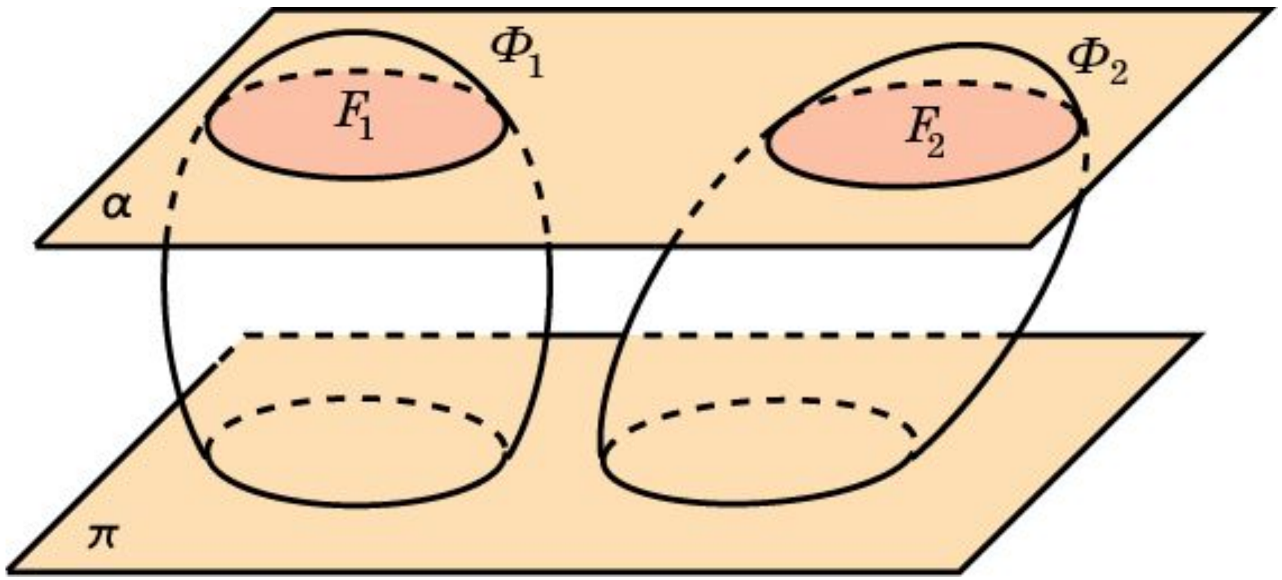
Б. Кавальери

Бонавентуре Кавальери (1598 – 1647) принадлежат труды по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике и т.д., но главным делом его жизни была книга «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного», в которой он предложил способ вычисления площадей плоских фигур и объемов пространственных тел, основанный на сравнении их сечений.

Метод вычисления объемов пространственных тел, предложенный Б. Кавальери, называется принципом Кавальери.

Принцип Кавальери

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади, то объемы исходных пространственных фигур равны.

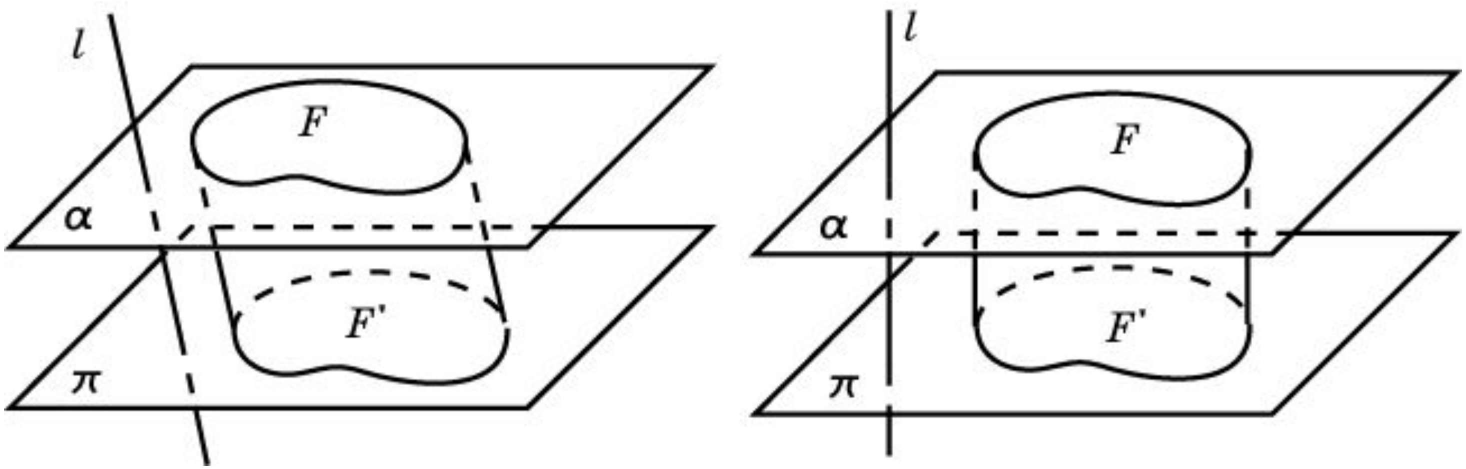


Обобщенный цилиндр

Пусть α и π - две параллельные плоскости, *l* - пересекающая эти плоскости прямая; *F* – фигура на одной из этих плоскостей, *F’* – ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой *l*. Отрезки, соединяющие точки фигуры *F* с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть обобщенным цилиндром. Фигуры *F* и *F’* называются основаниями обобщенного цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют высотой обобщенного цилиндра.

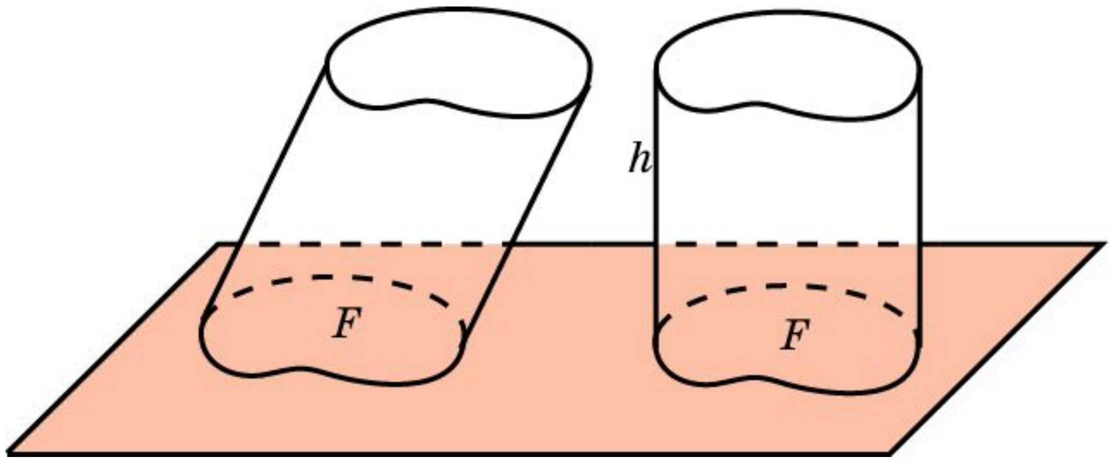
В случае, если в определении обобщенного цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая *l* перпендикулярна плоскостям α и π, то обобщенный цилиндр называется прямым. В противном случае цилиндр называется наклонным.

Частным случаем обобщенного цилиндра являются цилиндр и призма.



Объем обобщенного цилиндра

Теорема. Объем обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.



Следствие 1. Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания, h – высота призмы.

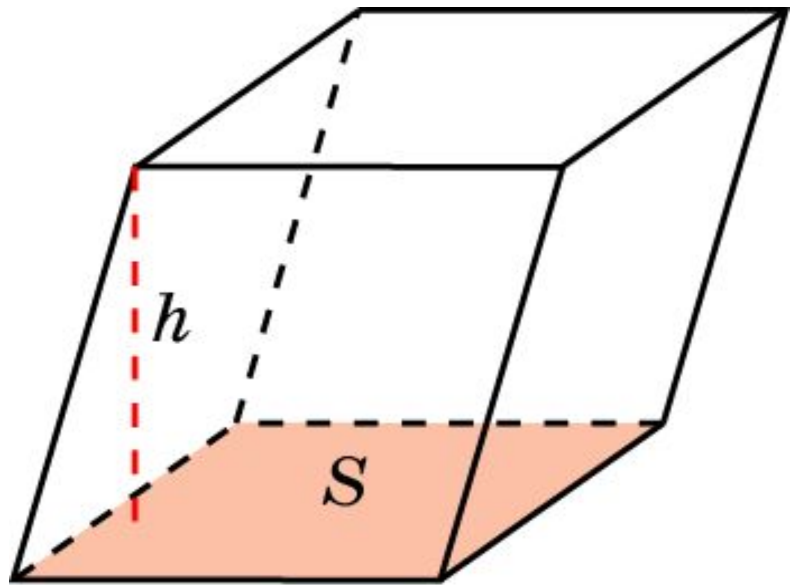
Следствие 2. Объем цилиндра, радиус основания которого равен R, а высота равна h и, вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Объем наклонного параллелепипеда 1

Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади S грани параллелепипеда на высоту h, проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

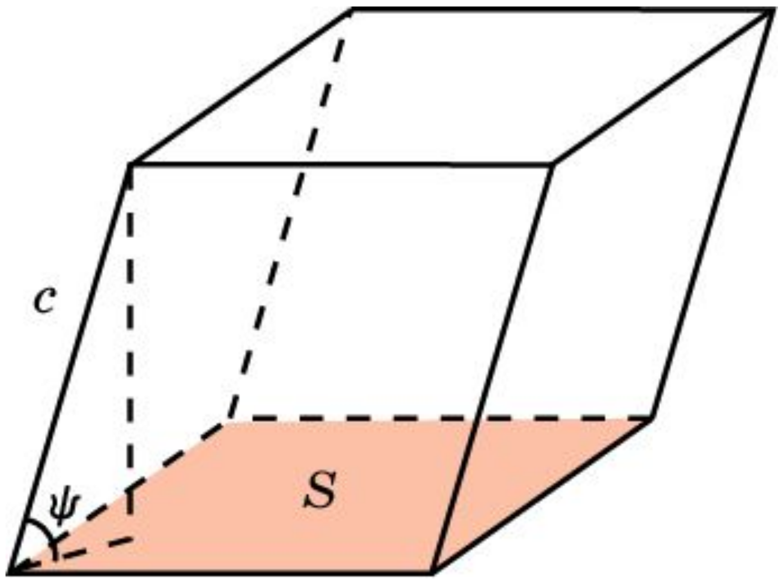
$$V = S \cdot h.$$



Объем наклонного параллелепипеда 2

Если ребро параллелепипеда равно c и образует с гранью площади S угол ψ , то объем параллелепипеда вычисляется по формуле

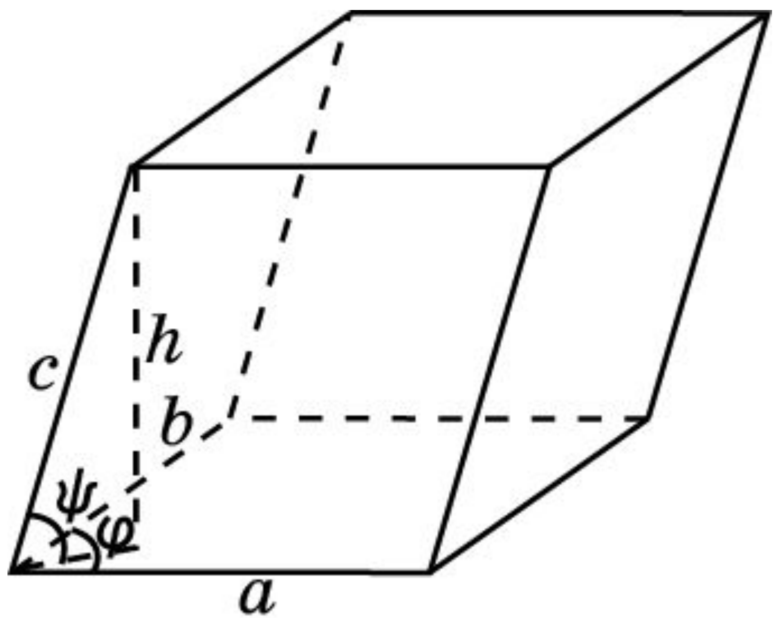
$$V = S \cdot c \cdot \sin \psi .$$



Объем наклонного параллелепипеда 3

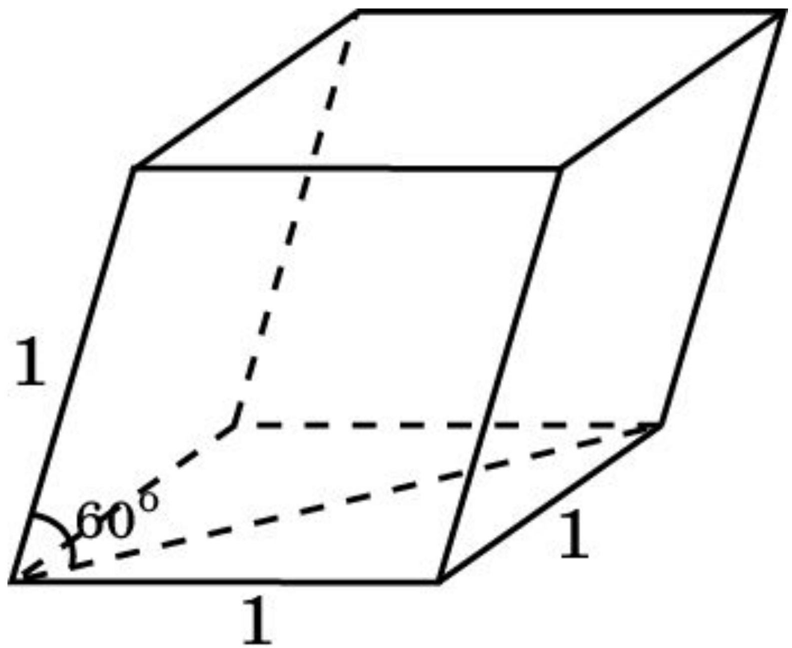
Пусть ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны *a*, *b*, *c*. Ребра *a* и *b* образуют угол φ, а ребро *c* наклонено к плоскости ребер *a* и *b* под углом ψ. Тогда объем *V* параллелепипеда выражается формулой

