элементы.*
- *Пути и маршруты в графах*
- *Связные графы. Деревья*
- *Операции над графами.*

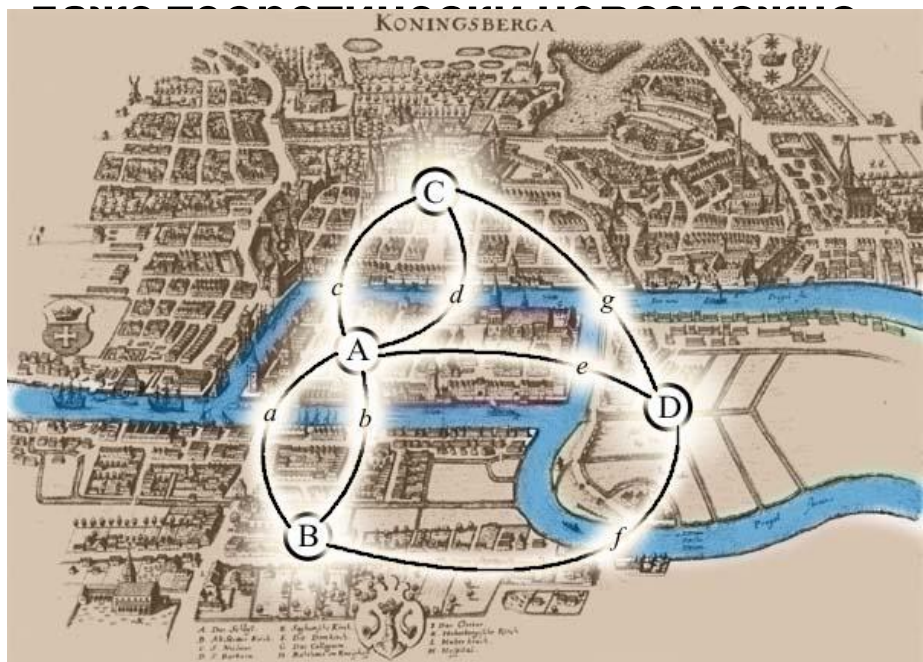
- **Теория графов** представляет собой раздел математики, имеющий широкие практические приложения.
- **Теория графов** – область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов.

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАФОВ



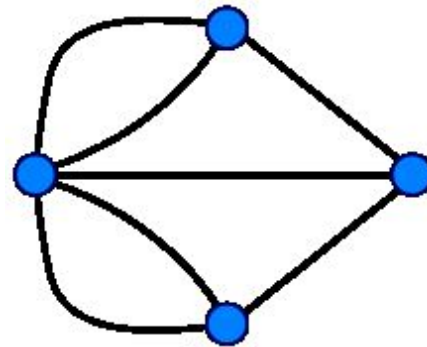
- Впервые основы теории графов появились в работах **Леонарда Эйлера** (1707-1783; *швейцарский, немецкий и российский математик*) , в которых он описывал решение головоломок и математических развлекательных задач.
- Теория графов началась с решения Эйлером **задачи о семи мостах Кёнигсберга.**

Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: **как пройти по всем мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды?** Многие пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Но никому это не удавалось, однако не удавалось и доказать, что это



На упрощённой схеме части города (графе) мостам соответствуют линии (дуги графа), а частям города — точки соединения линий (вершины графа).

В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам: **Невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.**



ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАФОВ

Термин "*граф*" впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в **1936** г., хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру.



В основе теории лежит понятие графа.

Граф - совокупность конечного числа точек, называемых **вершинами графа**, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых **ребрами** или **дугами графа**. Иногда граф в целом можно обозначать одной заглавной буквой.

Графом $G = \langle V, X \rangle$ называется пара двух конечных множеств: **множество точек V** и **множество линий X (ребер, дуг)**, соединяющих некоторые пары точек.

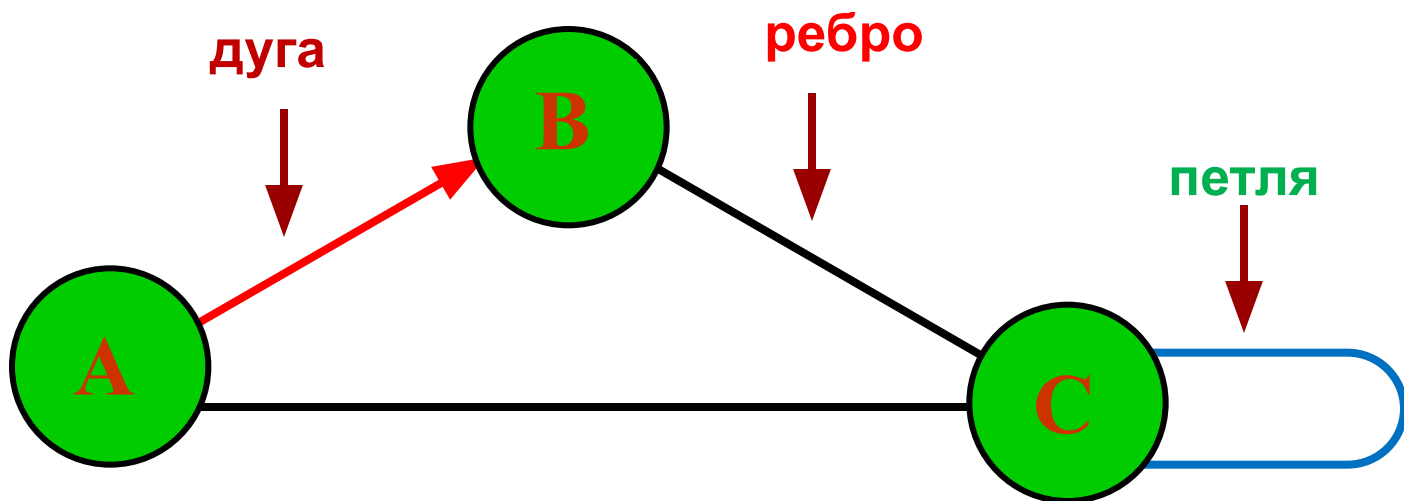
СОСТАВ ГРАФА

Граф состоит из вершин, связанных линиями. Вершины графа обозначают латинскими буквами А, В, С, D или цифрами.

Направленная линия (со стрелкой) называется дугой.

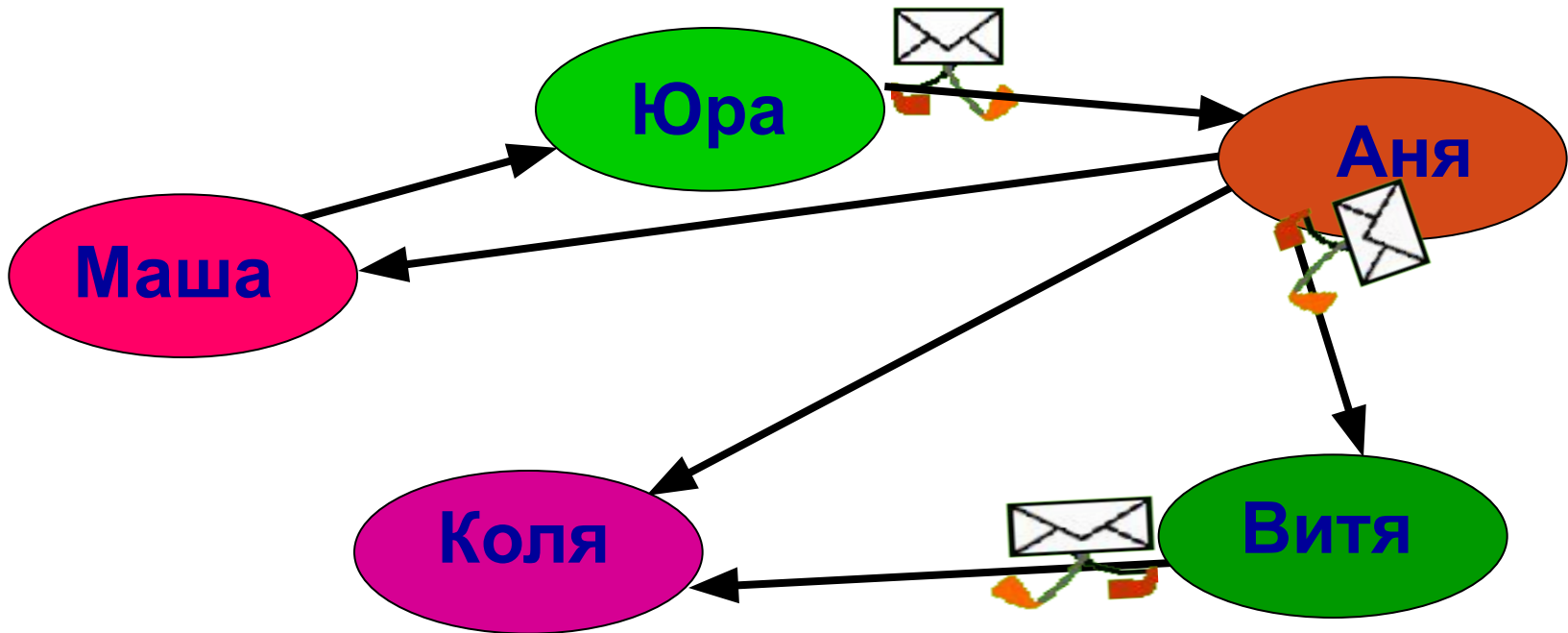
Линия ненаправленная (без стрелки) называется ребром.

Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в неё же, называется петлей.



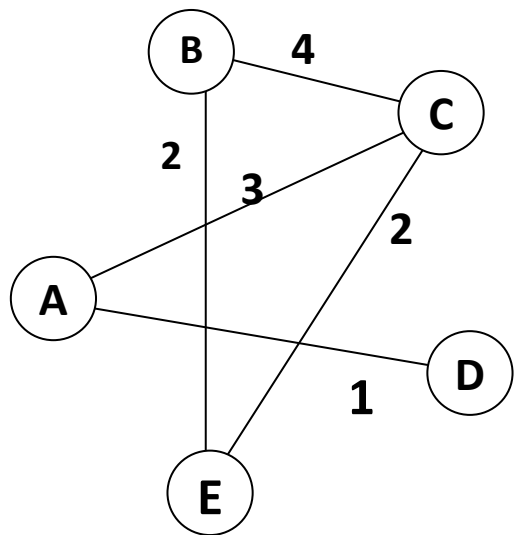
Ориентированный граф -

граф, вершины которого соединены *дугами*. С помощью таких графов могут быть представлены схемы односторонних отношений.



Взвешенный граф

- Это граф, рёбрам или дугам которого поставлены в соответствие *числовые величины* (они могут обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки).
- **Вес графа равен сумме весов его рёбер.**

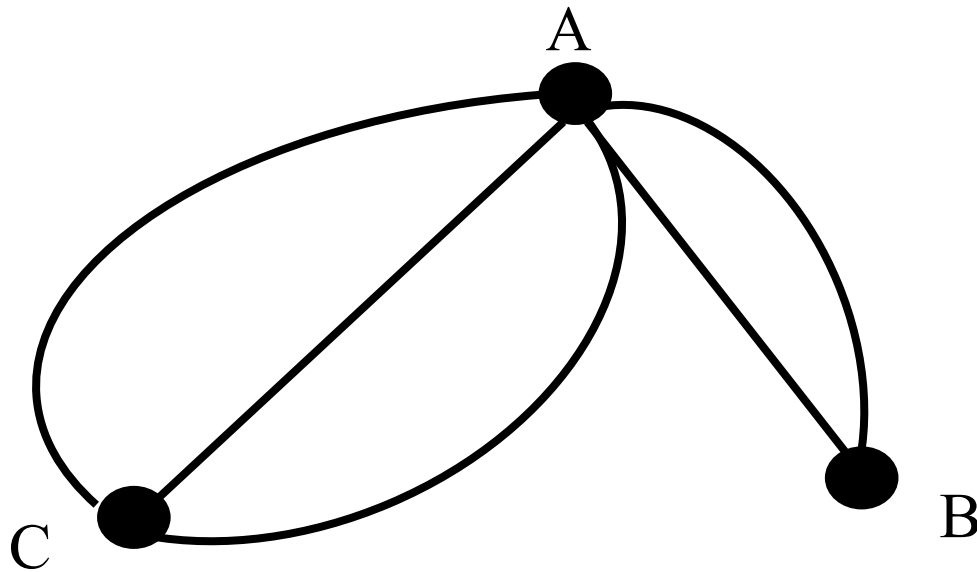


	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

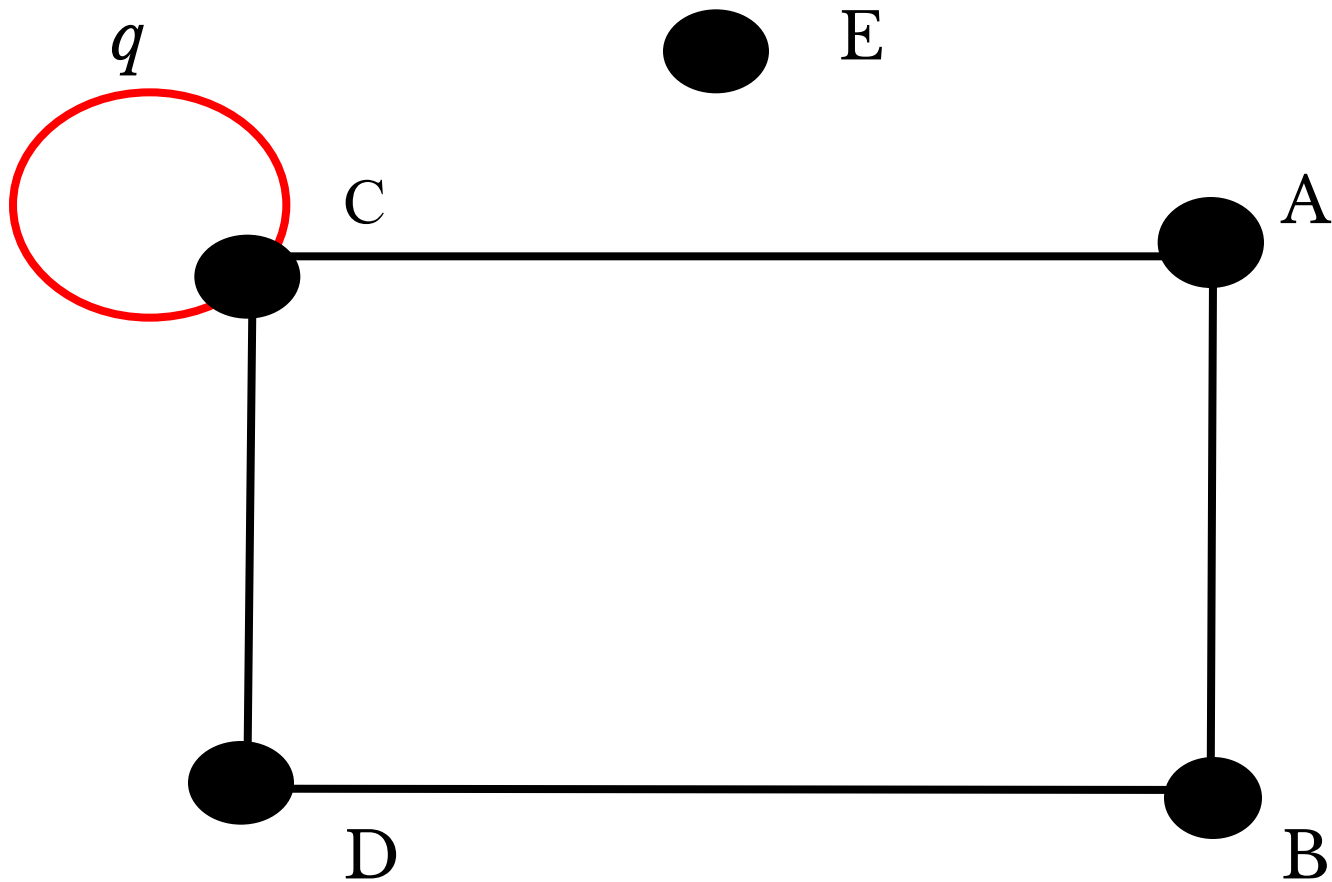
Таблице (она называется *весовой матрицей*) соответствует граф.

● Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W , (т.е. $(V, W) \in E$), (то, по определению), что это ребро им инцидентно.

● **Две вершины графа** называются смежными, если существует инцидентное им ребро: на рисунке смежными являются вершины A и B , A и C .

