Характеристики звеньев систем автоматики

1. Динамические характеристики.
2. Установление характеристик
3. Структурное моделирование
4. Линейные и нелинейные звенья.
5. Преобразования Лапласа.
6. Передаточная функция.
7. Переходная характеристика.
8. Импульсная характеристика.
9. Частотные характеристики.
10. Типовые динамические звенья.
11. Статические характеристики.
12. Дискретные звенья.

Динамические характеристики

Характеристика (в технике) – графическое или табличное выражение зависимости одного параметра от другого. Зависимость одного параметра от другого можно также выразить аналитически в виде формулы или нескольких формул, по которым легко получить графическое или табличное выражение данной зависимости.

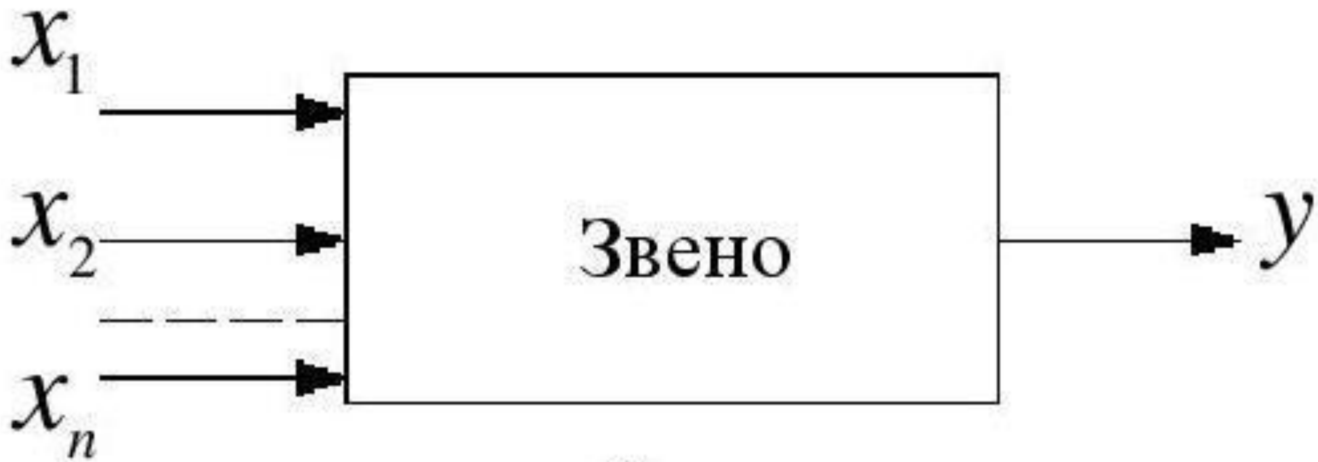
Характеристика звена системы автоматики – зависимость выходного сигнала звена от входных, или зависимость выхода от входов.

При функционировании систем автоматики в большинстве случаев сигналы изменяются во времени, причем изменения входных сигналов (входов) приводят к изменению выходных сигналов (выходов), но последние изменяются не мгновенно, а с течением времени. Такой режим работы звена называется **динамическим**. Зависимость выходного сигнала звена y от входных и от времени t называется **динамической характеристикой звена**.