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi.$$



Упражнение 1

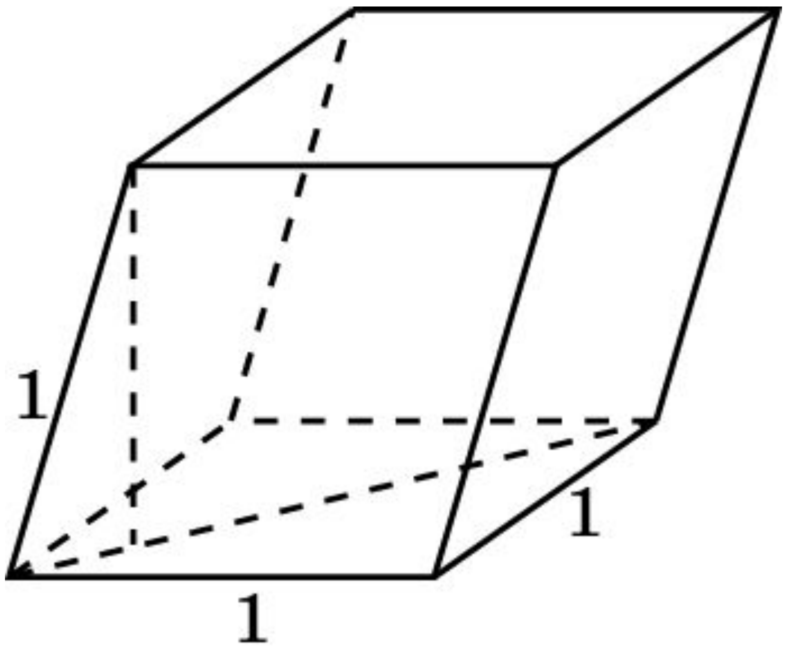
Две противоположные грани параллелепипеда – квадраты со стороной 1. Соединяющее их ребро равно 1 и наклонено к плоскостям этих граней под углом 60º. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 2

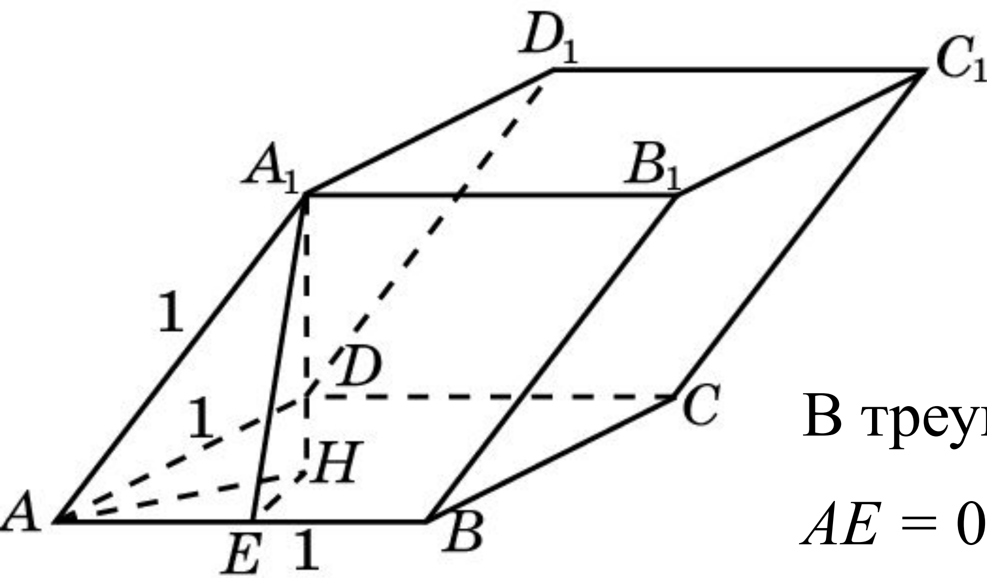
Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 3

Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 и острыми углами при этой вершине 60°. Найдите объем параллелепипеда.



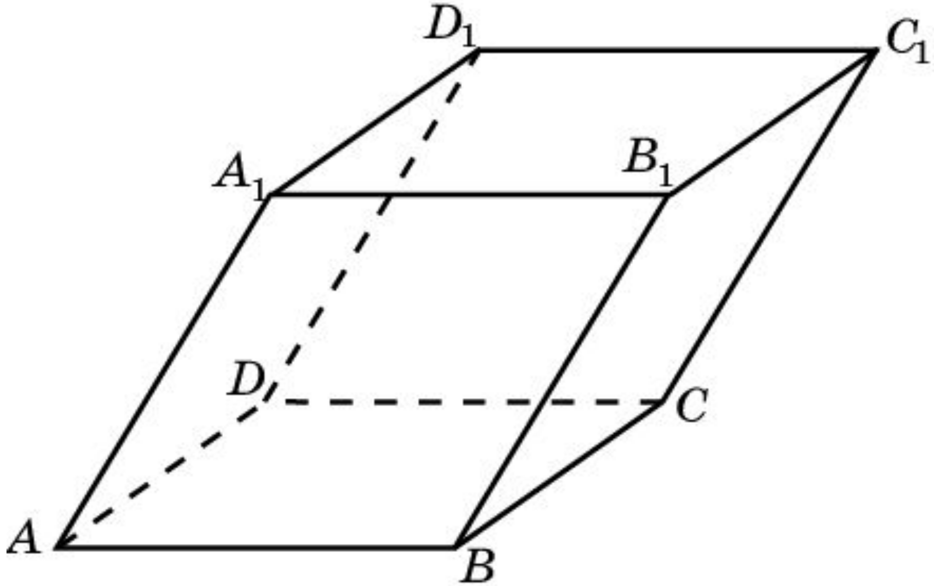
Решение. Площадь грани $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота A_1E грани ABB_1A_1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В треугольнике AEH угол A равен 30°, $AE = 0{,}5$. Значит, $EH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и, следовательно, высота A_1H равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Таким образом, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 4

В параллелепипеде две грани имеют площади S_1 и S_2, их общее ребро равно a, и они образуют между собой двугранный угол 150°. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и BCC_1B_1 равны S_1 и S_2, ребро BC равно a. Тогда высота параллелограмма BCC_1B_1 равна S_2/a. Высота параллелепипеда, проведенная

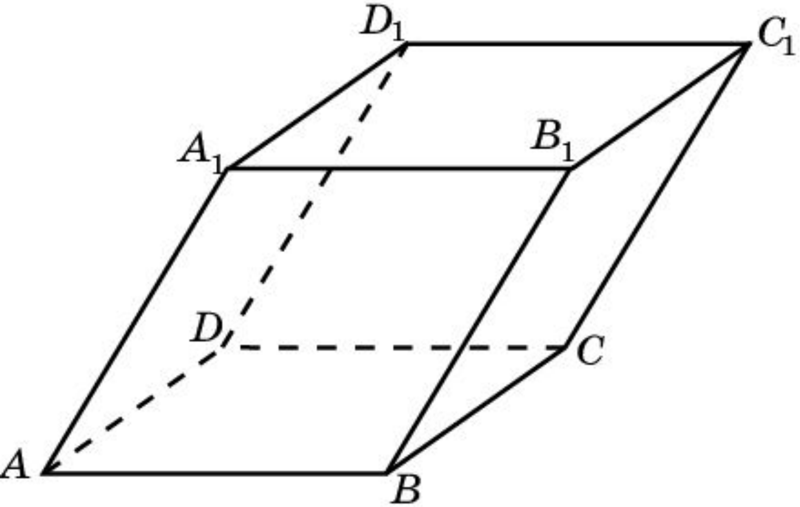
к грани $ABCD$, равна $\dfrac{S_2}{2a}$.

Следовательно, объем параллелепипеда равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Ответ: $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Упражнение 5

В параллелепипеде две грани являются прямоугольниками с площадями 20 см^2 и 24 см^2. Угол между их плоскостями равен 30^o. Еще одна грань этого параллелепипеда имеет площадь 15 см^2. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и ADD_1A_1 равны 20 см^2 и 24 см^2. Тогда площадь грани ABB_1A_1 равна 15 см^2, а угол A_1AB равен 30^o. Пусть $AD = x$. Тогда $AB = 20/x$, $AA_1 = 24/x$. Имеем равенство

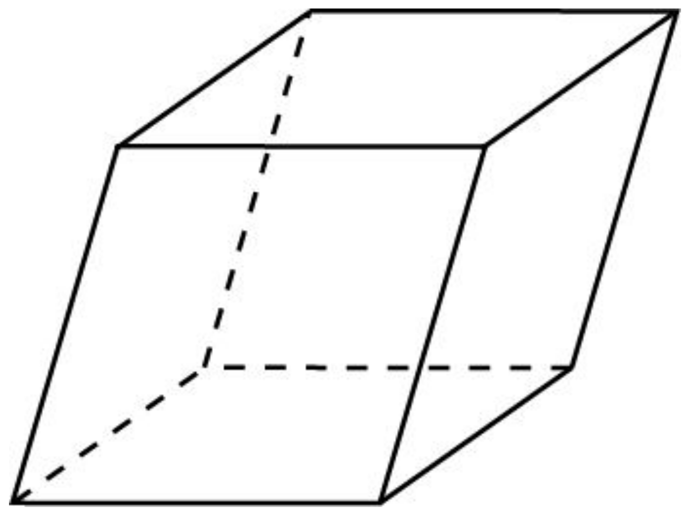
$$\frac{20}{x}\cdot\frac{24}{x}\cdot\frac{1}{2}=15.$$

Откуда находим $x = 4$ см. Высота, проведенная к грани $ABCD$ равна половине ребра AA_1 и равна 3 см. Следовательно, объем параллелепипеда равен 60 см^3.

Ответ: 60 см^3.

Упражнение 6

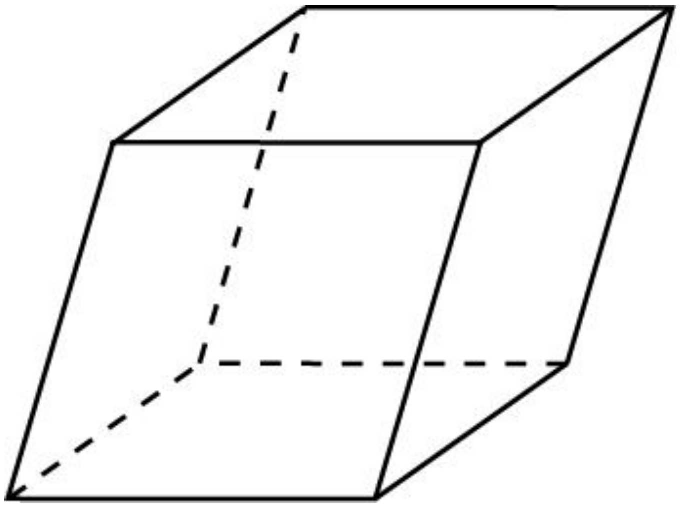
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть меньше 1, а объем параллелепипеда быть больше 100?



Ответ: Нет, объем будет меньше 1.

Упражнение 7

Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть больше 100, а объем параллелепипеда быть меньше 1?



Ответ: Да.

Упражнение 8*

В пространстве даны три параллелепипеда. Как провести плоскость, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема?

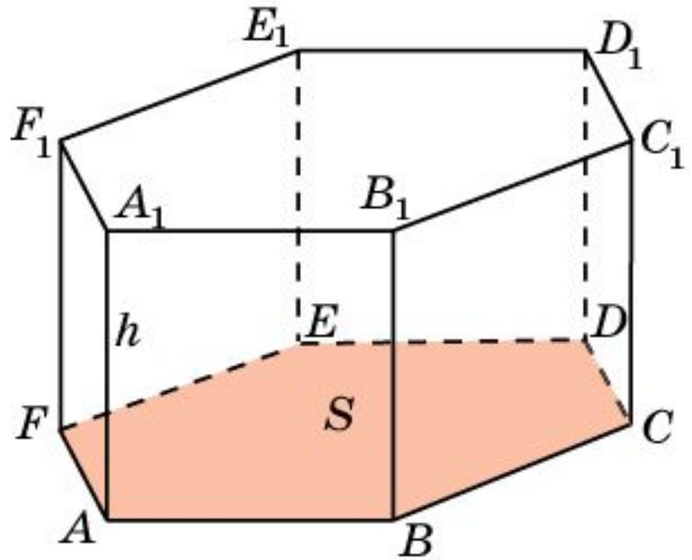
Ответ: Плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов.

Объем прямой призмы

Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

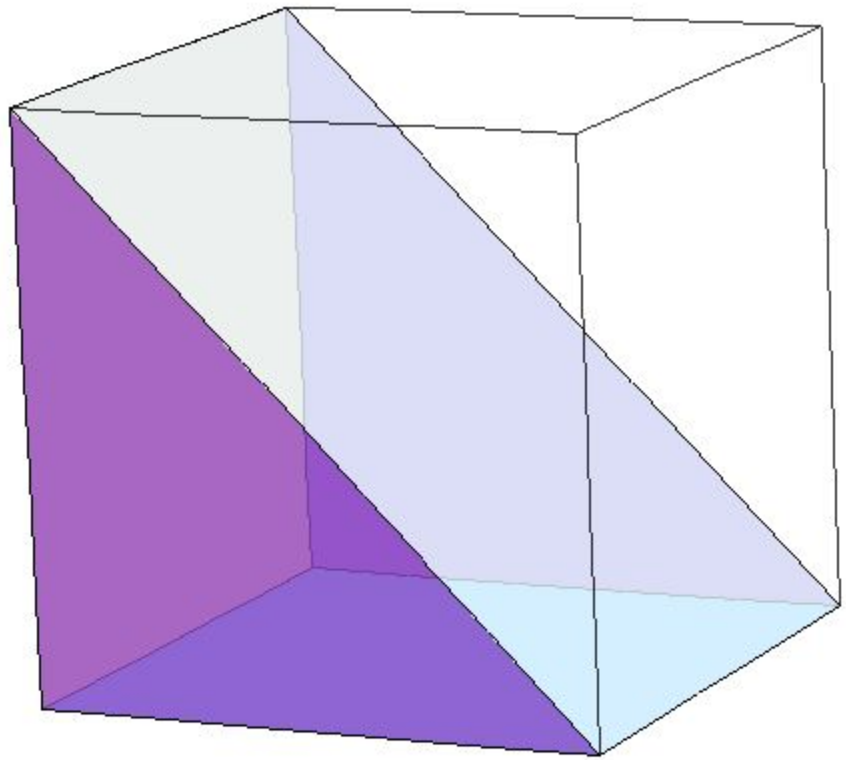
$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания, h – высота призмы.