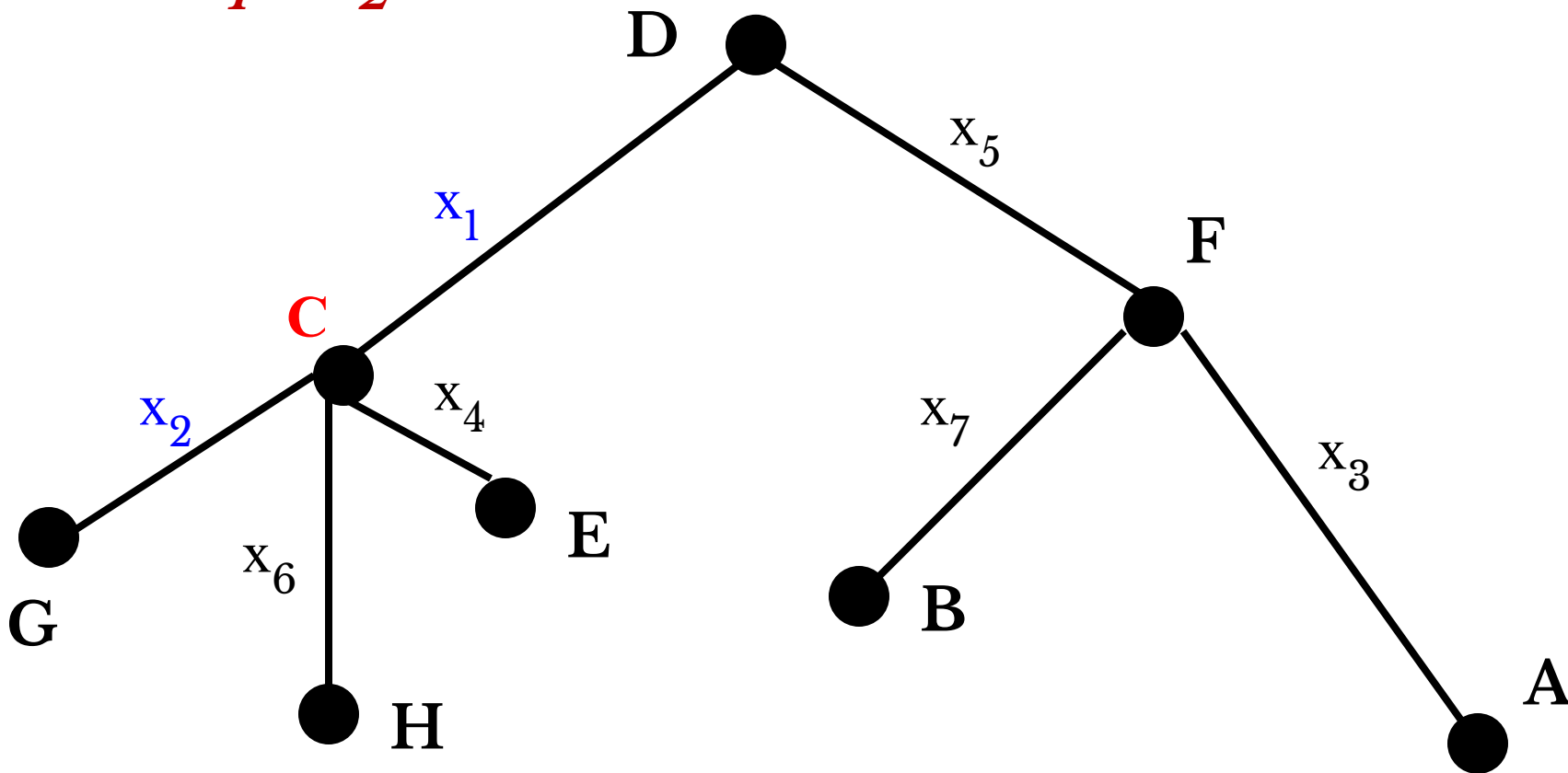


Если **граф G** имеет ребро , у которого **начало и конец совпадают**, то это ребро называется **петлёй**. На рисунке **ребро $q(C, C)$ – петля**.



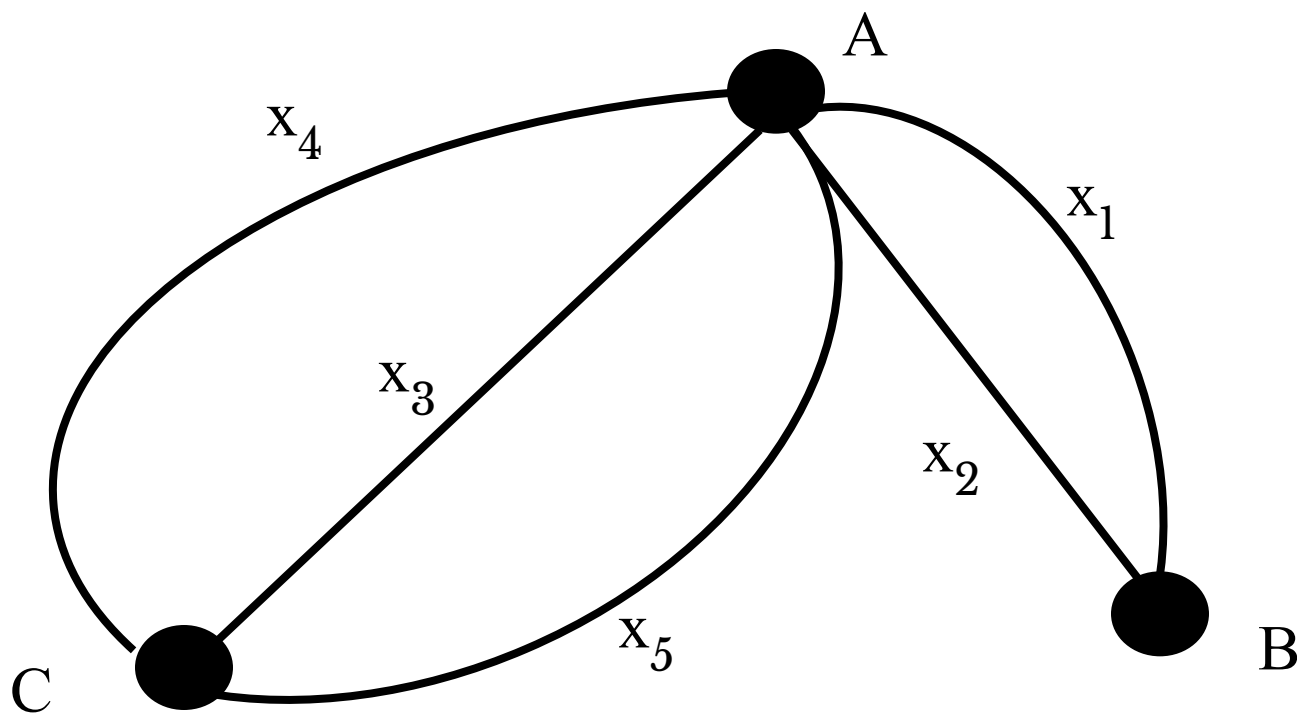
Два ребра называются **смежными**, если они имеют **общую вершину**.

На рисунке **смежными** являются, например, рёбра x_1 и x_2 с общей вершиной **C**.

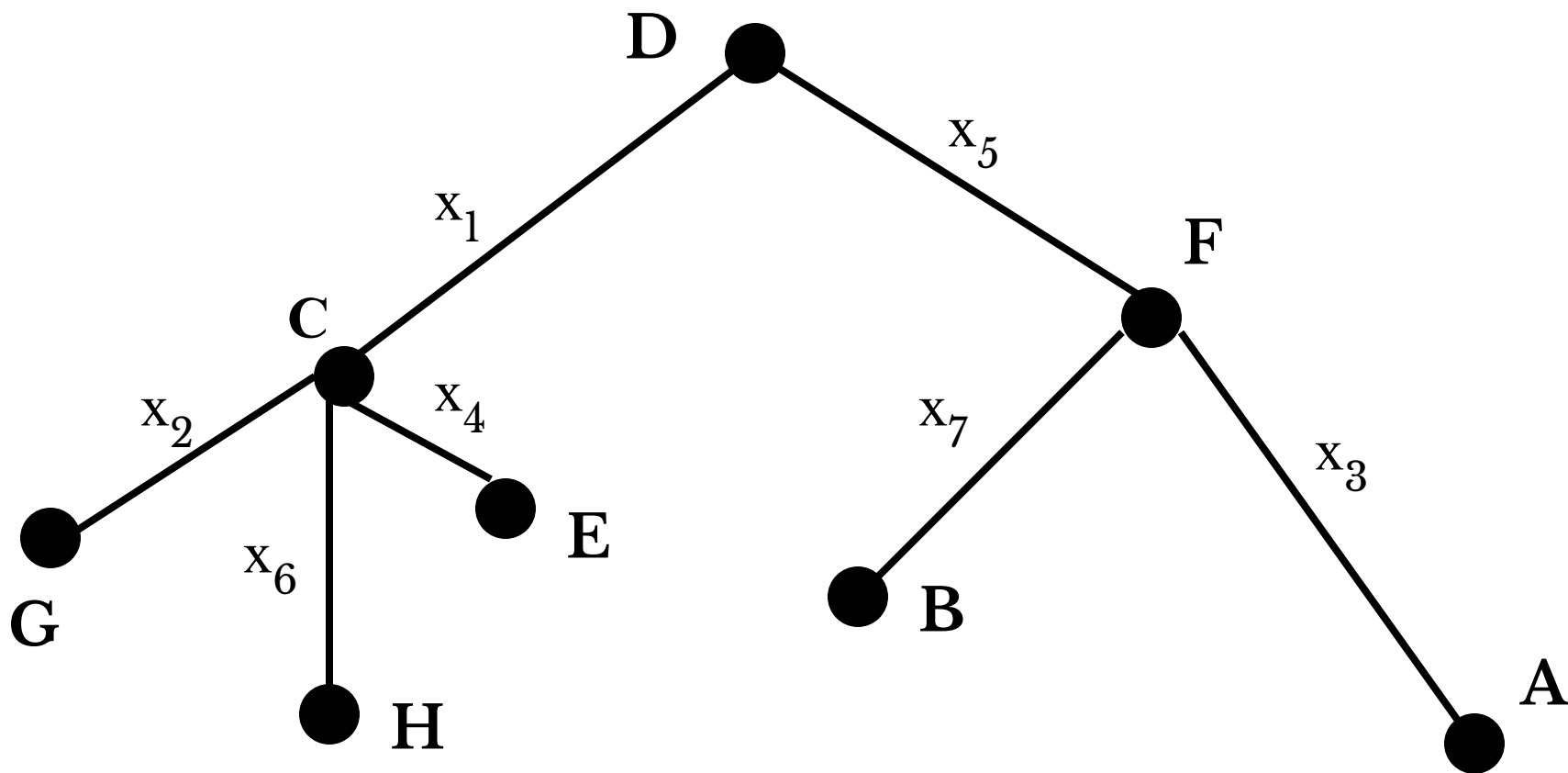


- **Рёбра**, которые начинаются в одной и той же вершине, заканчиваются также в одной и той же вершине, называются **кратными**, или **параллельными**.
- **Количество одинаковых пар** вида (V, W) называется **кратностью ребра** (V, W)
- **Число рёбер**, инцидентных **вершине A** , называется **степенью** этой вершины и обозначается $\deg(A)$ (англ. *degree* – степень).