$$y_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n, t) \qquad (1.3)$$

Многомерное звено

Многомерное звено с одним выходом



Одномерное звено

$$y = f(x, t) \tag{1.4}$$

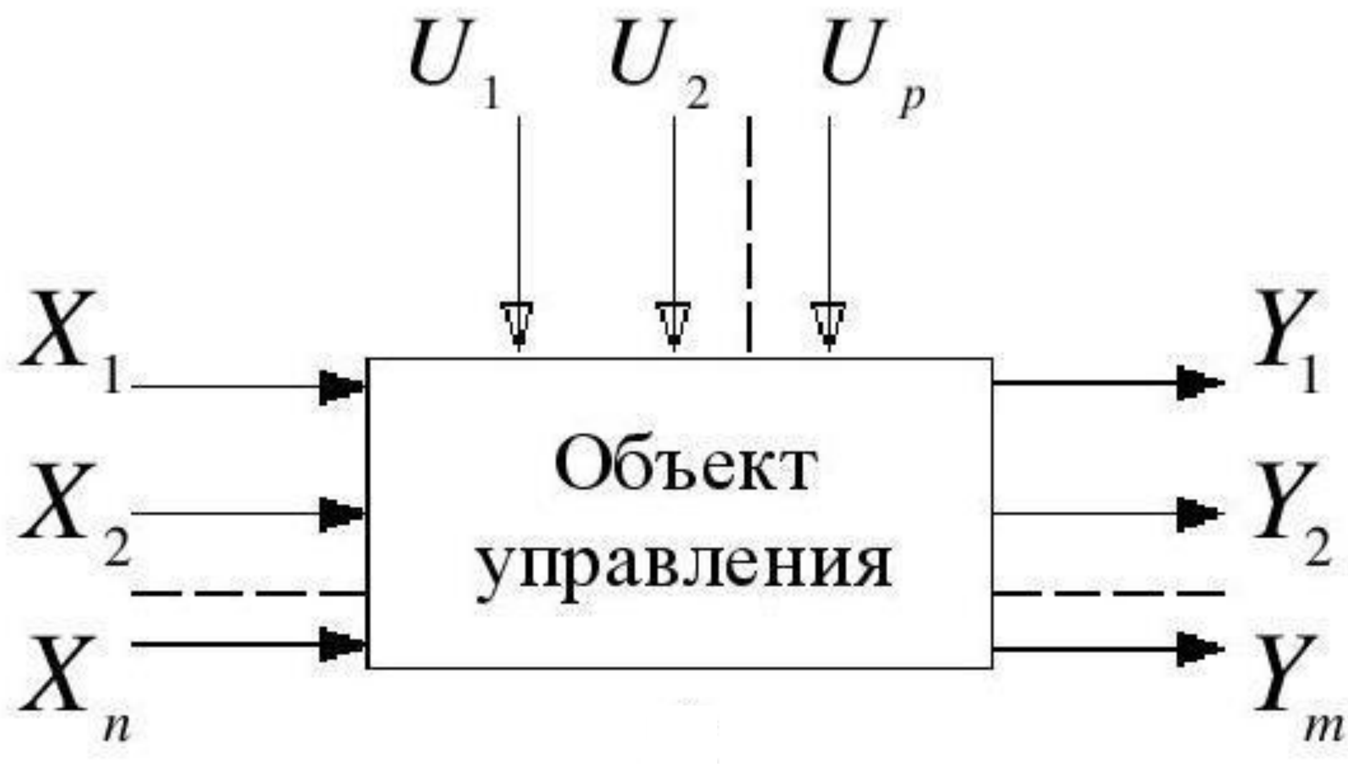
Временные характеристики

$$x_i = \varphi_i(t)$$

$$y_j = f_j(t)$$

Объекты контроля, защиты, управления также являются звеньями систем автоматики, их входные сигналы можно разделить на две группы:

- управляющие воздействия, создаваемые исполнительными устройствами системы управления;
- возмущения – воздействия окружающей среды, являющиеся, как правило, случайными функциями времени.



Выходными сигналами объектов контроля и управления являются переменные их состояния.

Переменные состояния объекта контроля, которые измеряются (наблюдаются), называют **контролируемыми параметрами**.

Переменные состояния объекта управления, которые в процессе управления надо изменять по заданному закону, поддерживать неизменными или в определенном интервале называются **управляемыми параметрами**.

$$Y_j = F_j\left(X_1, X_2, ..., X_n, U_1, U_2, ..., U_p, t\right) \quad (1.5)$$

$$Y = F\left(X, U, t\right) \quad (1.6)$$

Установление характеристик

Отдельные звенья описываются известными физическими законами, аналитическими зависимостями. Рассмотрим пример: звено состоит из терморезистора, включенного в цепь постоянного тока последовательно с обычным резистором, выход звена – сила тока I (А), входы: напряжение U (В) и переменное сопротивление терморезистора R (Ом).

Сила тока, напряжение и эквивалентное сопротивление цепи связаны законом Ома

$$I = \frac{U}{R_Э}$$

Так как терморезистор и обычный резистор включены в цепь последовательно, то эквивалентное сопротивление

$$R_Э = R + r$$

Для получения характеристики звена в численном виде необходимо выполнить реализацию математической (аналитической) модели звена, основой которой является полученная аналитическая зависимость. Математическая модель звена также включает неравенства, выражающие ограничения входов:

$$I = \frac{U}{R+r};\ 0 \le U < U_{П};\ R_0 \le R \le R_M \qquad (1.7)$$

Процесс разработки математической модели называется **математическим моделированием**.

