Математика

Системы линейных уравнений

Виды систем линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases}$$

[1.9], где $в_1$, $в_2$, …., $в_n$-свободные члены; x_1, x_2, ….x_n-неизвестные; a_{ij}- коэффициенты при неизвестных.

системы линейных уравнений

- **Решить систему линейных уравнений значит** найти совокупность чисел $x_1=к_1$, $x_2=к_2$, ….., $x_n=к_n$, или доказать что решений нет.
- Две системы называются **равносильными или эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Пример

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$, $x_1=10$, $x_2=0$- совместная, определённая система;

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$, решений нет- несовместная система;

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$, $x_1=к$, $x_2=10-2к$- совместная, неопределённая система.

Матричная запись систем линейных уравнений

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **[1.10]**- основная матрица, её элементами являются коэффициенты при неизвестных;

$$B=\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \dots \\ в_n \end{pmatrix}$$ **[1.11]**- матрица столбец свободных членов; $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ **[1.12]**- матрица столбец неизвестных; $C=\left(A|B\right)$ **[1.13]**- расширенная матрица.

Пример

Пример

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}, \text{A=}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ - основная матрица;

B= $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ - матрица столбец свободных членов; X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ - матрица столбец неизвестных; C= $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

Решение систем линейных уравнений матричным методом

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = в_2 \end{cases}$, A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$- основная матрица; B=$\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \end{pmatrix}$- матрица столбец свободных членов; X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$- матрица столбец неизвестных.

X= A^{-1}B [1.14]- формула для решения систем линейных уравнений матричным методом.

Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пример

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$, A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

применим формулу: $X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, значит x=2, y=1.

2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$, A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

применим формулу: $X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, значит $x_1=2$, $x_2=0$,

$x_3=-1$.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Для решения система n линейных уравнений с n неизвестными применяются формулы: $x_1 = \frac{Д_{x1}}{Д}$, $x_2 = \frac{Д_{x2}}{Д}$, …, $x_n = \frac{Д_{xn}}{Д}$ **[1.15]**; где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные, Д- определитель основной матрицы; $Д_{x1}$- определитель основной матрицы в котором первый столбец заменили столбцом свободных членов, $Д_{x2}$- определитель основной матрицы в котором второй столбец заменили столбцом свободных членов, …., $Д_{xn}$- определитель основной матрицы в котором n-ый столбец заменили столбцом свободных членов.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}, Д=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}=79, Д_{x1}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix}=395, Д_{x2}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=-158, Д_{x3}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix}=237, x_1=\frac{Д_{x1}}{Д}=5, x_2=\frac{Д_{x2}}{Д}=-2, x_3=\frac{Д_{x3}}{Д}=3.$$