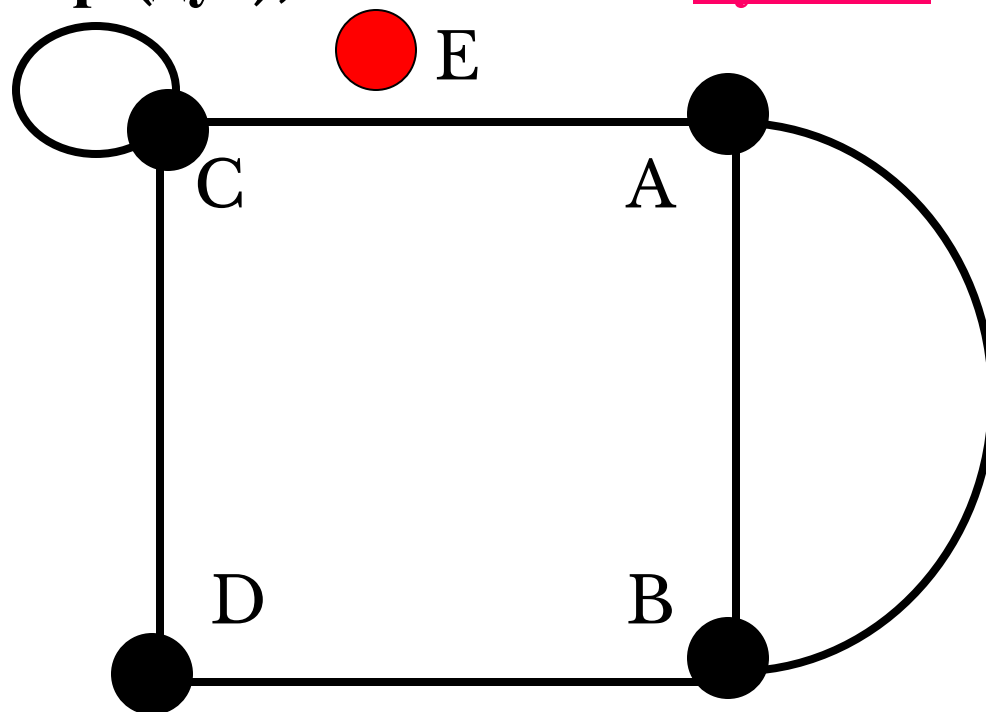
На рисунке **кратными** являются, например, рёбра $x_1(A, B)$, $x_2(A, B)$. Вершинам **A** и **C** инцидентны рёбра x_3 , x_4 , x_5 . Следовательно, ребро **AC** имеет **кратность, равную 3**, а ребро **AB** — **кратность, равную 2**.



На рисунке вершина **A** имеет **степень**, равную **1**,
вершина **C** – **4**, вершина **D** – **2**. Записывается
это в виде: $\text{deg}(A)=1, \text{deg}(C)=4, \text{deg}(D)=2$.

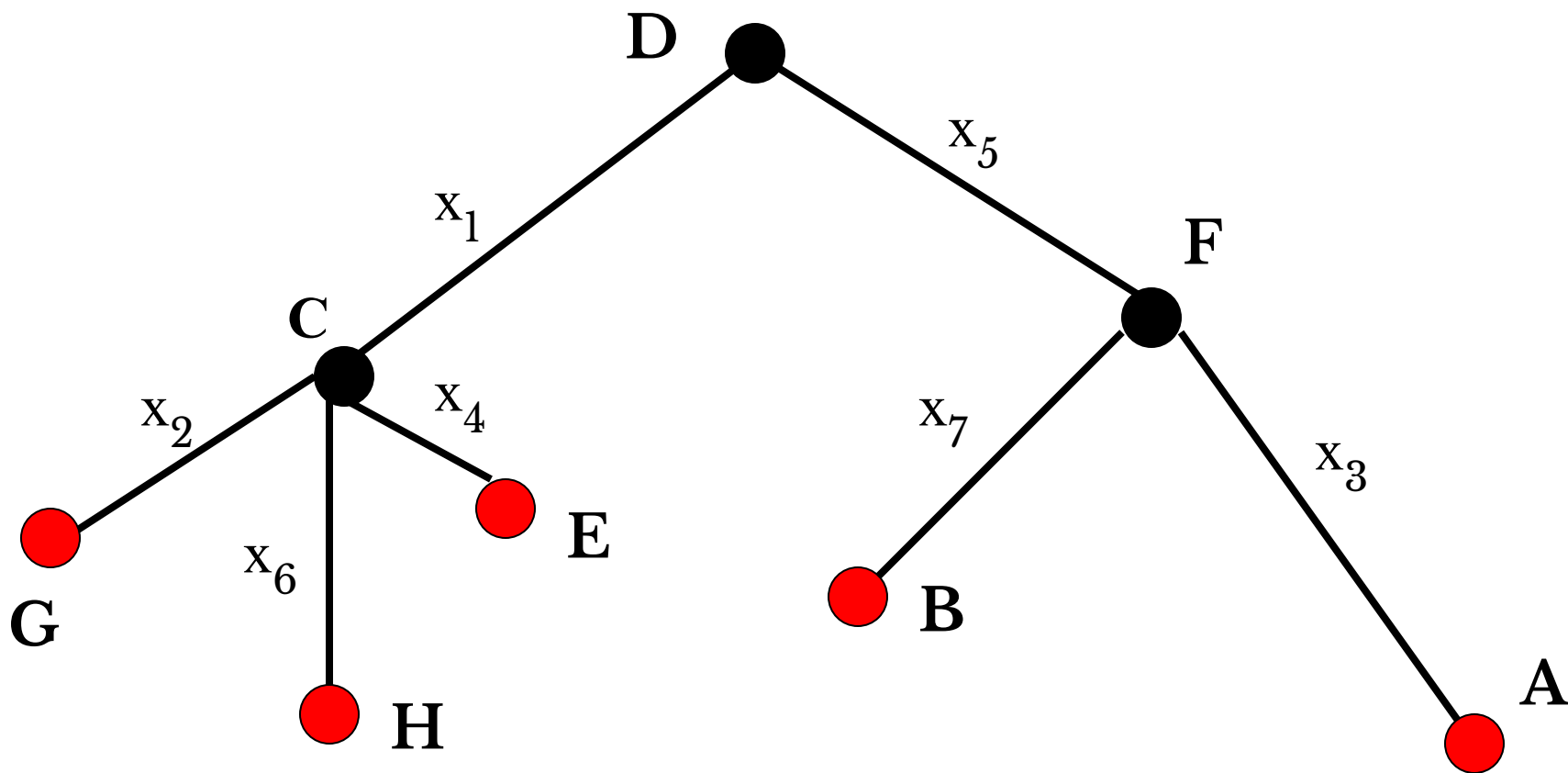


- **Вершина графа**, имеющая степень, равную нулю, называется изолированной.
- **Граф**, состоящий из изолированных вершин, называется нуль-графом.
- **Вершина графа**, имеющая степень, равную 1, называется висячей.
- **Граф**, не имеющий ребер (дуг), называется пустым.



На рисунке вершина
E – изолированная:
 $\text{deg}(E)=0$.

На рисунке вершины **A, B, E, G, H** – висячие.



Теорема 1. В графе $G = \langle V, X \rangle$ сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m$$

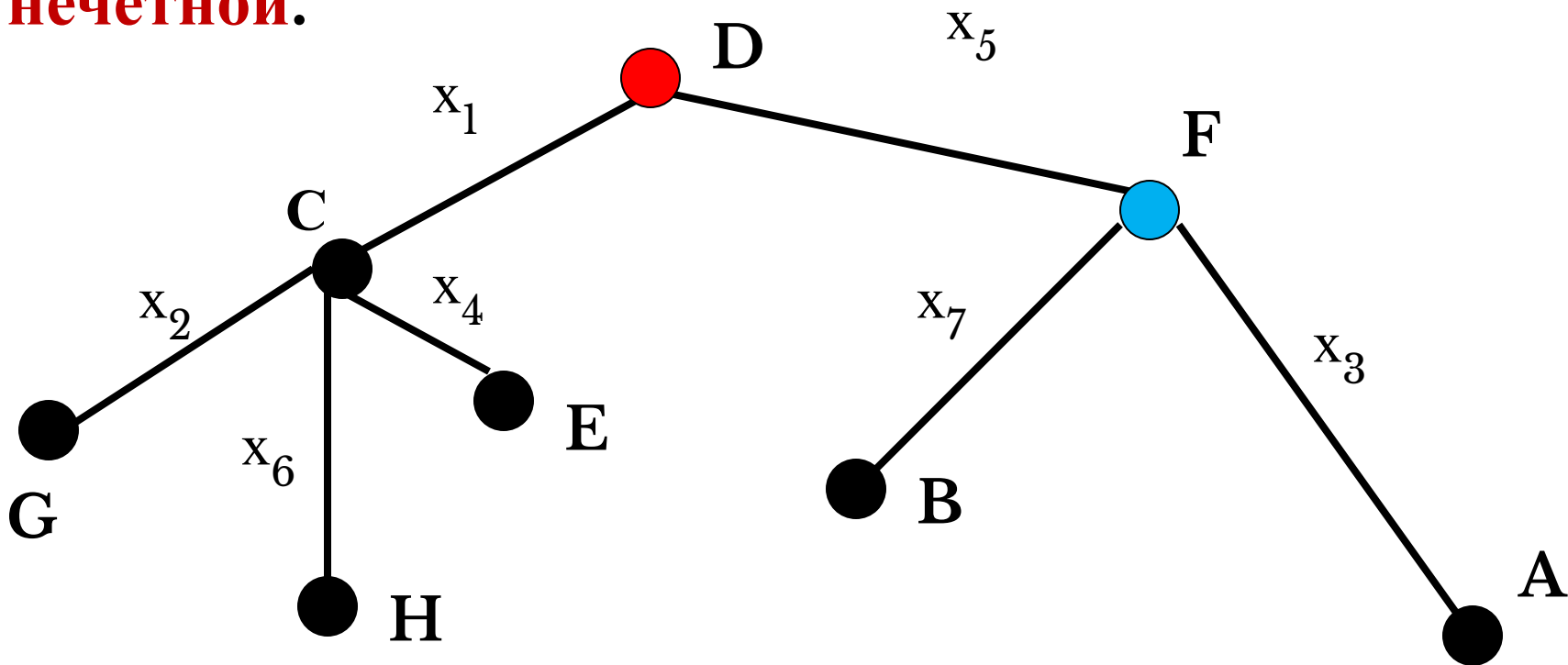
Количество ребер в любом графе равно половине суммы степеней его вершин.