Если звено не описывается известными физическими законами, аналитическими зависимостями, то установить характеристики звена можно проведением эмпирического исследования звена или структурным моделированием звена с последующей реализацией полученной математической модели звена на компьютере.

Эмпирическое исследование (эксперимент, наблюдение) может быть выполнено как на реальном звене, так и на физической модели звена. Эмпирическое исследование выполняют в соответствии с заранее разработанным планом, оно предусматривают измерения и регистрацию (запись) значений входов звена и соответствующих им значений выходов, при этом значения входов могут задаваться. Далее производиться математическая обработка результатов. Таким образом, устанавливаются характеристики звена в численном (табличном) виде, по ним можно построить графические или регрессионные зависимости выходов от входов. Процесс построения регрессионных зависимостей называется **аппроксимацией**. Построение математической модели на основе аппроксимации результатов эмпирического исследования называется **функциональным моделированием**.

Как правило, регрессионные зависимости представляются в виде полиномов. При одном входе x регрессионная зависимость выглядит следующим образом

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k \qquad (1.8)$$

Структурное моделирование

Структурное моделирование звена – разработка математической модели звена путем математического описания отдельных частей звена. Звено рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих подсистем. Подсистемы выделяют таким образом, чтобы их можно было описать известными физическими законами, аналитическими зависимостями.

Рассмотрим пример: звено электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения, выход звена – угловая скорость вращения вала, входы звена: напряжение, подаваемое в цепь якоря, момент нагрузки (сопротивления) на валу электродвигателя.

Электродвигатель – электромеханическая система, в которой можно выделить две подсистемы: электрическую – цепь якоря; механическую – вращающаяся часть, включающая вал электродвигателя, расположенные на нем элементы и вращающиеся части приводимого оборудования.

Электрическая подсистема описывается вторым законом Кирхгофа

$$u = u_L + u_r + E \tag{1.9}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad u_r = ri \qquad E = CF\omega$$

$$u = L\frac{di}{dt} + ri + CF\omega \tag{1.10}$$

Механическая подсистема описывается вторым законом Ньютона для вращательного движения твердого тела

$$M_Э - M_Н = J\frac{d\omega}{dt} \tag{1.11}$$

$$M_Э = C_M i$$

$$C_M i - M_H = J\frac{d\omega}{dt} \qquad (1.12)$$

Математическая модель электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения имеет вид:

$$u = L\frac{di}{dt} + ri + CF\omega;$$

$$C_M i - M_H = J\frac{d\omega}{dt}; \qquad (1.13)$$

$$t \geq 0;\, 0 \leq u \leq U_Д;\, M_{H0} \leq M_H \leq M_{HM}$$

Модель (1.13) является имитационной, она предусматривает нереверсивную работу электродвигателя, если электродвигатель работает реверсивно, то ограничение напряжения питания цепи якоря имеет вид

$$-U_Д \leq u \leq U_Д$$

В имитационных моделях присутствуют системы уравнений, которые решаются при реализациях моделей. Реализация имитационной модели на компьютере называется **имитационным моделированием**, она позволяет установить характеристики звена.

Если из уравнения (1.12) выразить параметр i и результат подставить в уравнение (1.10), то получим неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 \frac{d^2\omega}{dt^2} + a_1 \frac{d\omega}{dt} + a_0\omega = u + kM_H \qquad (1.14)$$

$$a_2 = \frac{LJ}{C_M} \qquad a_1 = \frac{rJ}{C_M} \qquad a_0 = CF \qquad k = -\frac{r}{C_M}$$

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{1.15}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2 a_0$$

$$D \geq 0$$

$$\omega = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + \frac{u + kM_H}{a_0} \tag{1.16}$$

$$z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_2} \qquad z_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}$$