Упражнение 1

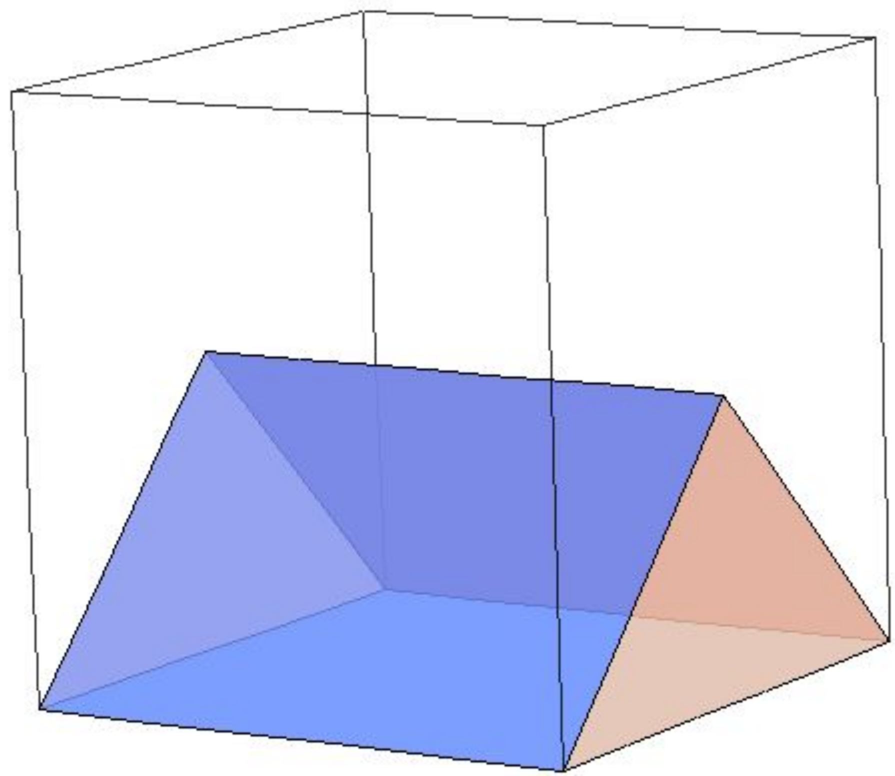
Найдите объем треугольной призмы, вершинами которой являются шесть вершин единичного куба.



Ответ: 0,5.

Упражнение 2

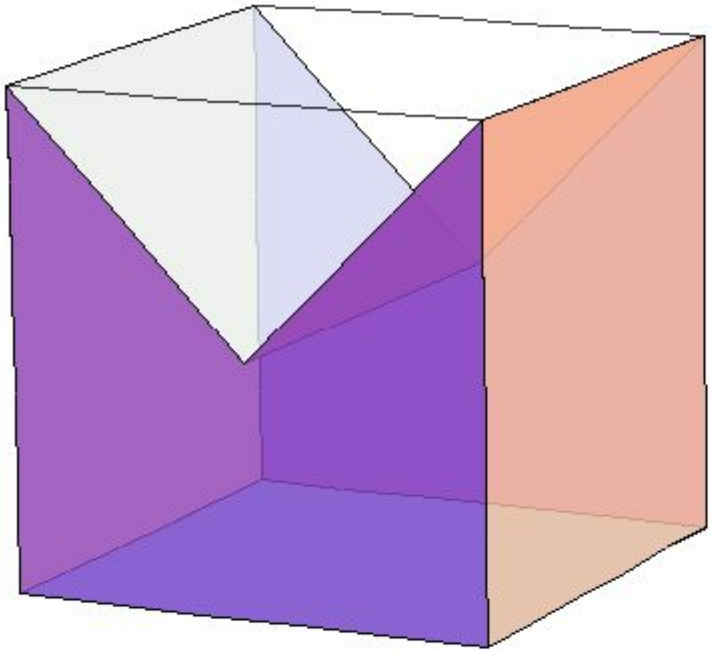
Найдите объем треугольной призмы, вершинами которой являются четыре вершины единичного куба и центры двух противоположных граней.



Ответ: 0,25.

Упражнение 3

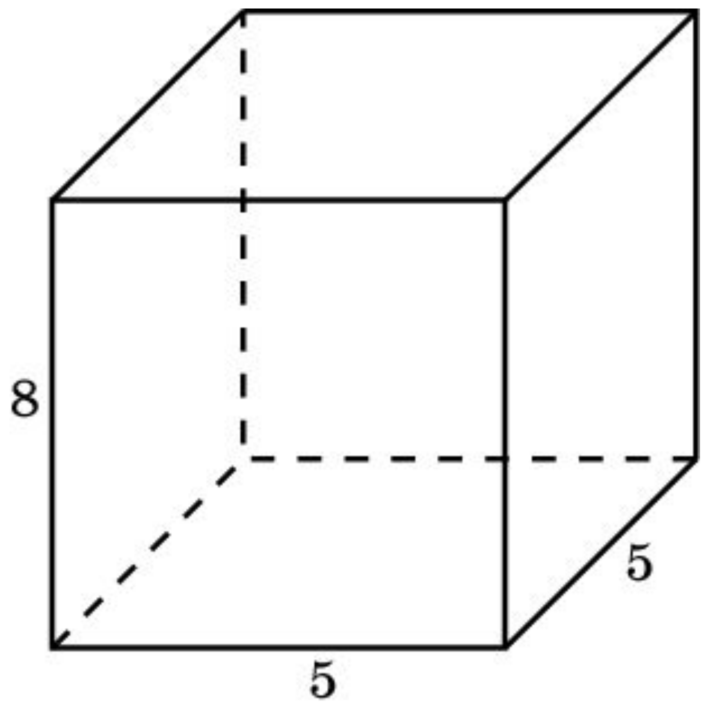
Найдите объем призмы, вершинами которой являются вершины единичного куба и центры двух противоположных граней.



Ответ: 0,75.

Упражнение 4

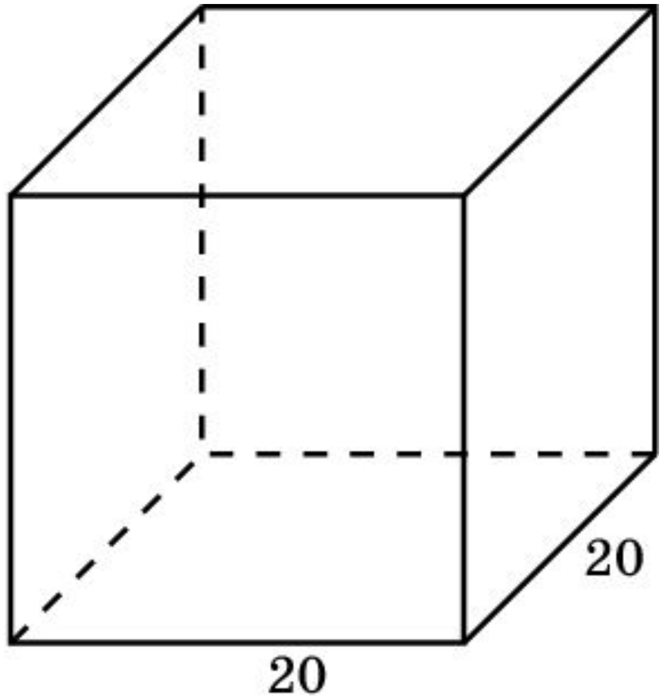
Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а боковое ребро 8 см.



Ответ: 200 см^3.

Упражнение 5

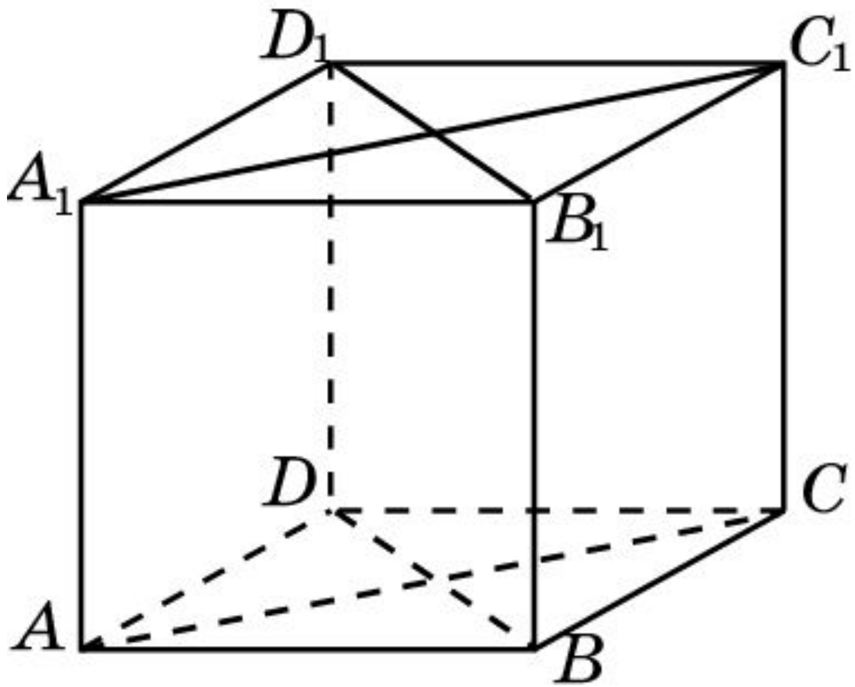
Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см, а объем 4800 см^2.



Ответ: 12 см.

Упражнение 6

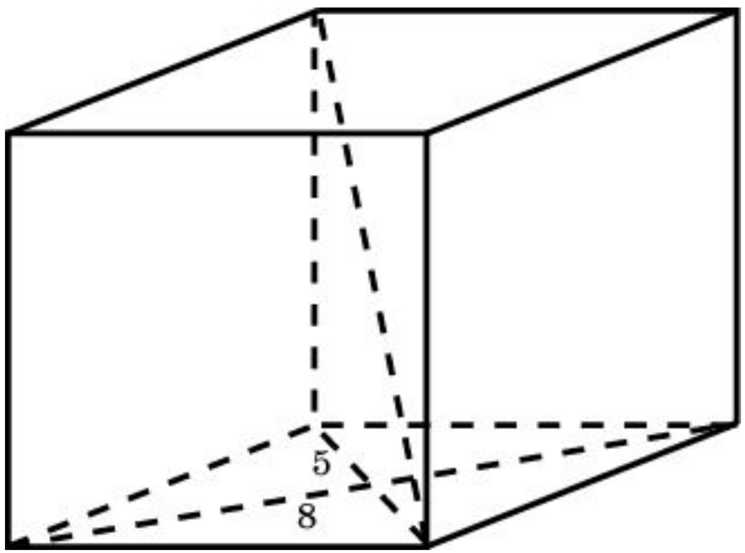
Основание прямой призмы – ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем призмы.



Ответ: 3 м^3.

Упражнение 7

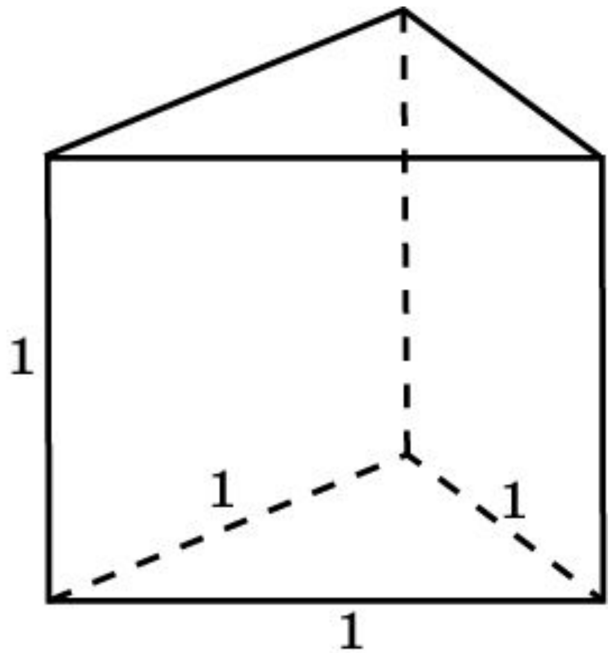
Основание прямой призмы – параллелограмм, стороны которого равны 8 см и 5 см образуют угол в 60°. Меньшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определите объем этой призмы.



Ответ: 140 см^3.