где $n = |V|$ – число вершин;

$m = |X|$ число рёбер графа.

Вершина называется чётной (нечётной), если её степень – *чётное* (*нечётное*) число.

На рисунке $\deg(D)=2$, $\deg(F)=3$, значит у графа вершина **D** является **чётной**, а **F** – **нечётной**.



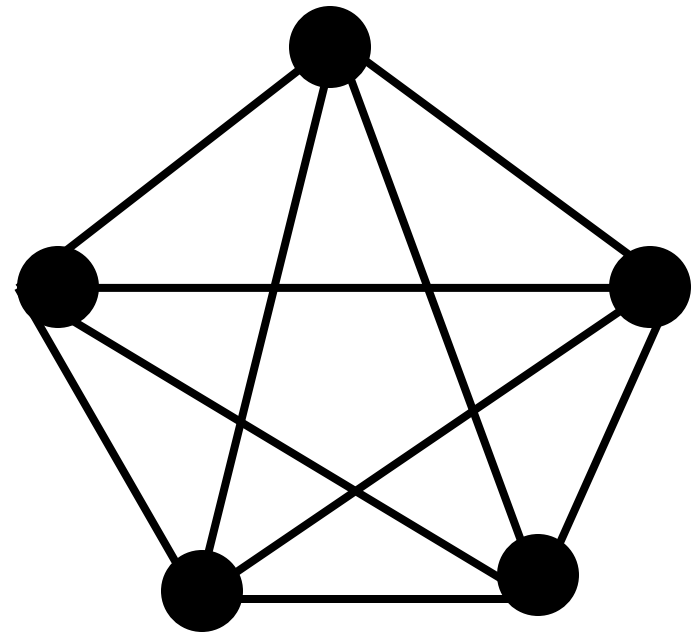
Задача. В городе Маленьком **15** телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение. В качестве вершин графа возьмем телефоны, а в качестве ребер — телефонные провода. Применим к этому графу теорему 1. Степень каждой вершины графа равна 5, значит, сумма степеней всех вершин равна $5 \cdot 15 = 75$. Это нечетное число, поэтому его половина — число нецелое. То есть в нашем графе нецелое число ребер, и в городе нецелое число проводов, чего быть не может.

Теорема 2. *Всякий (неориентированный) граф содержит четное число нечетных вершин.*

Следствие. Невозможно начертить граф с нечётным числом нечётных вершин.

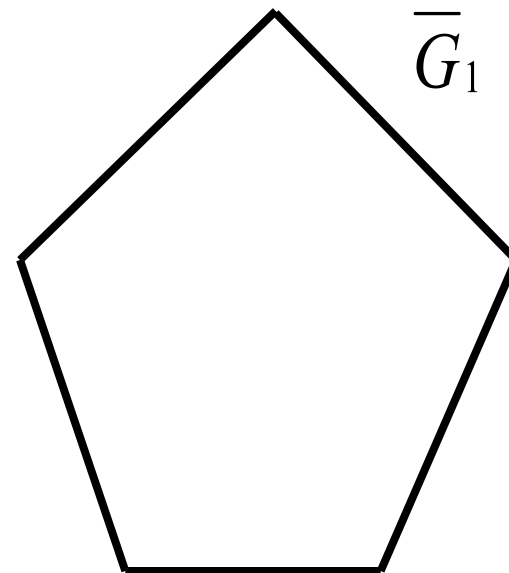
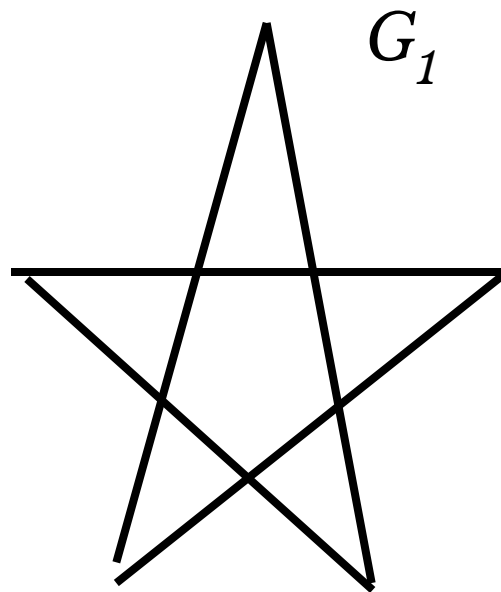
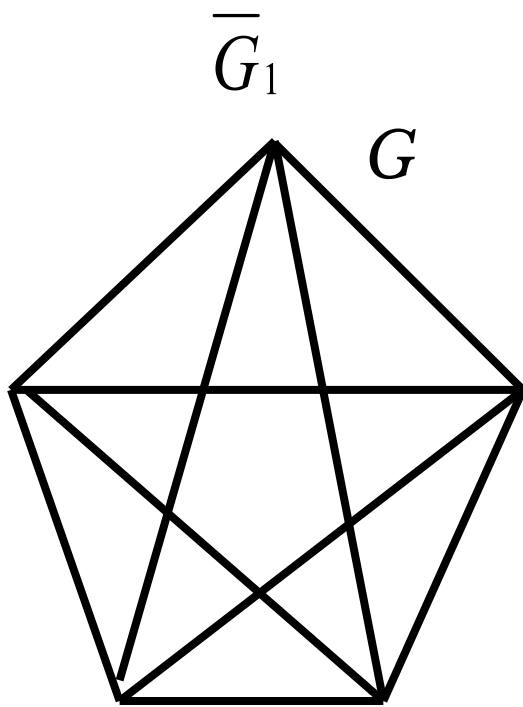
Граф G называется полным, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.



Задача. В классе **30** человек. Может ли быть так, что **9** человек имеют по **3** друга, **11** — по **4** друга, а **10** — по **5** друзей?

Решение. Сделаем учеников вершинами графа, а ребрами будем соединять тех из них, которые дружат между собой. По условию в таком графе четных вершин будет 11, а нечетных $9+10=19$, то есть нечетное число, что противоречит теореме 2.

Дополнением графа $G = \langle V, X \rangle$ называется граф $\bar{G} = \langle V, X' \rangle$ теми же вершинами V , что и граф G , и имеющий те и только те рёбра, которые необходимо добавить к графу G , чтобы он стал полным. На рисунке дополнением графа G_1 до графа G является граф \bar{G}_1



Закономерность

1.

- *Степени вершин полного графа одинаковы, и каждая из них на 1 меньше числа вершин этого графа*

Закономерность

2.

- *Сумма степеней вершин графа число четное, равное удвоенному числу ребер графа. Эта закономерность справедлива не только для полного, но и для любого графа.*

Закономерность

3.

- *Число нечетных вершин любого графа четно.*

Закономерность

4.

- *Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.*

Закономерность

5.

- Если **все вершины** графа **четные**, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Закономерность

6.