Аналитическая модель электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения

$$\omega = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + \frac{u + kM_H}{a_0};$$

$$C_1 = \frac{z_2\left(u + kM_H - \omega_0 a_0\right)}{a_0\left(z_1 - z_2\right)};\ C_2 = \frac{z_1\left(\omega_0 a_0 - u - kM_H\right)}{a_0\left(z_1 - z_2\right)};$$

$$z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_2};\ z_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_2};\ D = a_1^2 - 4a_2 a_0; \qquad (1.17)$$

$$a_2 = \frac{LJ}{C_M};\ a_1 = \frac{rJ}{C_M};\ a_0 = CF;\ k = -\frac{r}{C_M};$$

$$t \geq 0;\ 0 \leq u \leq U_Д;\ M_{H0} \leq M_H \leq M_{HM}.$$

$$D < 0$$

$$\omega = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) + \frac{u + kM_H}{a_0} \quad (1.18)$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2}$$

Аналитическая модель электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения в данном случае имеет вид:

$$\omega = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) + \frac{u + kM_H}{a_0};$$

$$C_1 = \omega_0 - \frac{u + kM_H}{a_0}; C_2 = \alpha\left(\frac{u + kM_H}{a_0} - \omega_0\right);$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}; \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a_2}; D = a_1^2 - 4a_2 a_0; \tag{1.19}$$

$$a_2 = \frac{LJ}{C_M}; a_1 = \frac{rJ}{C_M}; a_0 = CF; k = -\frac{r}{C_M};$$

$$t \geq 0; 0 \leq u \leq U_Д; M_{H0} \leq M_H \leq M_{HM}.$$

Основой аналитической модели является аналитическая зависимость, связывающая выход с входами.

Структурное моделирование системы автоматики – разработка математической модели системы автоматики путем определения уравнений и аналитических зависимостей, связывающих входы и выходы звеньев, входящих в систему, преобразования уравнений и зависимостей, установления ограничений входов системы.

Линейные и нелинейные звенья

По виду дифференциальных уравнений, описывающих рабочие процессы, звенья систем автоматики делятся на две группы:

- линейные;
- нелинейные.

Линейные звенья описываются линейными дифференциальными уравнениями, или дифференциальными уравнениями, которые посредством введения допущений можно привести к линейным. **Нелинейные звенья** описываются квазилинейными и нелинейными дифференциальными уравнениями.

Линейные дифференциальные уравнения решаются как аналитически, так и численными методами на компьютерах. Для установления характеристик и оценки свойств нелинейных звеньев используют методы исследования нелинейных систем.

В общем виде линейное ОДУ звена при n входах выглядит следующим образом

$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ b_p \frac{d^p x_j}{dt^p} + b_{p-1} \frac{d^{p-1} x_j}{dt^{p-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx_j}{dt} + b_{0j} x_j + c_j \right\} \tag{1.20}$$

Квазилинейное дифференциальное уравнение

$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + F(y) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ b_p \frac{d^p x_j}{dt^p} + b_{p-1} \frac{d^{p-1} x_j}{dt^{p-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx_j}{dt} \right\} + f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.21}$$

Линеаризация замена функций $F(y)$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейными выражениями

$$a_0 y + c_1$$

$$b_{01} x_1 + b_{02} x_2 + \ldots + b_{0n} x_n + c_2$$

1. Применение допущений. Оно заключается, в том, что некоторые члены в линеаризуемых функциях могут быть незначимыми, то есть пренебрежение ими не приводит к искажениям значений функции. Например, напряжение на выходе потенциометра является функцией перемещения ползунка *d*

$$u_{ПМ} = \frac{U_П d}{l + \frac{d(R - rd)}{R_Н}} \tag{1.22}$$

Если принять допущение, что $R - rd << R_Н$

$$u_{ПМ} = \frac{U_П d}{l}$$

При малых значениях *y* можно принять $\sin y = y$.