Упражнение 8

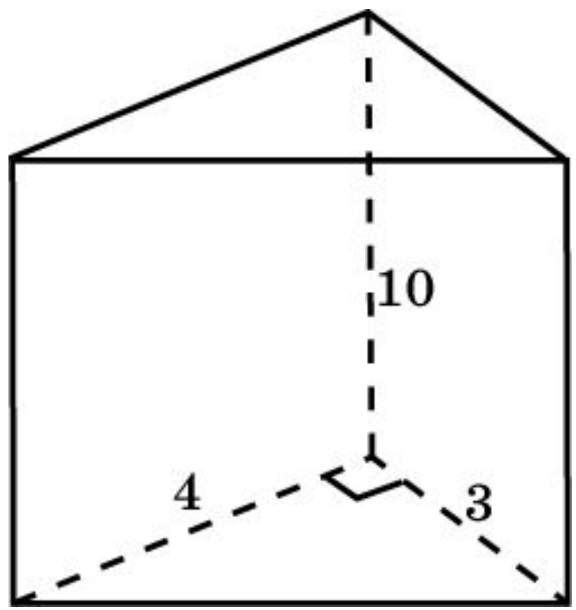
Найдите объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 9

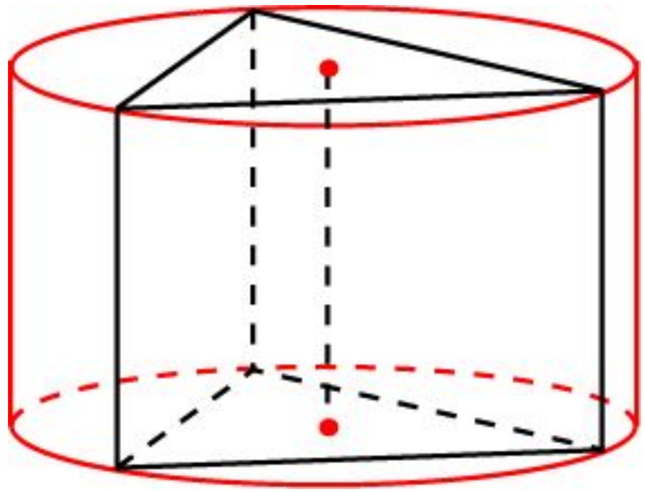
Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, боковое ребро равно 10 см. Найдите объем призмы.



Ответ: 60 см^3.

Упражнение 10

Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.

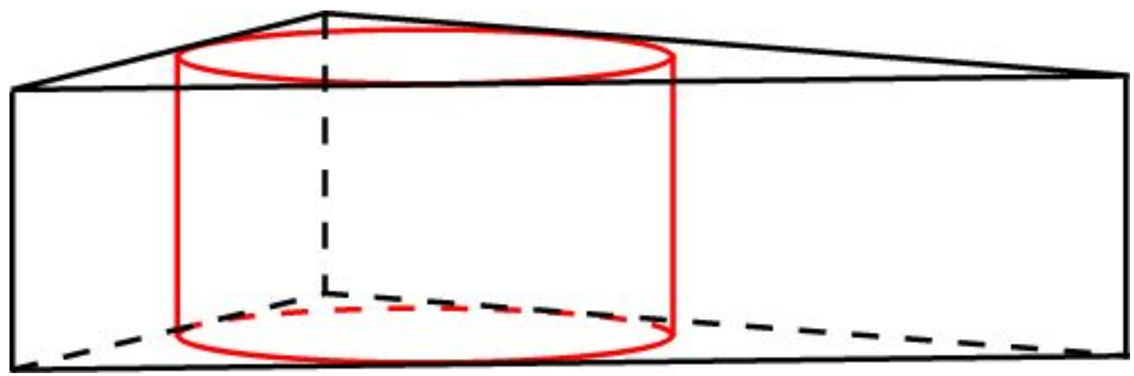


Решение. Сторона основания призмы равна $\sqrt{3}$. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 11

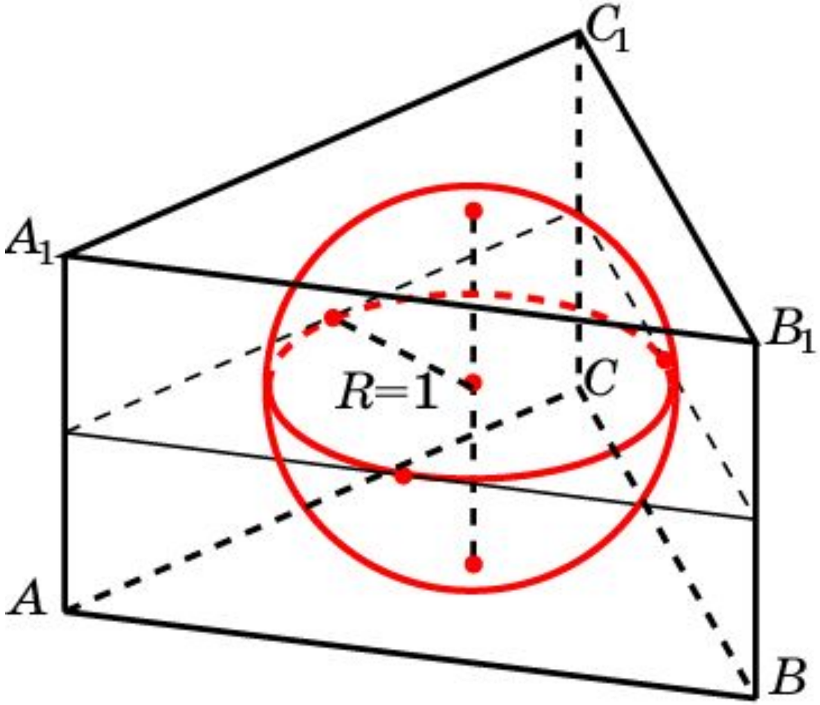
Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.



Решение. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}.$ Площадь основания равна $3\sqrt{3}.$ Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{3}.$

Упражнение 12

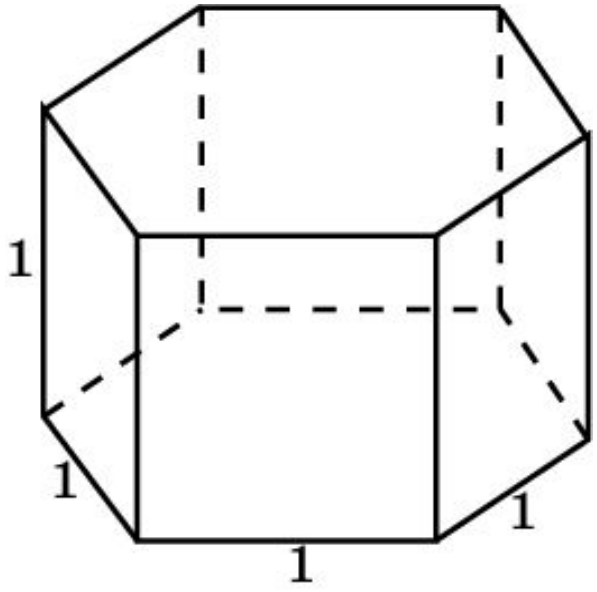
Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около единичной сферы.



Решение. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $3\sqrt{3}$. Высота призмы равна 2. Следовательно, объем призмы равен $6\sqrt{3}$.

Упражнение 13

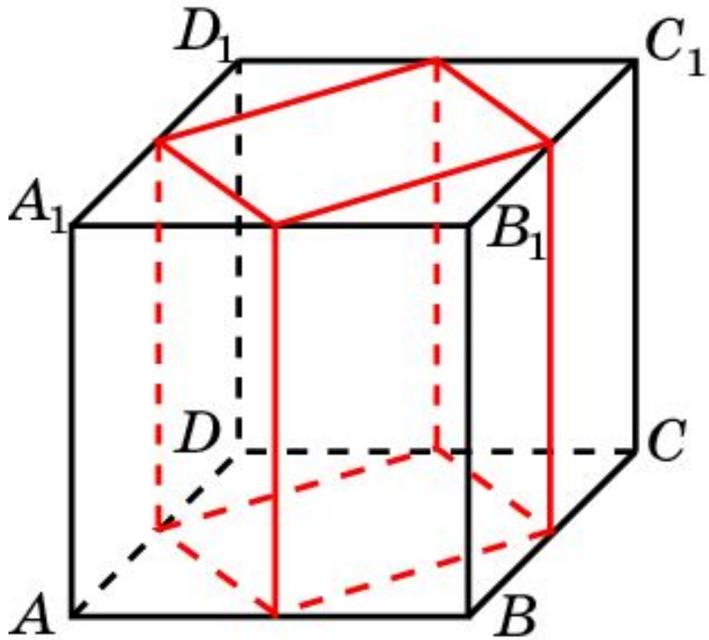
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 14

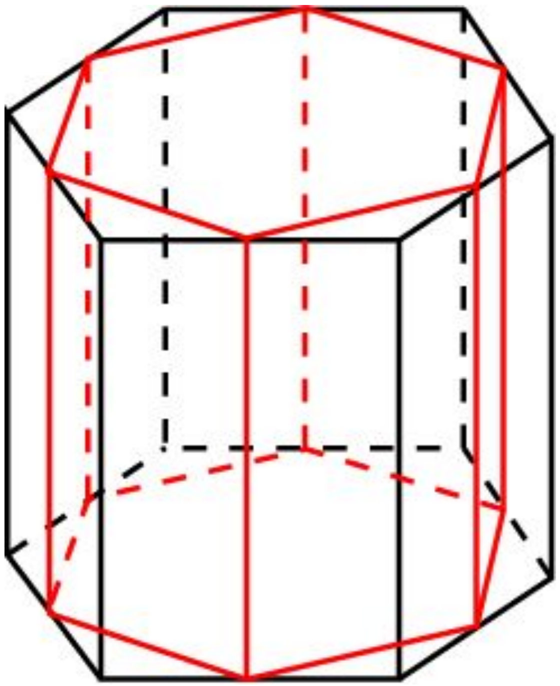
От единичного куба $A \ldots D_1$ отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$, параллельно ребру AA_1. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

Упражнение 15

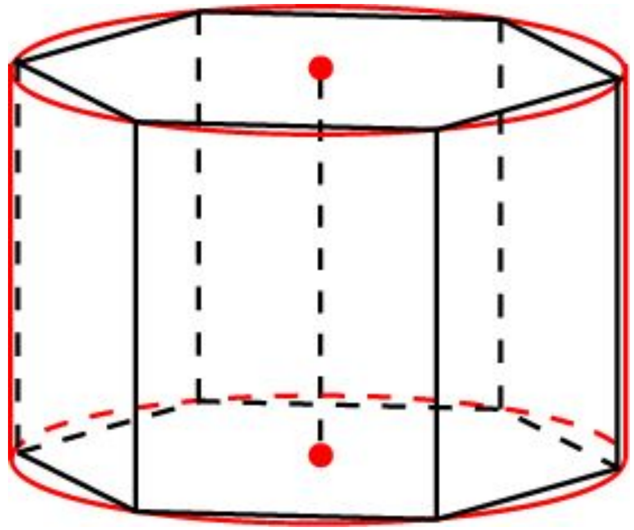
Объем правильной шестиугольной призмы равен V. Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.



Ответ: $\dfrac{3V}{4}$.

Упражнение 16

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.

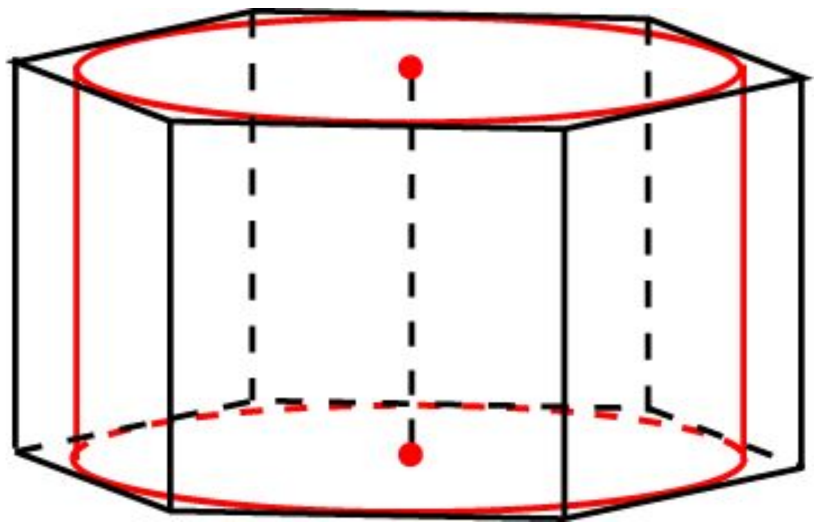


Решение. Сторона основания призмы равна 1. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 17

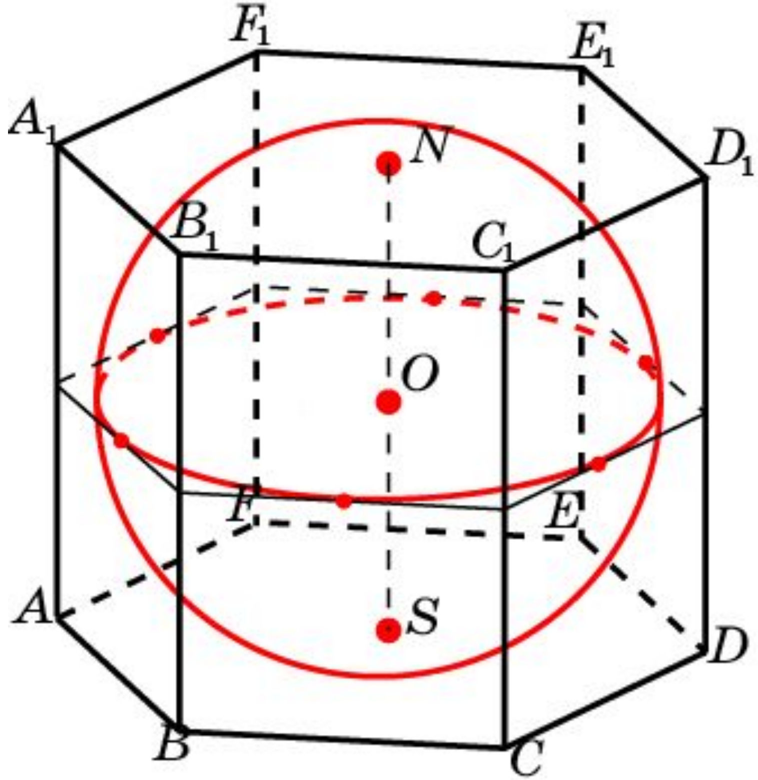
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.



Решение. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Площадь основания равна $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $2\sqrt{3}$.

Упражнение 18

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около единичной сферы.