- **Граф**, имеющий всего **две нечетные вершины**, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

Закономерность

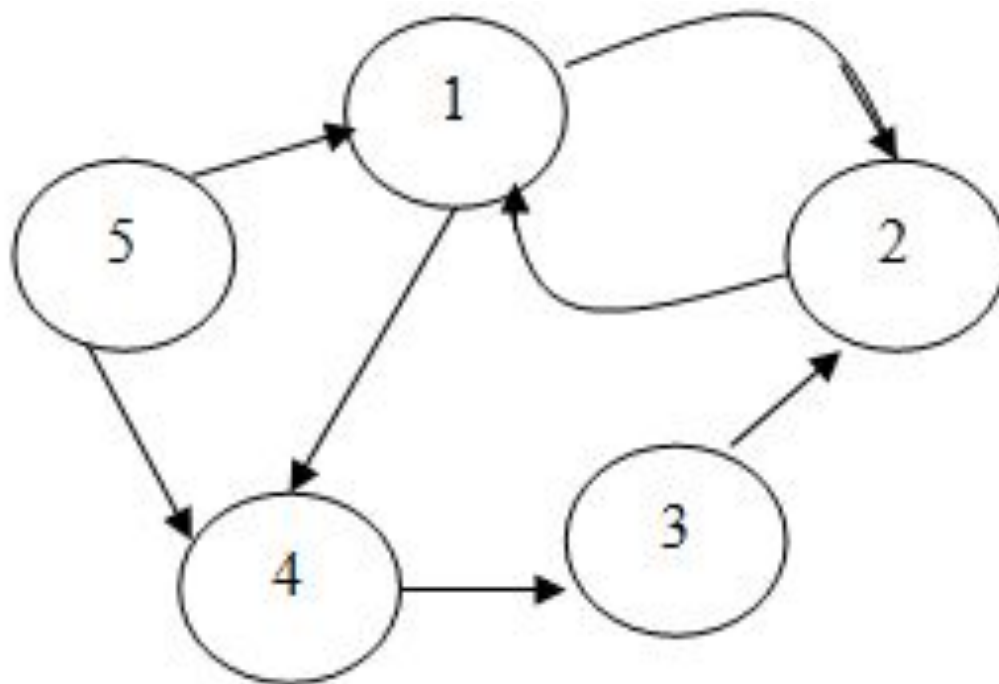
7.

- *Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком». Фигура (граф), которую можно начертить не отрывая карандаш от бумаги, называется уникарсальной.*

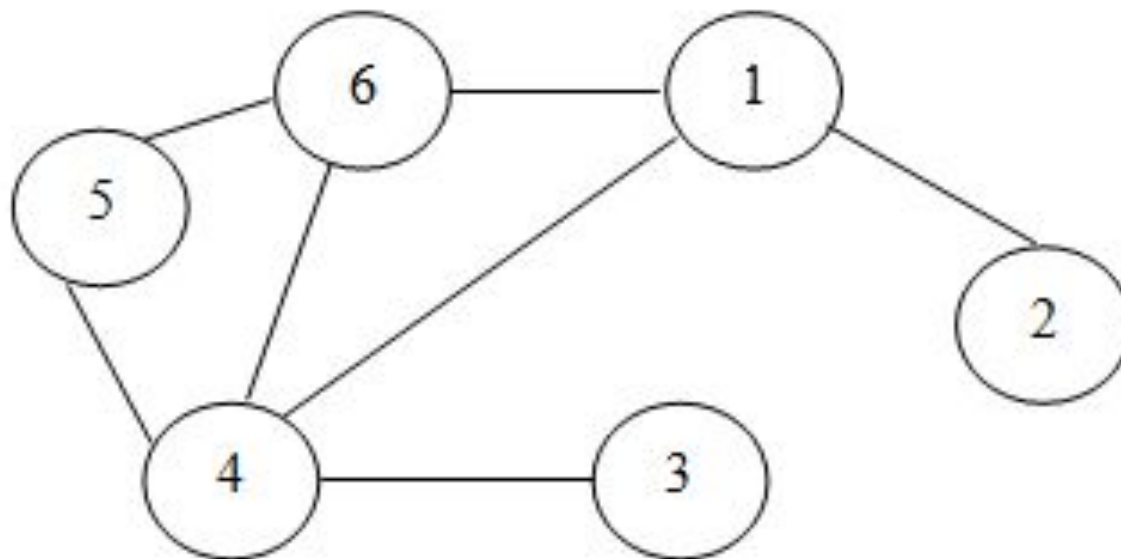
ПУТИ И МАРШРУТЫ В ГРАФАХ

- **Путь** в ориентированном графе называется **последовательность дуг**, в которой конечная вершина любой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.
- **Вершина**, от которой проложен маршрут, называется **началом пути**, **вершина** в конце маршрута — **конец пути**.
- **Путь**, в котором каждая вершина используется **не более одного раза**, называется **простым путем**.
- **Длиной пути** в графе называется **количество дуг (ребер)**, составляющих этот путь.

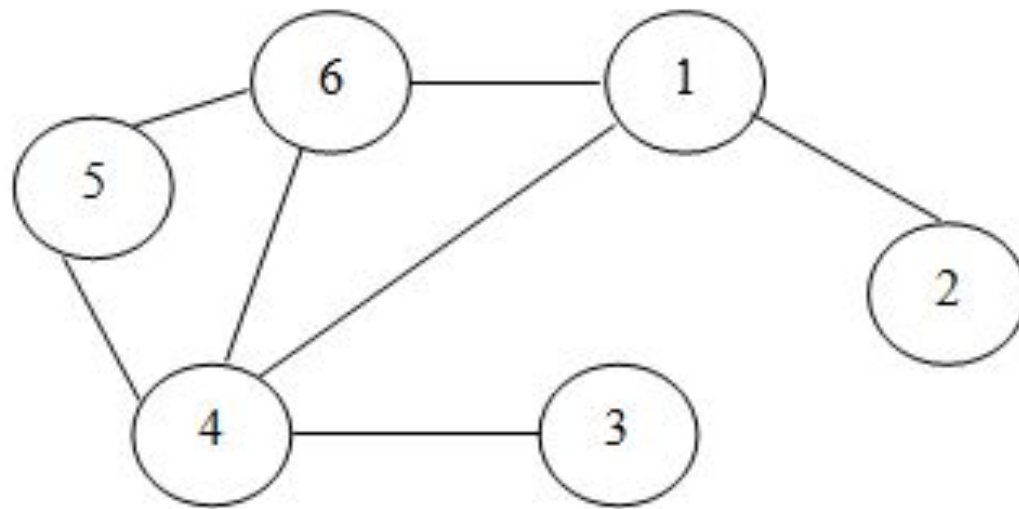
В качестве примера рассмотрим **орграф**, представленный на рисунке. Одним из существующих **путей**, соединяющих вершины **1** и **3**, является последовательность вершин **1, 2, 1, 4, 3**. Единственным **простым путем** для той же пары вершин является последовательность **1, 4, 3**. Пути из вершины **1** в вершину **5** для того же графа не существует.



- Неориентированный граф называется связным, если существует хотя бы один путь между каждой парой вершин.
- Орграф называется связным, если связан неориентированный граф, который получается из исходного ориентированного заменой всех дуг на ребра.

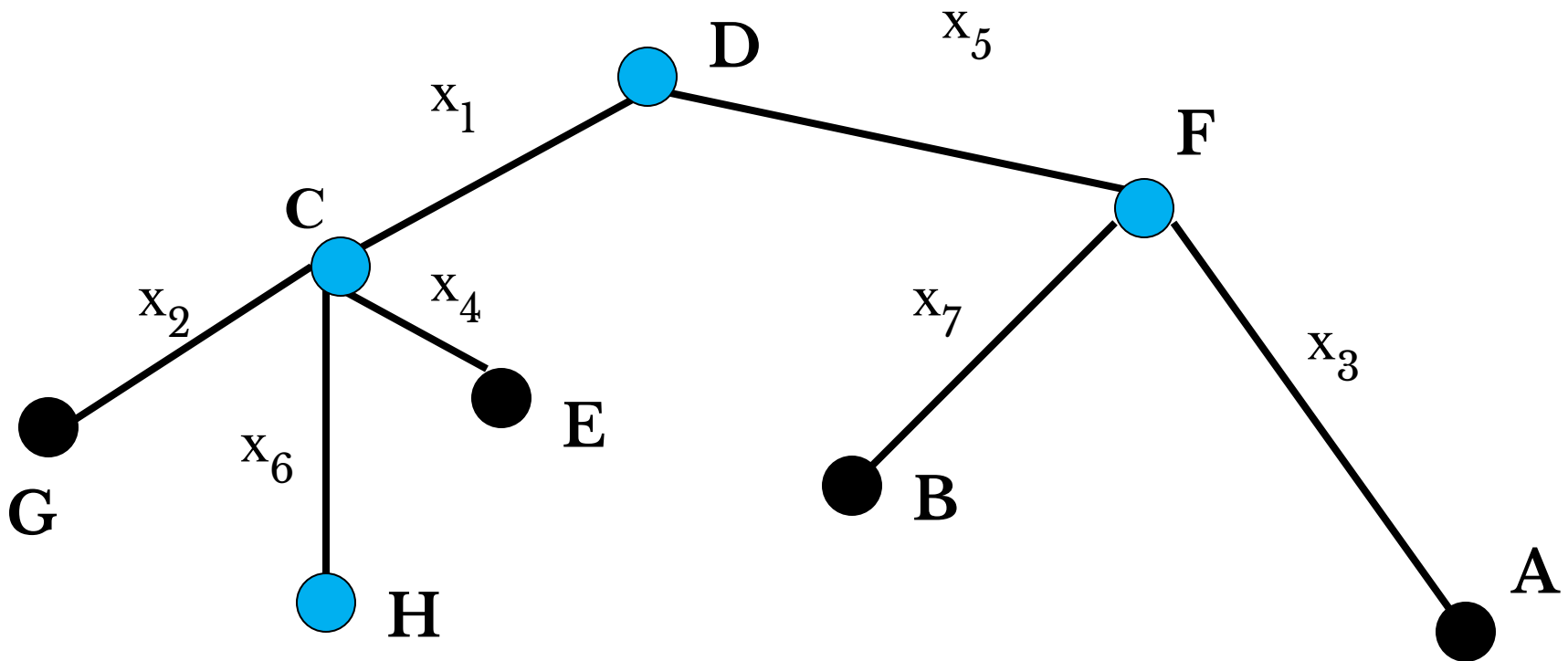


- Путь называется замкнутым, если начальная и конечная вершины совпадают.
- Замкнутый путь называется циклом, если все его вершины (кроме начальной и конечной) различны.
- Рассмотрим граф. Для него путь 2, 1, 6, 5, 4, 1, 2 является замкнутым; а путь 1, 6, 5, 4, 1 является циклом.