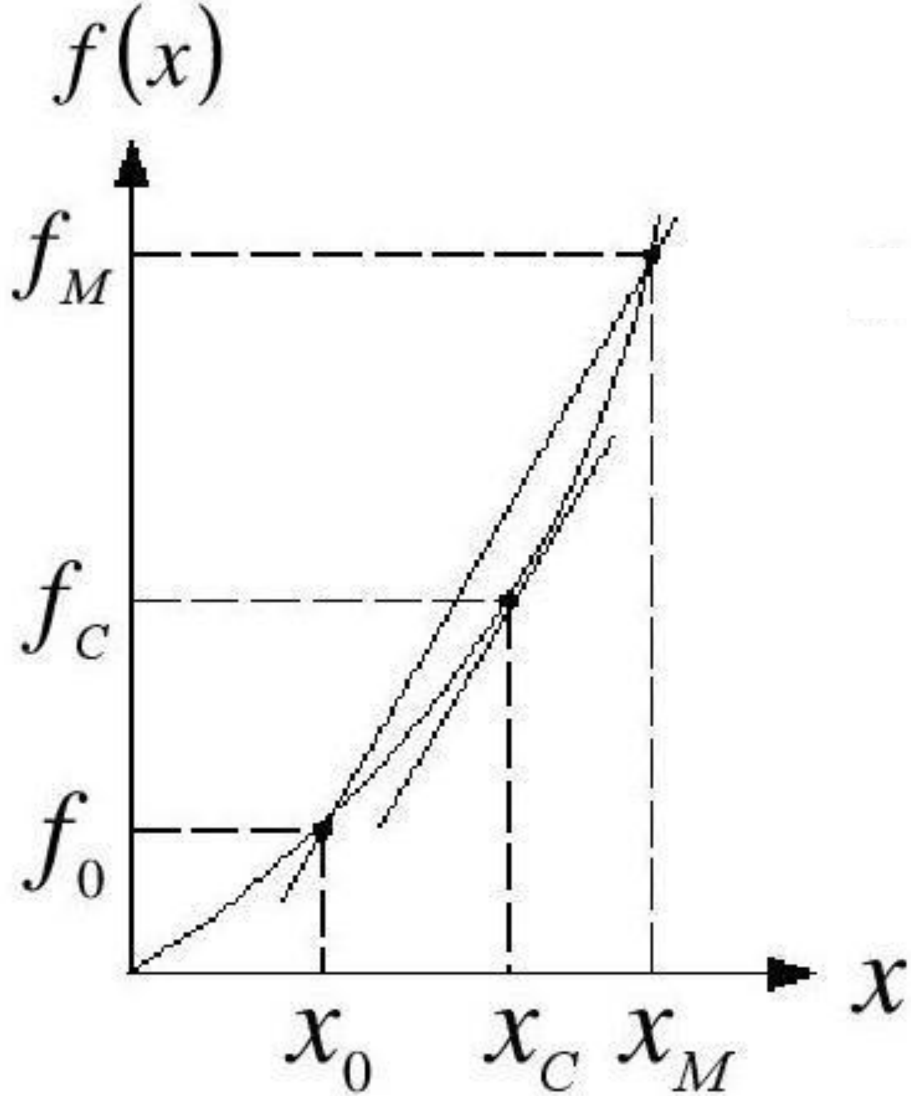
Применение допущений представляет собой простую математическую операцию, но оно может быть реализовано в редких случаях.

2. Использование методов линеаризации: хорды и касательной, малых колебаний.