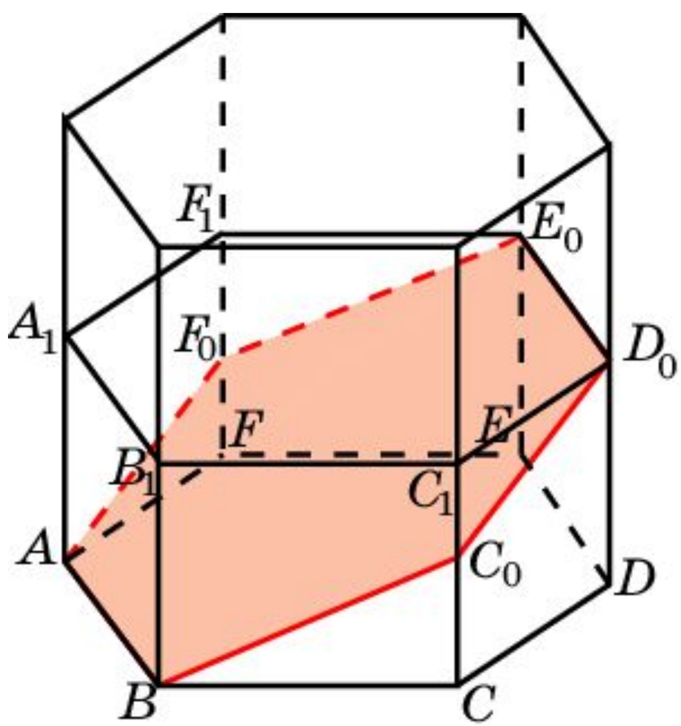


Решение. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Площадь основания равна $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна 2. Следовательно, объем призмы равен $4\sqrt{3}$.

Упражнение 19

В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 1, боковое ребро – 2. Через сторону основания проведено сечение плоскостью под углом 30° к этому основанию. Найдите объем части призмы, отсекаемой этой плоскостью.



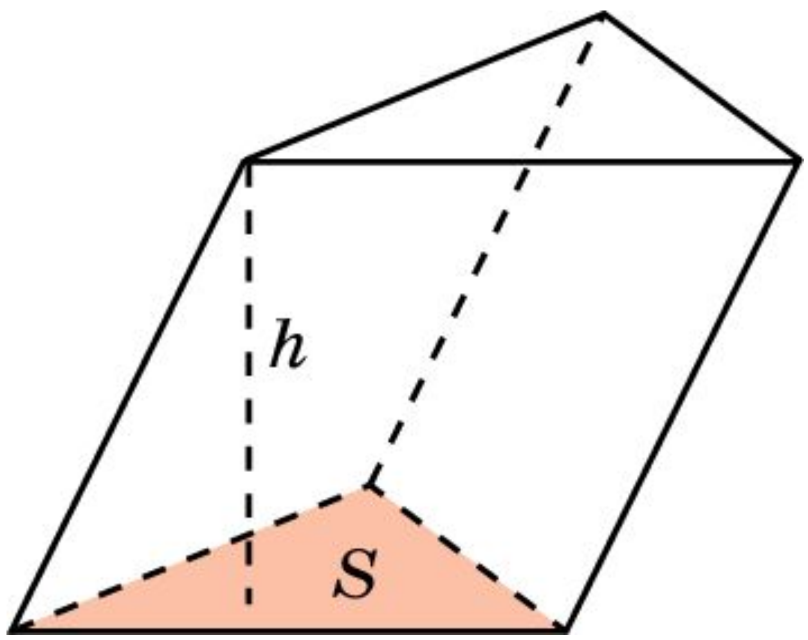
Решение. Искомый объем равен половине объема правильной шестиугольной призмы, сторона основания и высота которой равны 1. Следовательно, объем части призмы равен $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Объем наклонной призмы 1

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания призмы, h – ее высота.

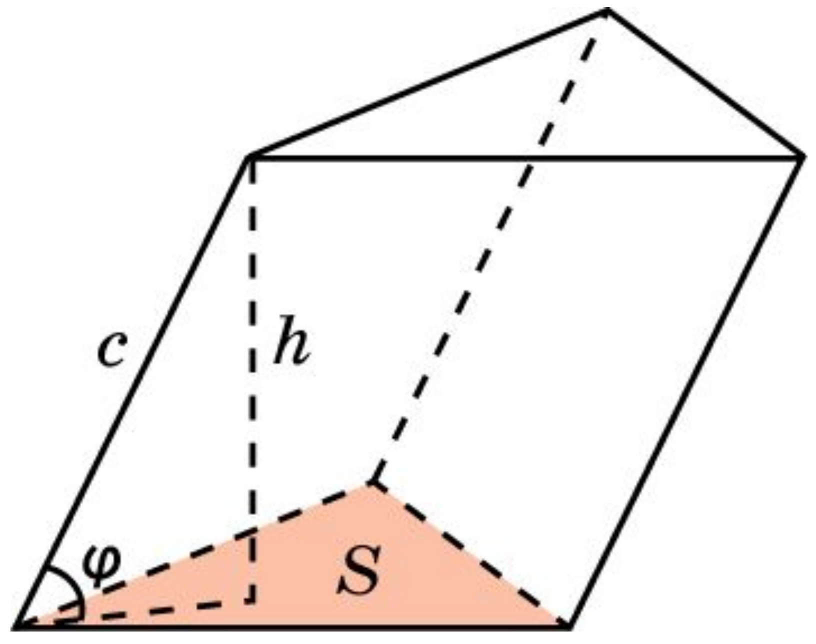


Объем наклонной призмы 2

Если боковое ребро призмы равно c и наклонено к плоскости основания под углом φ, то объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c \cdot \sin\varphi,$$

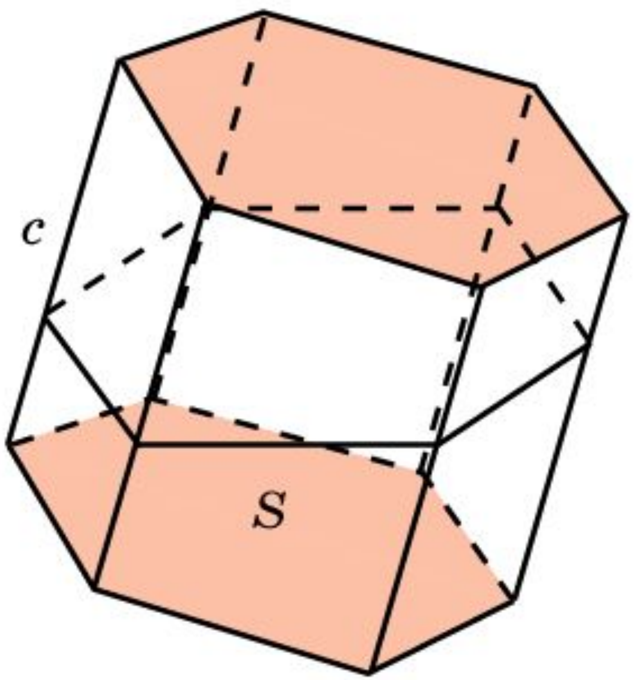
где S – площадь основания призмы.



Объем наклонной призмы 3

Если боковое ребро призмы равно c, а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади S, то объем призмы вычисляется по формуле

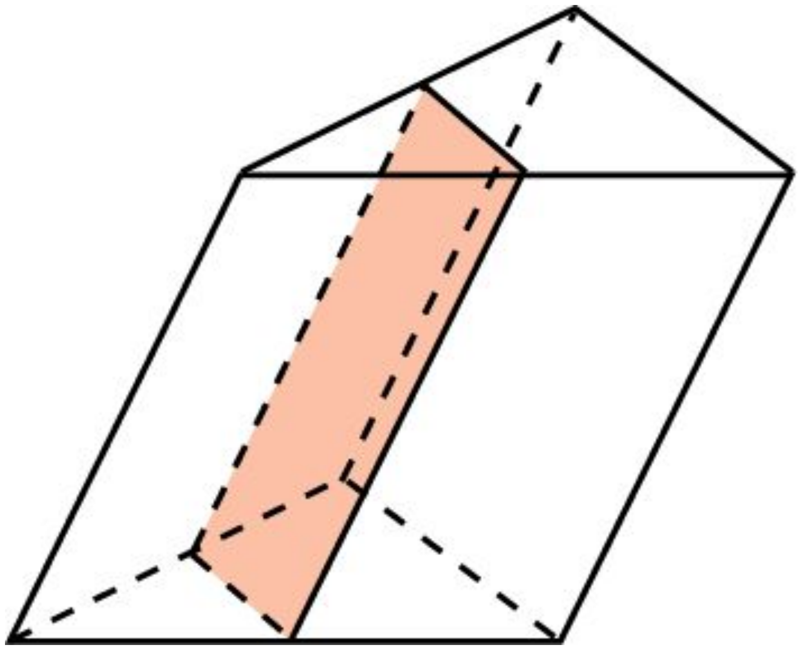
$$V = S \cdot c.$$



Действительно, если призму разрезать по сечению, и нижнюю часть параллельно перенести, поставив на верхнюю, то получим прямую призму с основанием площади S и боковым ребром c.

Упражнение 1

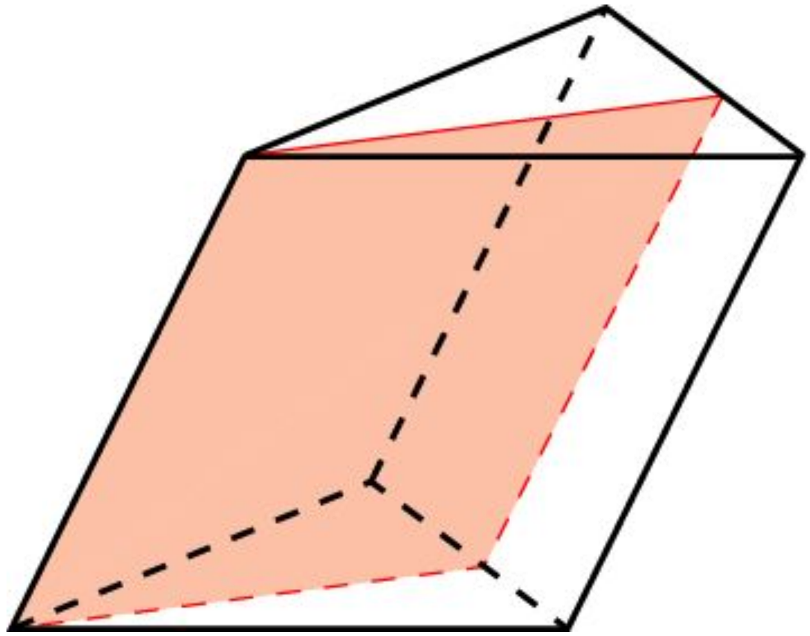
Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: 1:3.

Упражнение 2

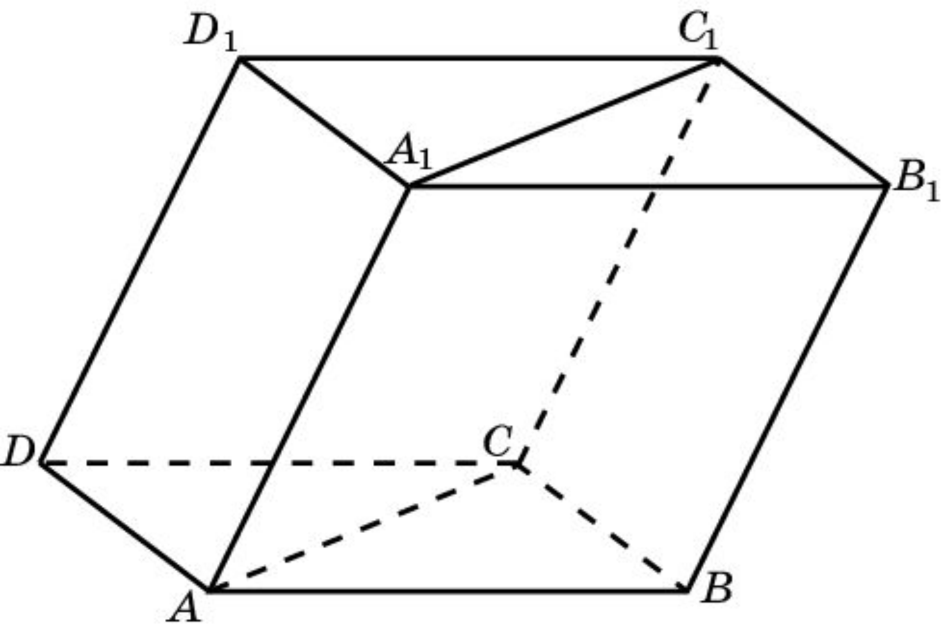
Треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противолежащей ему боковой грани в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: $m : n$.

Упражнение 3

В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q, а расстояние от нее до противоположного ребра равно d. Найдите объем призмы.

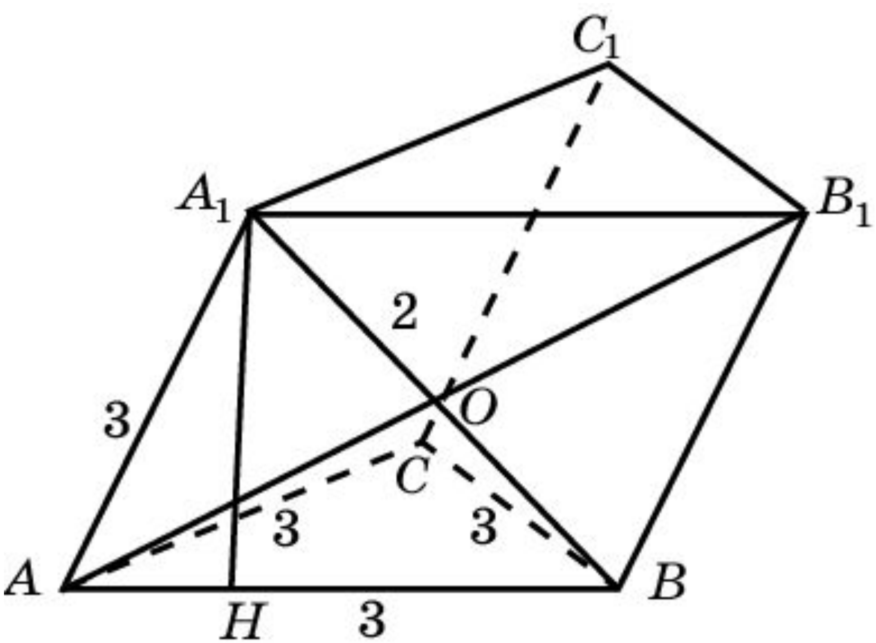


Решение. Пусть площадь грани BCC_1B_1 равна Q. Расстояние от этой грани до прямой AA_1 равно d. Достроим призму до параллелепипеда $A\ldots D_1$. Его объем равен Qd. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{1}{2}Q \cdot d$.