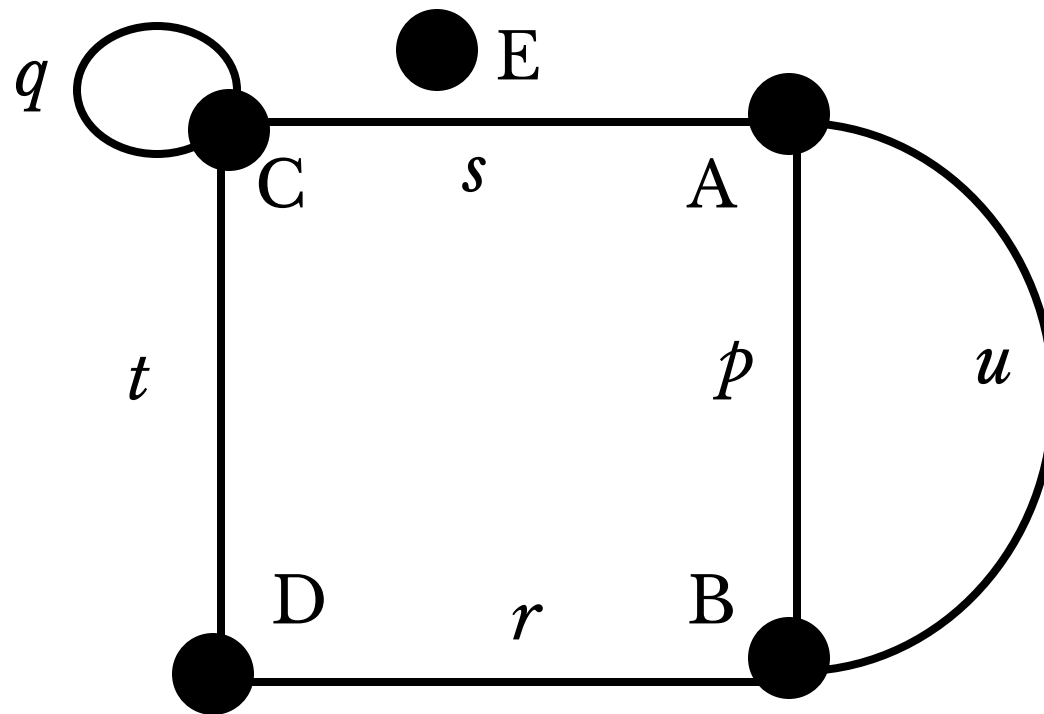


- Последовательность попарно смежных вершин неориентированного графа, т.е. последовательность рёбер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется маршрутом.
- Число рёбер маршрута называется длиной маршрута.
- Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется замкнутым или циклом.

На рисунке HCDFD – маршрут длиной 4.
Обозначение: **|HCDFD|=4**. Маршрут принято задавать как последовательность рёбер, поскольку это удобно при наличии кратных рёбер.



В графе на рисунке (t, s, p, r) , (u, s, t, r) – **ЦИКЛЫ** длиной 4, (r, t, q, s, u) – цикл длиной 5, (t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-цикл, (p, u) – 2-цикл, **петля** (q) – 1-цикл.



ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

● Одноместные операции

1. **Удаление ребра графа** — при этом все вершины графа сохраняются
2. **Добавление ребра графа** между двумя существующими вершинами.
3. **Удаление вершины** (вместе с инцидентными ребрами).
4. **Добавление вершины** (которую можно соединить с некоторыми вершинами графа).
5. **Стягивание ребра** — отождествление пары вершин, т.е. удаление пары смежных вершин, и добавление новой вершины, смежной с теми вершинами, которые были смежны, хотя бы одной из удаленных вершин)
6. **Подразбиение ребра s** — удаление ребра и добавление новой вершины, которая соединяется ребром с каждой из вершин удаленного ребра.

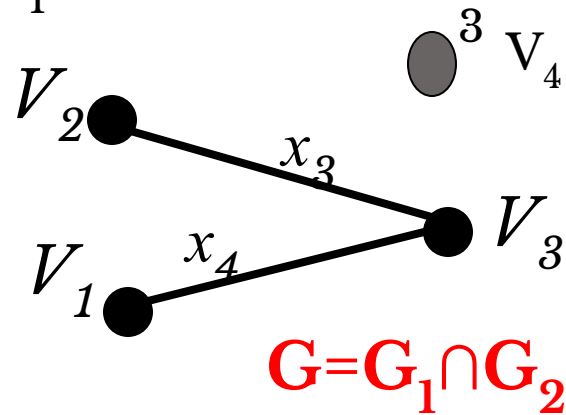
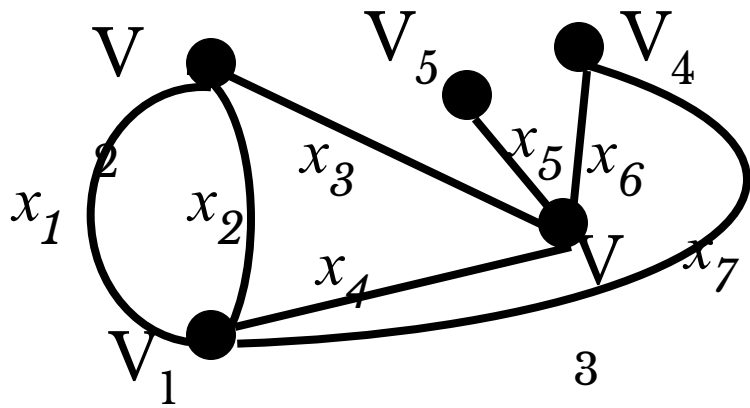
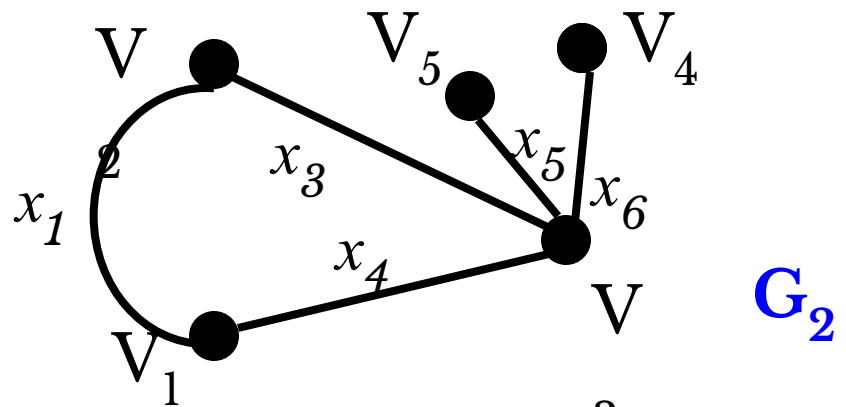
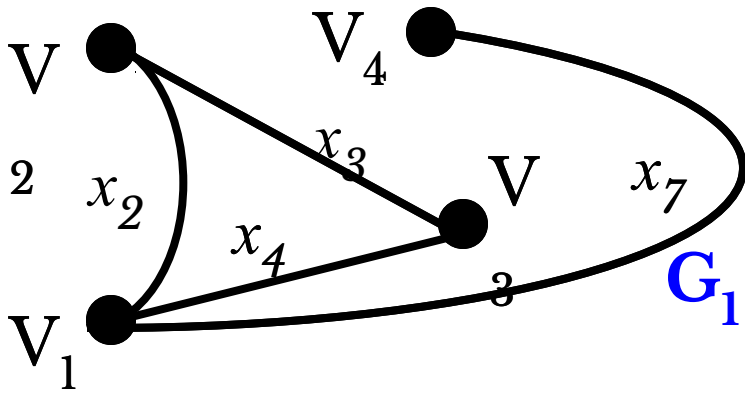
ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

● Двуместные операции

Объединением графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = (V, X)$, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, а множество рёбер $X = X_1 \cup X_2$.

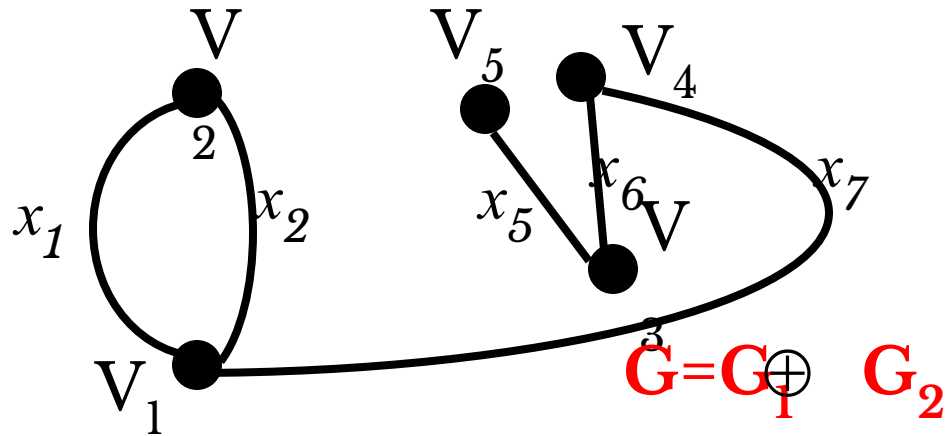
Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$ для которого $X = X_1 \cap X_2$ множество рёбер, а $V = V_1 \cap V_2$ - множество вершин.