Уравнение прямой, в данном случае хорды, имеет вид $kx + q$

$$k = \frac{f_M - f_0}{x_M - x_0}$$

$$q = f_0 - \frac{f_M - f_0}{x_M - x_0} x_0$$



Уравнение касательной $kx + q$

$$k = \frac{df\left(x_C\right)}{dx}$$

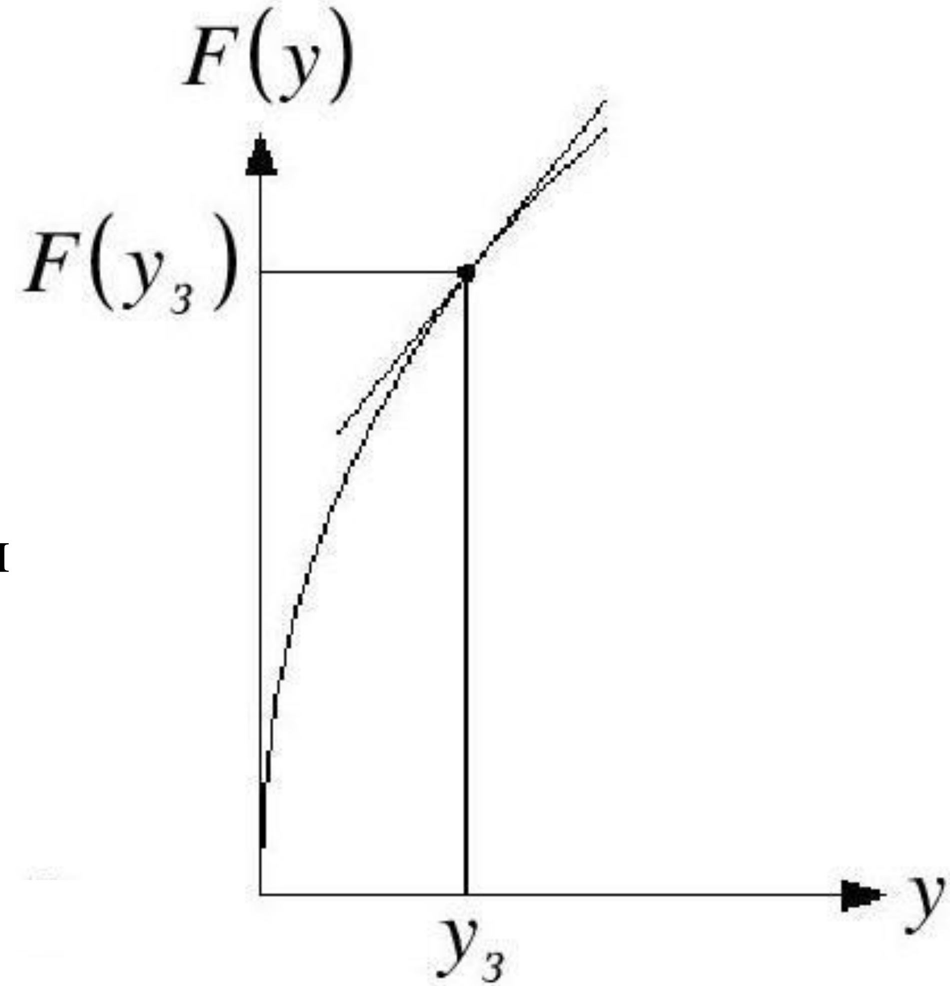
$$q = f_C - kx_C$$

$$f_C = 0{,}5\left(f_M + f_0\right)$$

Для получения более точного линейного выражения вида угловой коэффициент k следует определить как среднее арифметическое из значений угловых коэффициентов хорды и касательной, а свободный член q – как среднее арифметическое из значений свободных членов хорды и касательной.

Метод малых колебаний используется в случаях, когда значение функции выхода мало отклоняется от некоторого заданного значения $y_з$

Заданному значению выхода соответствуют определенные входы: $h_1, h_2, ..., h_n$



Отклонения входов и выхода:

$$x_1, x_2, ..., x_n \quad \text{и} \quad y$$

Входы и выход в динамическом режиме:

$$h_j + x_j$$

$$y_з + y$$

Разложение функций в ряд Тейлора до членов с первыми производными:

$$F(y) = F(y_з) + y\frac{dF(y_з)}{dy}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(h_1, h_2, ..., h_n) + x_1\frac{\partial f(h_1, h_2, ..., h_n)}{\partial x_1} +$$

$$+ x_2\frac{\partial f(h_1, h_2, ..., h_n)}{\partial x_2} + ... + x_n\frac{\partial f(h_1, h_2, ..., h_n)}{\partial x_n}.$$

Преобразования Лапласа

Преобразования Лапласа используются для получения аналитических решений линейных дифференциальных уравнений и оценки устойчивости линейных САУ.

Прямое преобразование Лапласа

$$f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \qquad s = \alpha + i\omega$$

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

$$i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

Оригиналы и изображения функций по Лапласу

Оригинал $f(t)$	Изображение по Лапласу $f(s)$	Оригинал $f(t)$	Изображение по Лапласу $f(s)$	Оригинал $f(t)$	Изображение по Лапласу $f(s)$
$\delta(t)$	1	$e^{\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$	$x(t-\alpha)$	$x_s s^{\alpha s}$
$1(t)$	$1/s$	$te^{\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^2$	$t \sin \beta t$	$2s\beta/(s^2+\beta^2)^2$
$1(t-\tau)$	e^{τ}/s	$t^n e^{\alpha t}$	$n!/(s+\alpha)^{n+1}$	$t \cos \beta t$	$(s^2-\beta^2)/(s^2+\beta^2)^2$
t	$1/s^2$	$\sin \beta t$	$\beta/(s^2+\beta^2)$	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\beta/\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$\cos \beta t$	$s/(s^2+\beta^2)$	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$(s-\alpha)/\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]$

Для преобразования Лапласа выполняется принцип суперпозиции, то есть преобразование Лапласа для суммы некоторых функций равно сумме преобразований Лапласа для отдельных функций.