Ответ: $\frac{1}{2}Q \cdot d$.

Упражнение 4

Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.

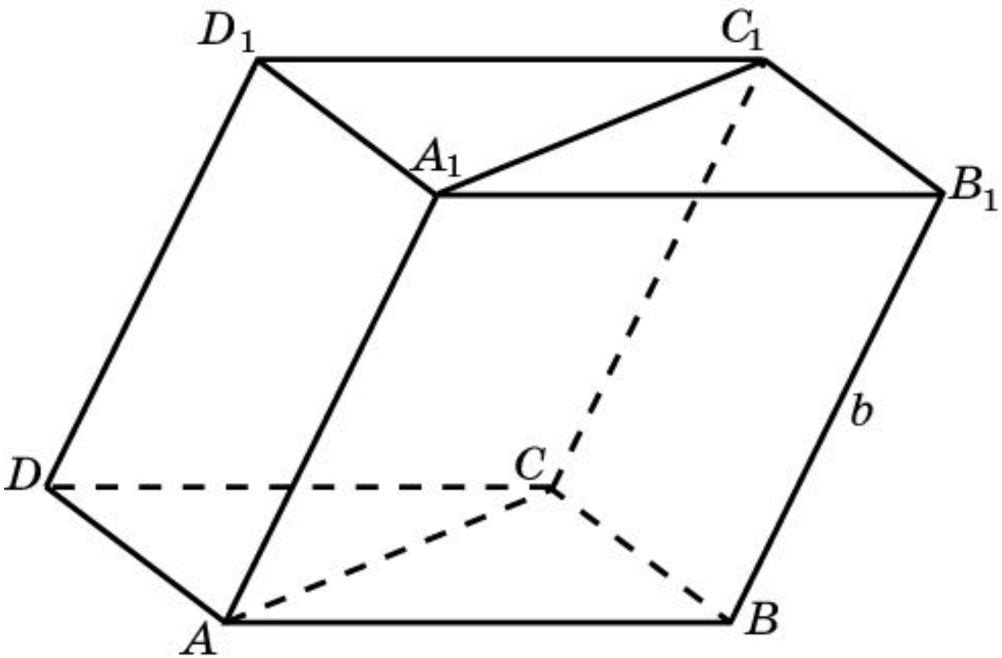


Решение. Проведем диагональ AB_1. Имеем: $AO = 2\sqrt{2}$, площадь ромба ABB_1A_1 равна $4\sqrt{2}$, высота A_1H равна $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Упражнение 5

В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное a. Площади этих граней равны S_1 и S_2. Найдите объем призмы.

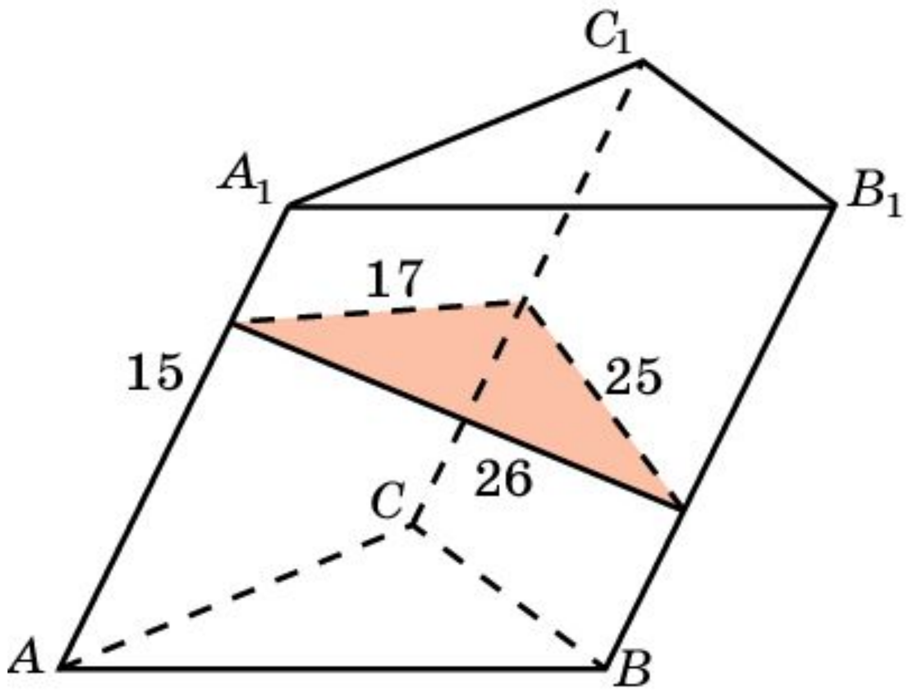


Решение. Достроим призму до параллелепипеда $A\ldots D_1$. Его объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{b}$. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Ответ: $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Упражнение 6

Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.

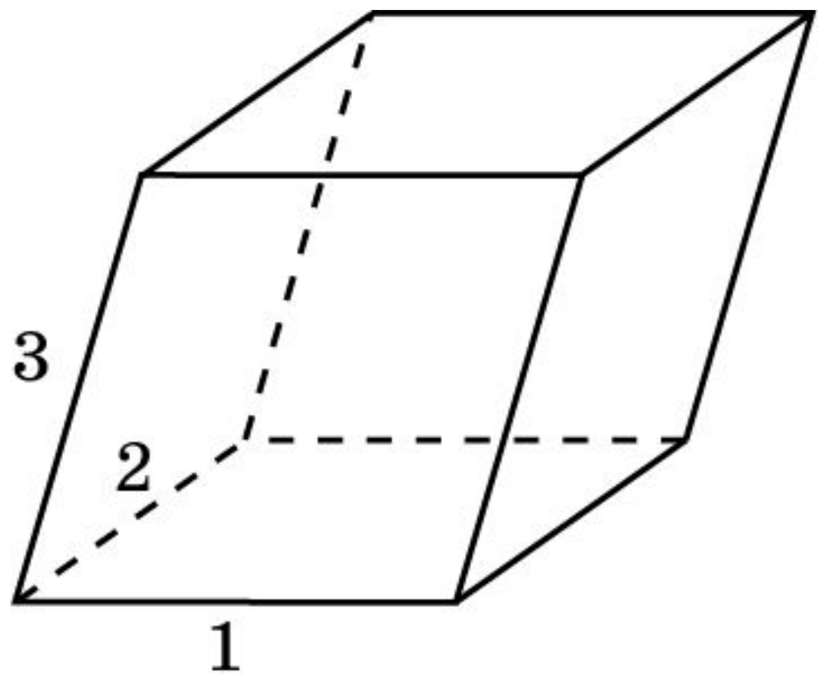


Решение. Проведем сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Используя формулу Герона найдем площадь сечения. Она равна 204 см^2. Объем призмы равен 3060 см^3.

Ответ: 3060 см^3.

Упражнение 7

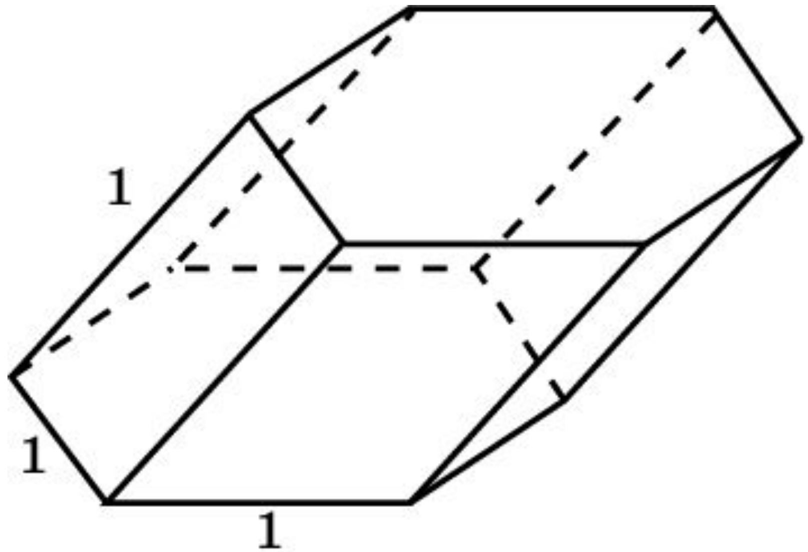
Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 1, 2 и острым углом 30°. Боковые ребра равны 3 и составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 8

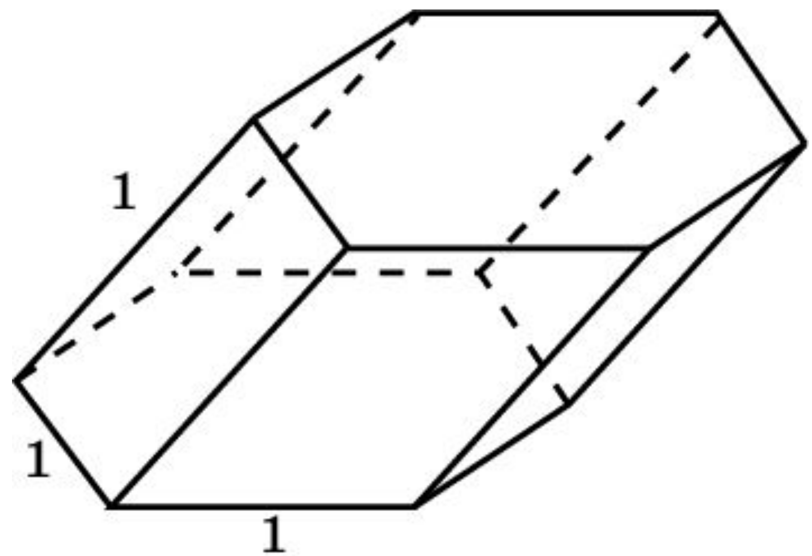
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30°.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 9

Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 1. Одна из боковых граней является прямоугольником и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

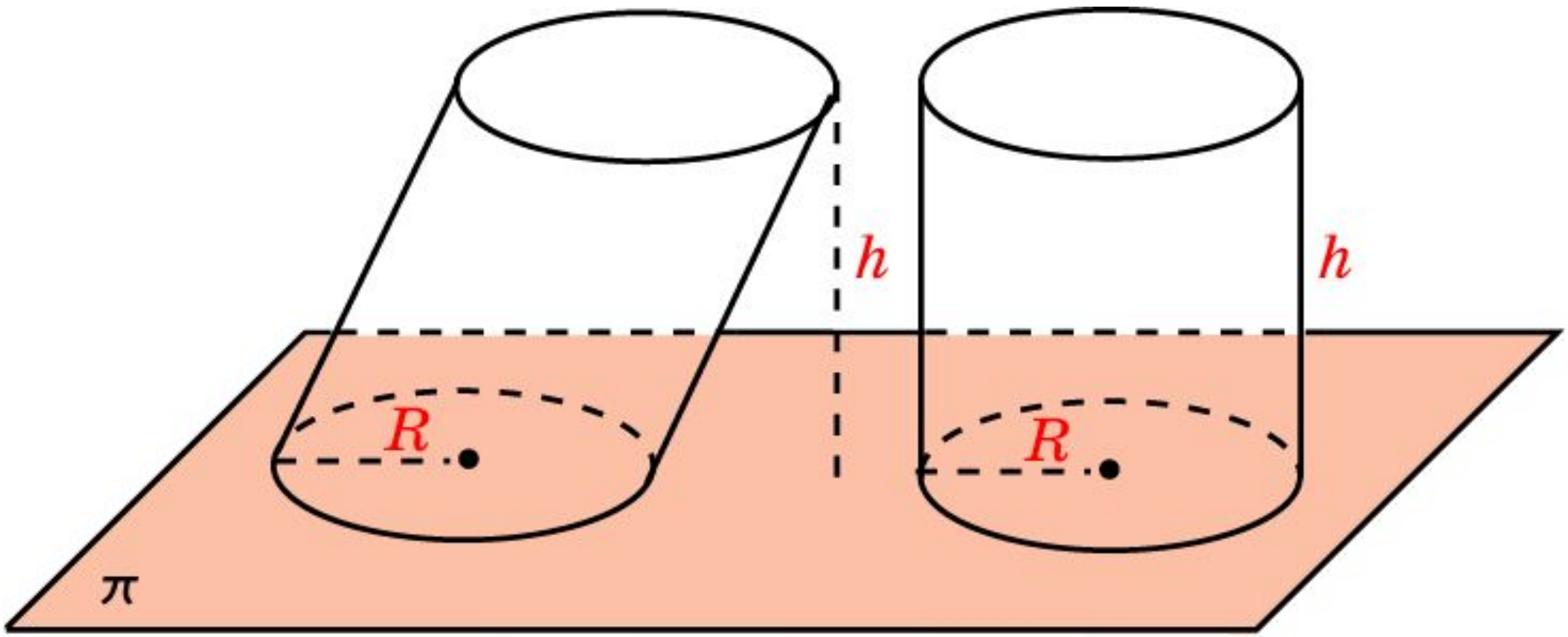
Упражнение 10

В основаниях призмы квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

Ответ: Да.