Кольцевой суммой двух графов называется граф G , порождённый множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством рёбер $X = (X_1 \cap X_2) \cup ((X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1))$, т.е. множеством рёбер, содержащихся либо в G_1 , либо в G_2 , но не в $G_1 \cap G_2$.



$G = G_1 \cup G_2$

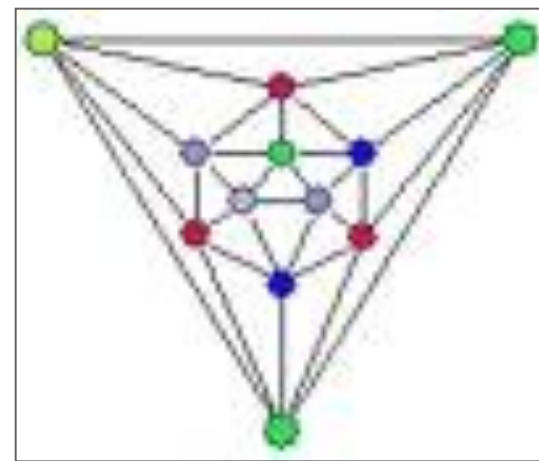
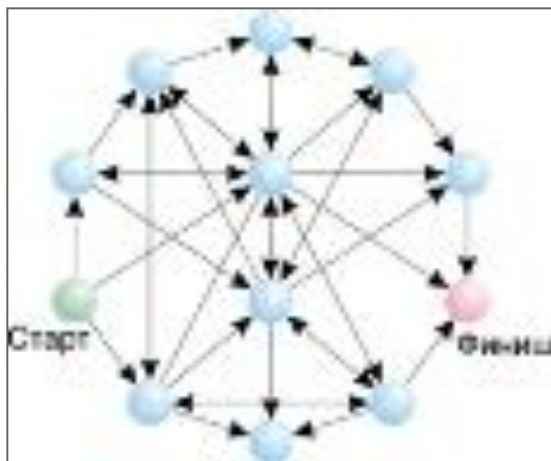
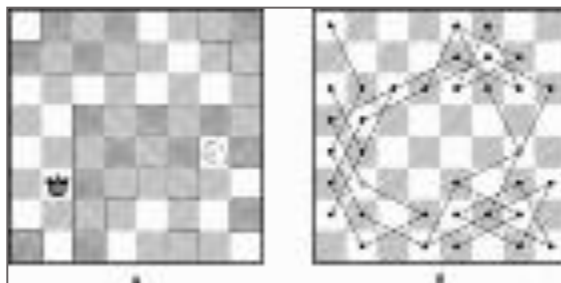
$G = G_1 \cap G_2$



$G = G_1 \oplus G_2$

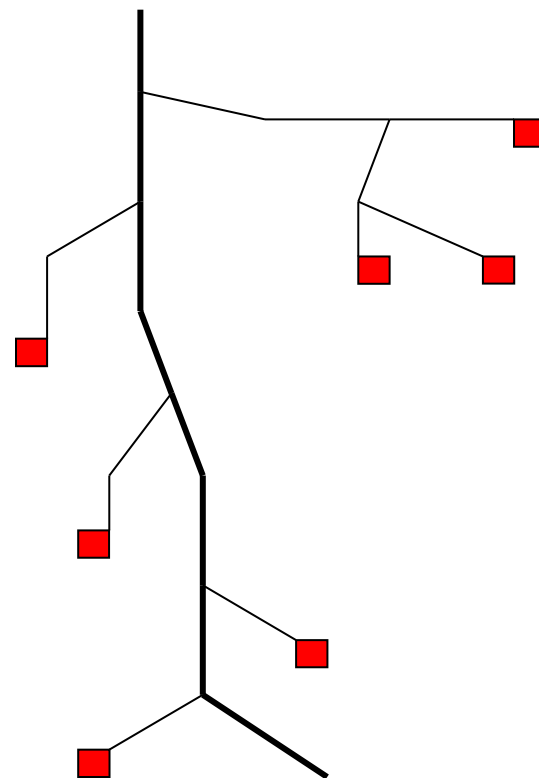
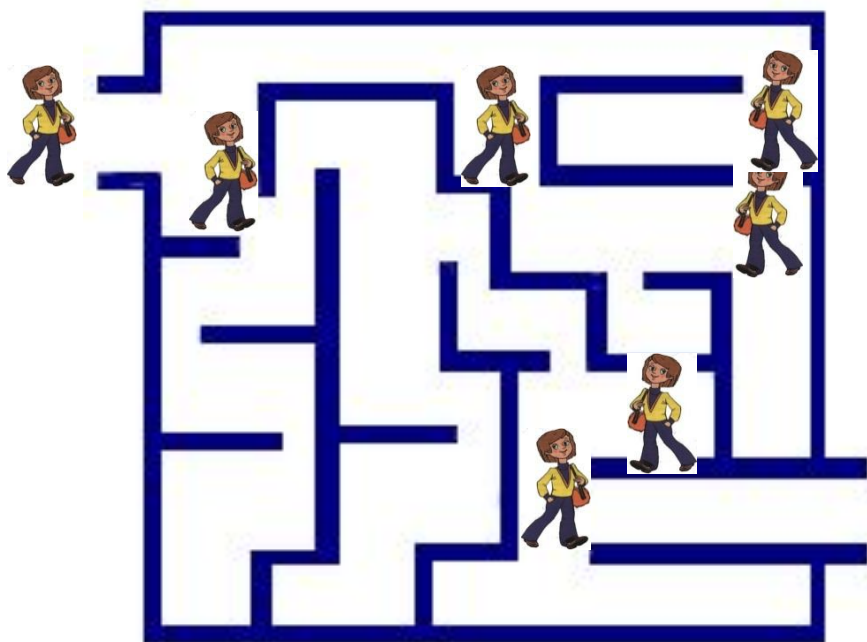
ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

С помощью графов упрощается решение математических задач, головоломок, задач на смекалку.



ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Лабиринт - это граф. А исследовать его - это найти путь в этом графе.



ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

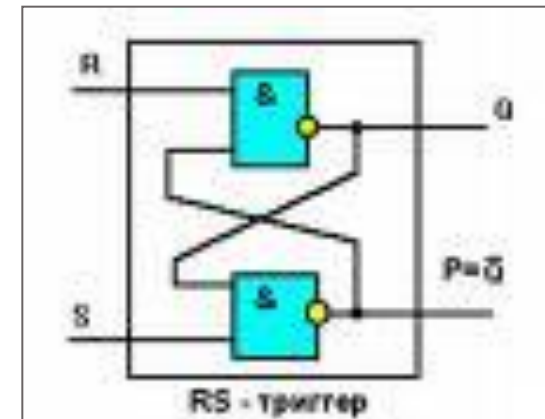
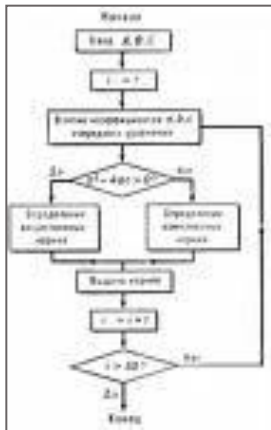
Использует графы и дворянство.

На рисунке приведена часть генеалогического дерева знаменитого дворянского рода Л. Н. Толстого. Здесь его вершины — члены этого рода, а связывающие их отрезки — отношения родственности, ведущие от родителей к детям.



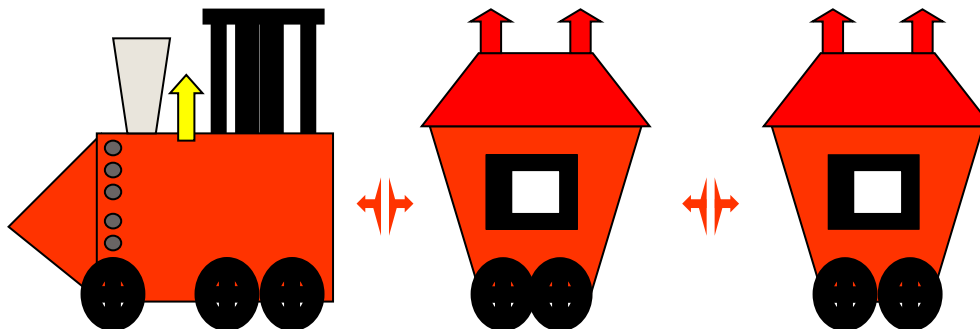
ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Графами являются блок – схемы программ для ЭВМ.



ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Типичными графами на географических картах являются изображения железных дорог.



ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Типичными графами на картах города являются схемы движения городского транспорта.



ВЫВОДЫ

Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать математические, экономические и логические задачи. Также можно решать различные головоломки и упрощать условия задач по физике, химии, электронике, автоматике. Графы используются при составлении карт и генеалогических древ.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «*Теория графов*».



Спасибо за внимание!