Изображение по Лапласу для производной функции равно

$$sf(s) - f(0)$$

При нулевых начальных условиях, когда в момент времени t=0 выход и все его производные равны нулю, изображения для производных первой, второй, третьей

$$sf(s)$$

$$s^2 f(s)$$

$$s^3 f(s)$$

При помощи преобразования Лапласа можно найти начальное и конечное значения функции без вычисления ее оригинала:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} f(s) \qquad f(\infty) = \lim_{s \to 0} f(s)$$

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{1.23}$$

Нулевые начальные условия: при $t = 0$

$$y = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

$$a_3s^3y_s + a_2s^2y_s + a_1sy_s + a_0y_s =$$
$$= b_2s^2x_s + b_1sx_s + b_0x_s \tag{1.24}$$

$$y_s\left(a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0\right) = x_s\left(b_2s^2 + b_1s + b_0\right) \tag{1.25}$$

Решение дифференциального уравнения вида (1.23) при входе заданном функцией времени $x = \varphi(t)$ производится следующим образом.

1. К уравнению применить прямое преобразование Лапласа, то есть привести его к виду уравнения (1.24).
2. Вынести за скобки изображения выхода y_s и входа x_s,, то есть привести к виду уравнения (1.25).
3. Вместо x_s в правой части подставить изображение функции $\varphi(t)$ по Лапласу, то есть $\varphi(s)$.

4. Перенести полином левой части в правую.

5. Преобразовать правую часть к дроби с полиномами в числителе и знаменателе. В результате получается в правой части некоторая функция $F(s)$, а уравнение имеет вид

$$y_s = F(s)$$

6. Функцию $F(s)$ представить в виде суммы табличных функций $f(s)$, то есть

$$F(s) = f_1(s) + f_2(s) + \ldots + f_p(s)$$

7. К функции $F(s)$ применить **обратное преобразование Лапласа**, а так как к обратному преобразованию Лапласа также применим принцип суперпозиции, то следует применить обратные преобразования Лапласа к функциям $f_j(s)$ которые заменяются на оригиналы $f_j(t)$

Решение имеет вид $y = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_p(t)$

Передаточная функция

Функция $W(s)$ равная отношению изображения по Лапласу функции выхода y_s к изображению по Лапласу функции входа x_s при нулевых начальных условиях называется: **передаточная функция**

$$W(s) = \frac{y_s}{x_s} \qquad (1.26)$$

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (1.27)$$

Передаточная функция зависит только от внутренних свойств звена и не зависит от состояния входа.

Вид передаточной функции определяется видом исходного дифференциального уравнения. Для линейного дифференциального уравнения передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов.

Каждый выход звена имеет столько передаточных функций, сколько входов у звена. Звено с n входами и m выходами имеет (m x n) передаточных функций. Одномерное звено имеет одну передаточную функцию. Объект управления (контроля) для каждого управляемого (контролируемого) параметра имеет передаточные функции по управляющим воздействиям и возмущениям.

Уравнение (1.16) описывает рабочий процесс электродвигателя постоянного тока, который в рассматриваемом примере является объектом управления, применим к нему прямое преобразование Лапласа (индекс s означает изображение функции по Лапласу)

$$\omega_s\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = u_s + kM_{Hs}$$

$$\omega_s = \frac{u_s + kM_{Hs}}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{u_s}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{kM_{Hs}}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1.28)$$

Передаточная функция по управляющему воздействию

$$W_Y(s) = \frac{\omega_s}{u_s} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Передаточная функция по возмущению

$$W_U(s) = \frac{\omega_s}{M_{Hs}} = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\omega_s = u_s W_Y(s) + M_{Hs} W_U(s) \quad (1.29)$$