Объем цилиндра

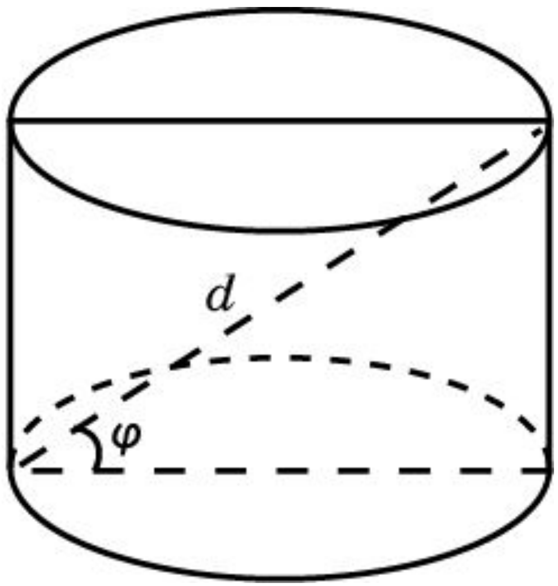
Объем цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле $V = \pi R^2 \cdot h$.



$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$$

Упражнение 1

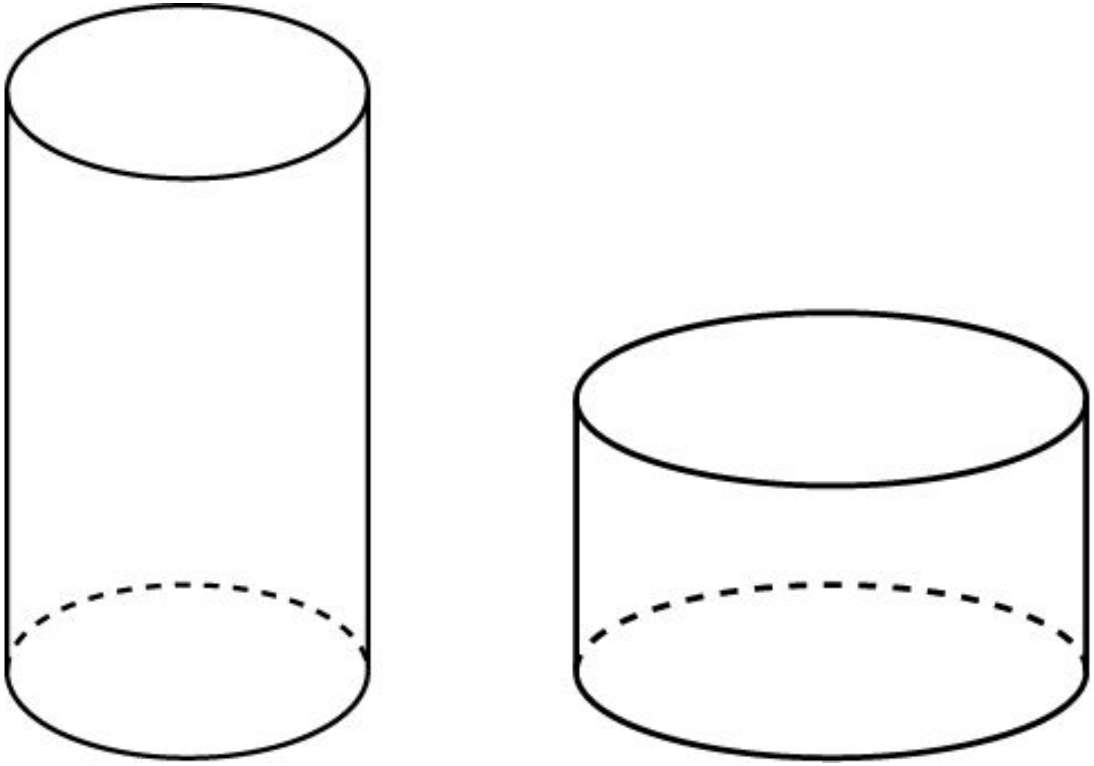
Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $V = \dfrac{\pi \cdot d^3}{4} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi.$

Упражнение 2

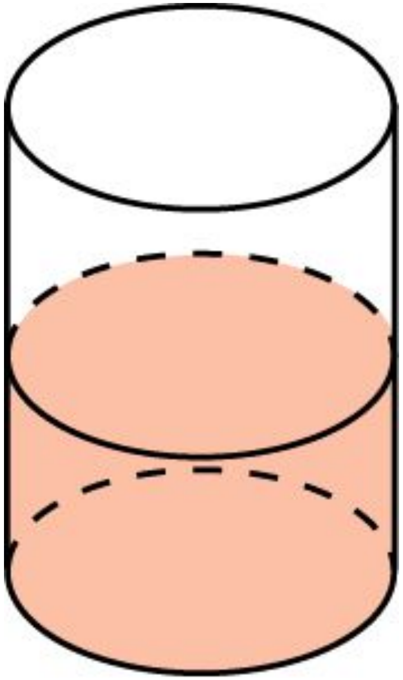
Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?



Ответ: Та, которая шире.

Упражнение 3

В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?



Ответ: 243π см^3.

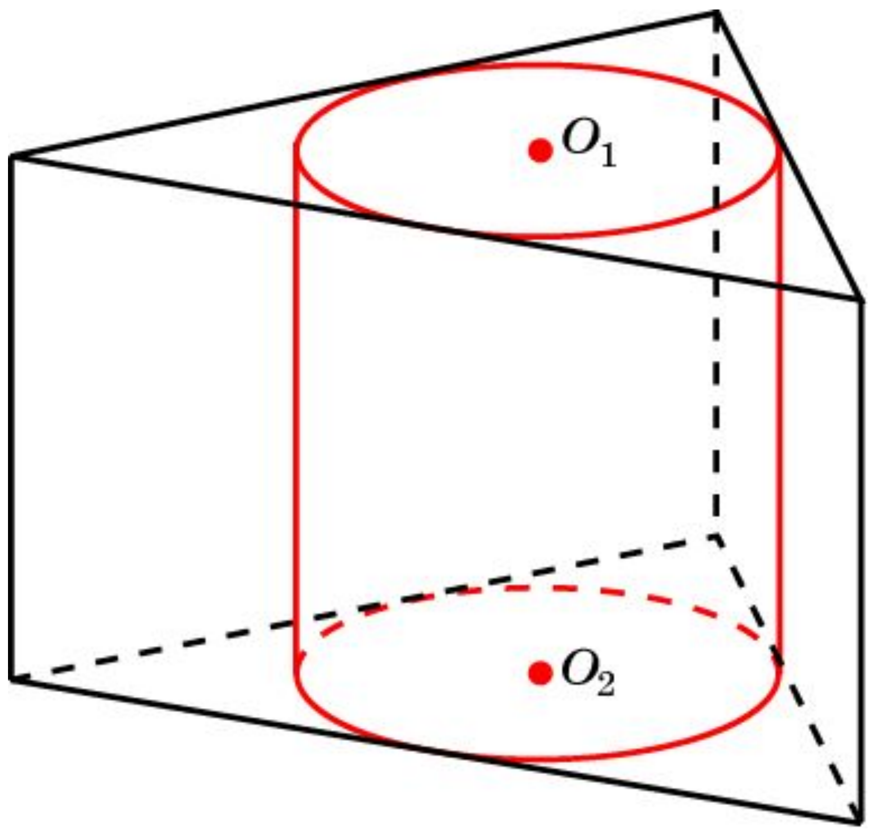
Упражнение 4

Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\frac{1}{\pi}$ или $\frac{1}{2\pi}$, в зависимости от выбора основания цилиндра.

Упражнение 5

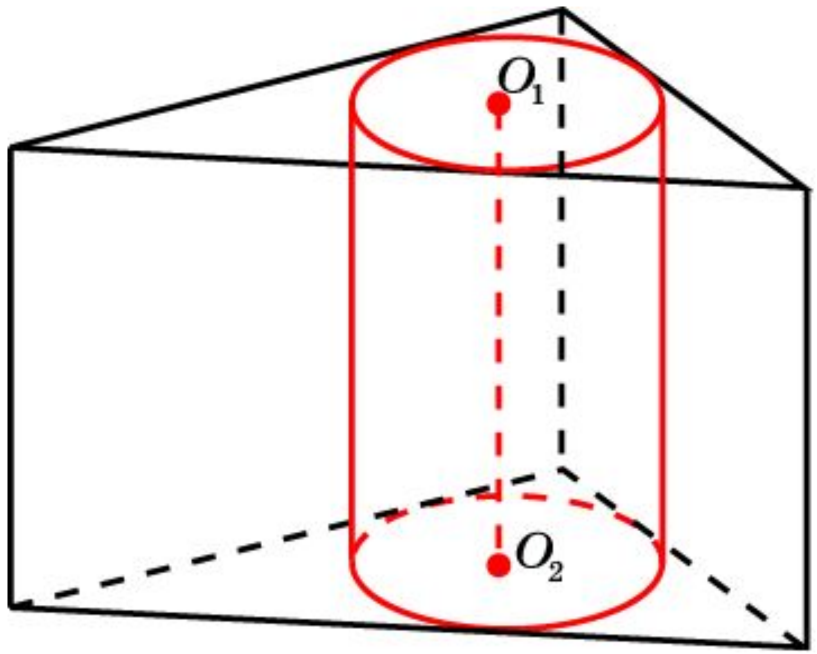
В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Упражнение 6

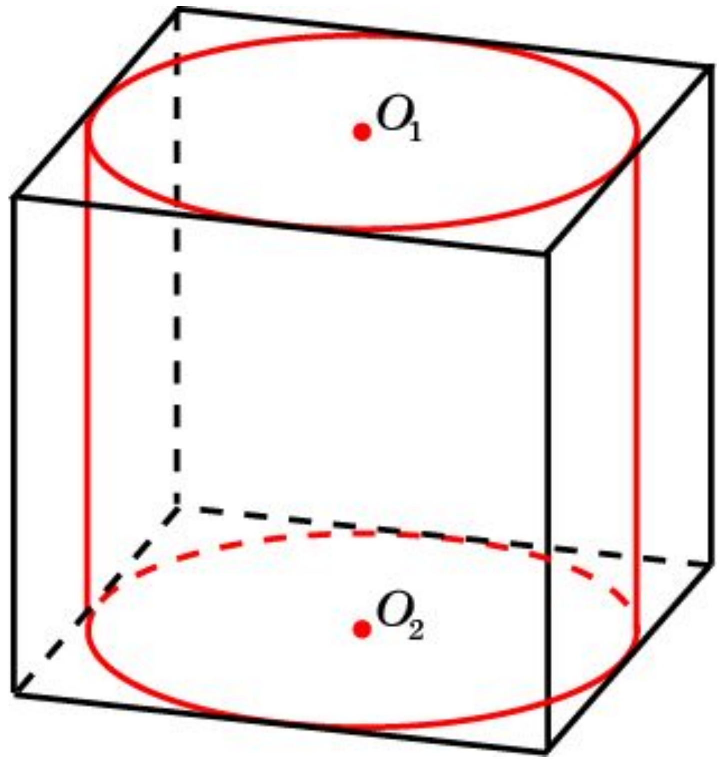
В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра призмы равны 1. Найдите объем цилиндра.



Ответ: 4 π.

Упражнение 7

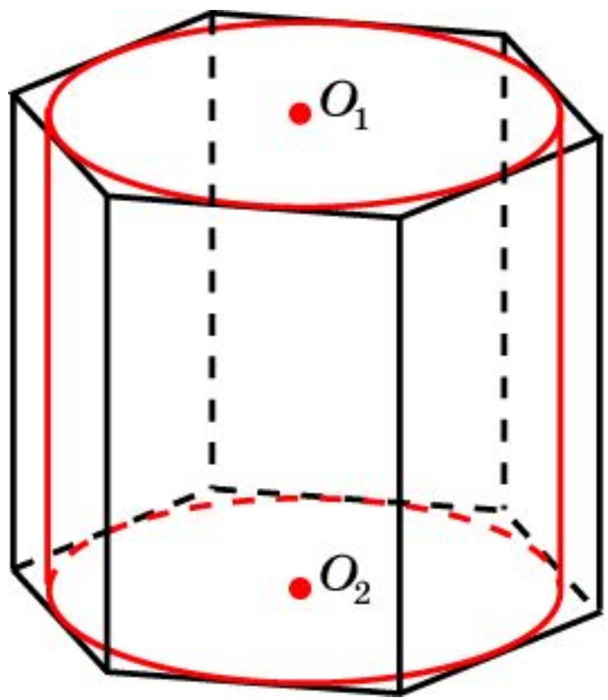
Найдите объем цилиндра, вписанного в единичный куб.



Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Упражнение 8

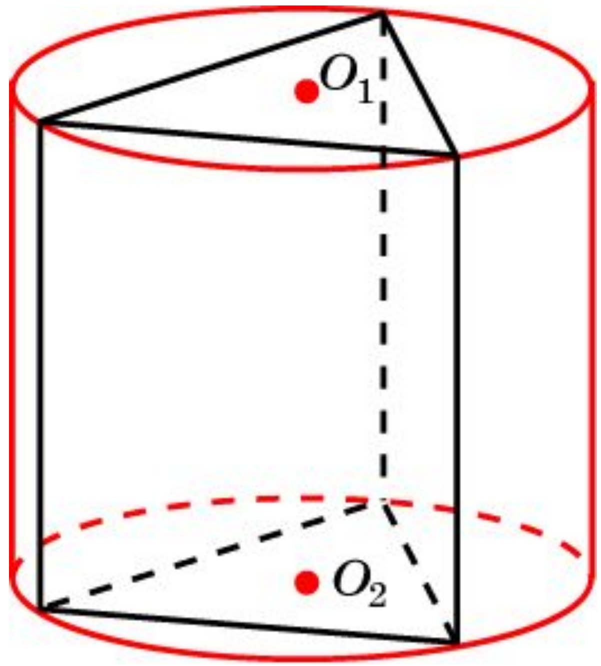
В правильную шестиугольную призму, со стороной основания 1 и боковым ребром 2, вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.



Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Упражнение 9

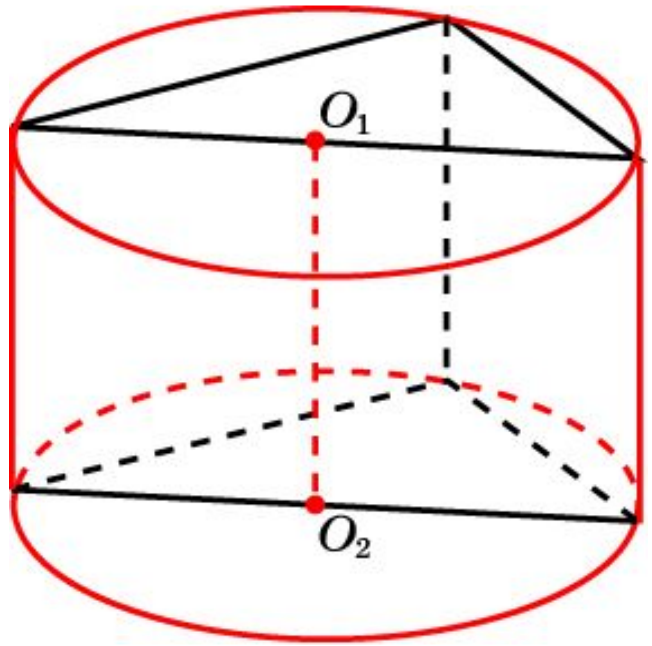
В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра равны 3. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: π.

Упражнение 10

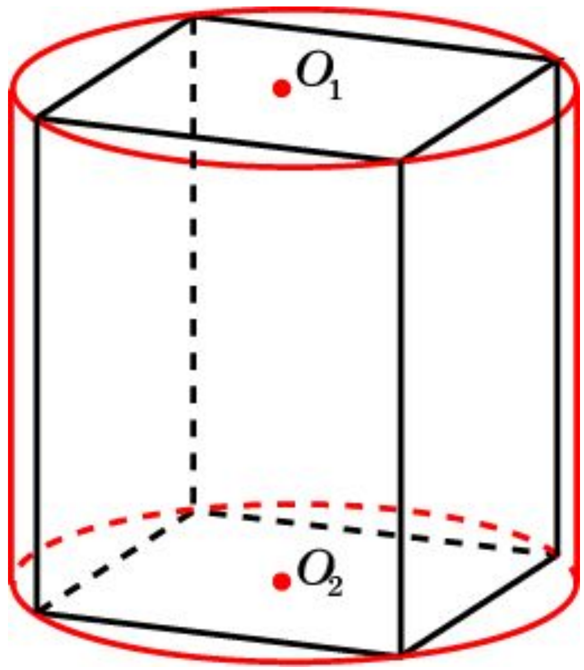
В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 5. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: 125π.

Упражнение 11

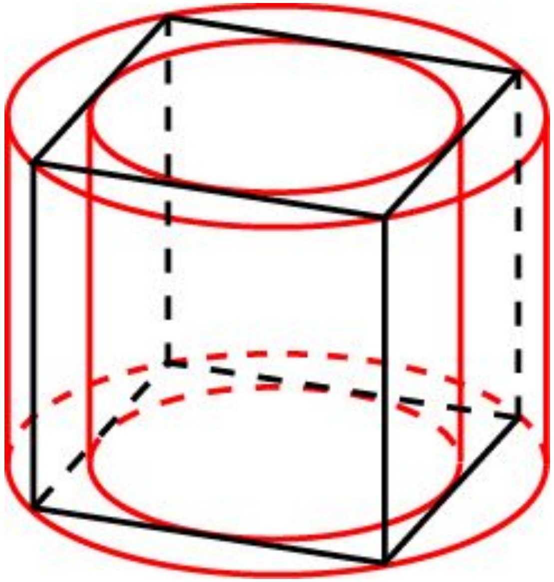
В основании прямой призмы квадрат со стороной 1. Боковые ребра равны 2. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: π.

Упражнение 12

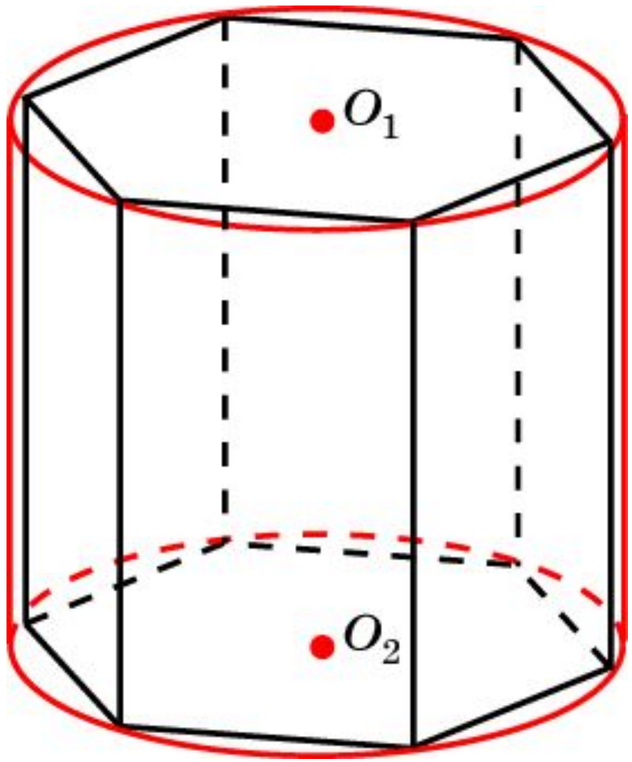
Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?



Ответ: В 2 раза.

Упражнение 13

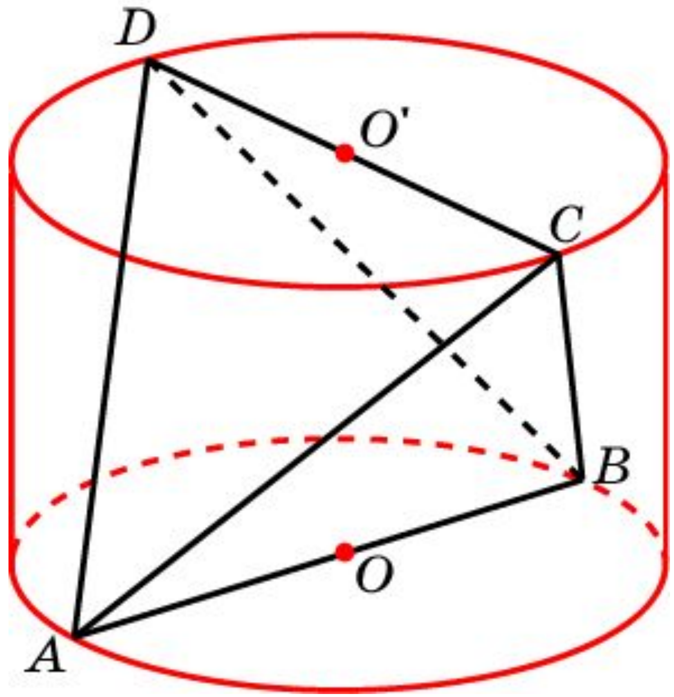
Около правильной шестиугольной призмы, со стороной основания 1, описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем этого цилиндра.



Ответ: 2π.

Упражнение 14

Найдите объём цилиндра, зная, что скрещивающиеся рёбра правильного единичного тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра.

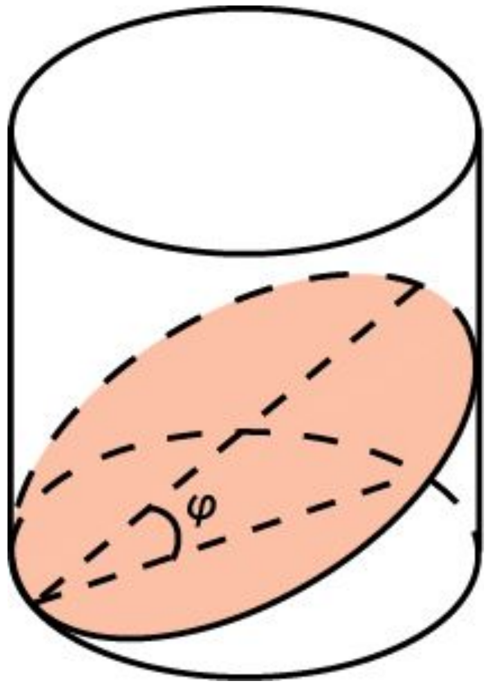


Решение: Площадь основания цилиндра равна $\frac{\pi}{4}$, а образующая равна расстоянию между скрещивающимися рёбрами правильного единичного тетраэдра, оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Искомый объём равен $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Упражнение 15

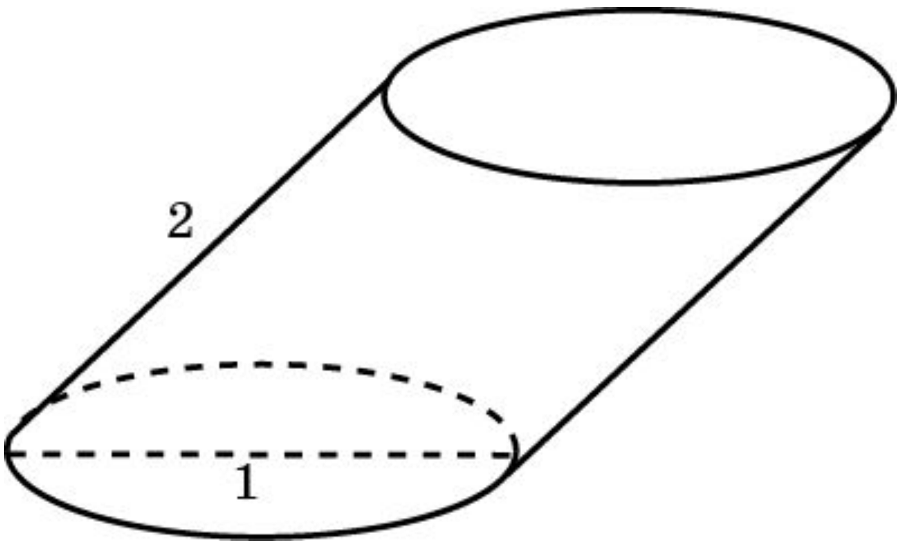
Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.



Ответ: $\pi R^3 \operatorname{tg}\varphi$.

Упражнение 16

Диаметр основания цилиндра равен 1. Образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 17

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

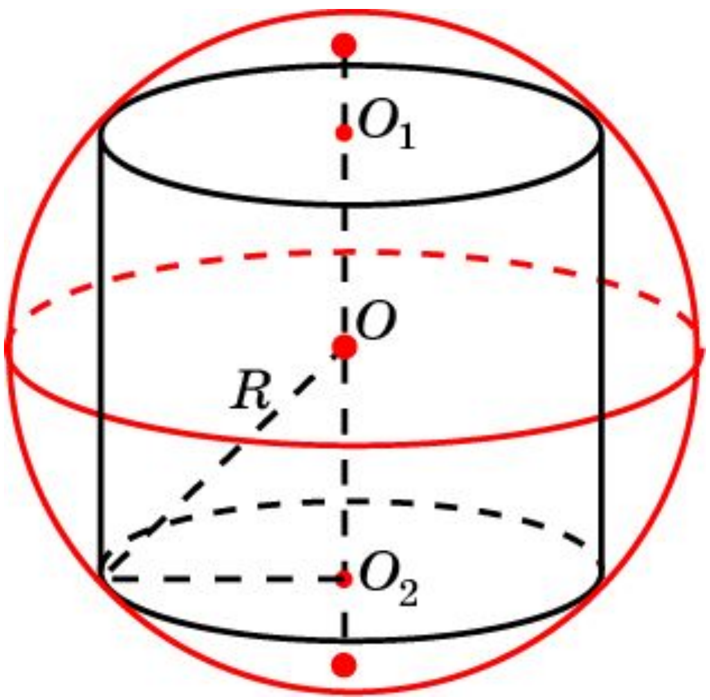
Упражнение 18

Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

Ответ: 2:1.

Упражнение 19*

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, вписанный в единичную сферу?

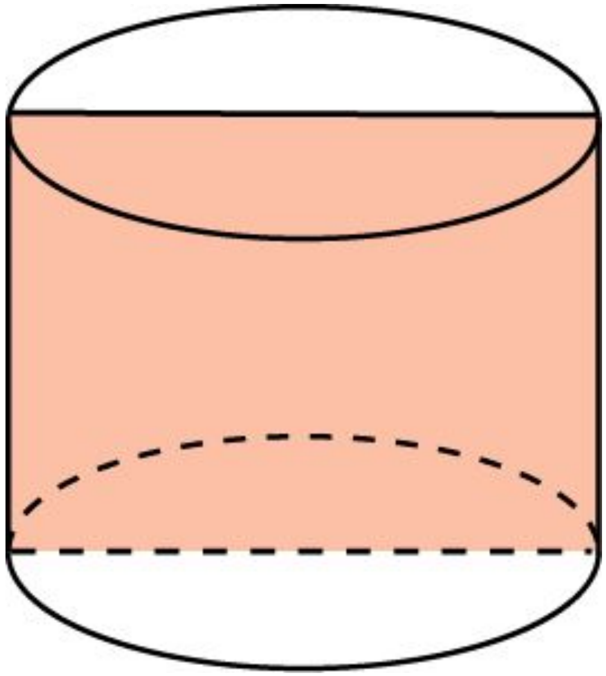


Решение: Обозначим x половину высоты цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра будет равен $\sqrt{1-x^2}$. Объем цилиндра равен $\pi(1-x^2)2x$. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)=\pi(1-x^2)2x$. на отрезке [0, 1] воспользуемся производной. Производная $f'(x)=\pi(2-6x^2)$ обращается в ноль в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, в которой функция принимает наибольшее значение, равное $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 20*

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 1?



Решение: Обозначим x диаметр основания цилиндра. Тогда его высота равна $\frac{1}{x}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi x}{4}$. Функция $f(x) = \frac{\pi x}{4}$ неограниченно возрастает и, следовательно, цилиндра наибольшего объема не существует.

Ответ: Наибольшего объема нет.