МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОММИВОЯЖЕРЕ

Вступление

- В 1859 г. Сэр Вильям Гамильтон, знаменитый математик, давший миру теорию комплексного числа и кватерниона, предложил детскую головоломку, в которой предлагалось совершить «круговое путешествие» по 20 городам, расположенных в различных частях земного шара. Каждый город соединялся дорогами с тремя соседними так, что дорожная сеть образовывала 30 ребер додекаэдра, в вершинах которого находились города a, b, … t. Обязательным условием являлось требование: каждый город за исключением первого можно посетить один раз.
- Гамильтонова задача о путешественнике нередко преобразуется в задачу о коммивояжере. Коммивояжер - не свободно путешествующий турист, а деловой человек, ограниченный временными, денежными или какими-либо другими ресурсами. Гамильтонова задача может стать задачей о коммивояжере, если каждое из ребер снабдить числовой характеристикой. Это может быть километраж, время на дорогу, стоимость билета, расход горючего и т.д. Таким образом, условные характеристики дадут числовой ряд, элементы которого могут быть распределены между ребрами как угодно.

- Рассмотрим задачу о коммивояжере.
- Имеются n городов, расстояния (стоимость проезда, расход горючего на дорогу и т.д.) между которыми известны. Коммивояжер должен пройти все n городов по одному разу, вернувшись в тот город, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние (стоимость проезда и т.д.) будет минимальным.
- задача коммивояжера - это задача отыскания кратчайшего гамильтонова цикла в полном графе.
- Можно предложить следующую простую схему решения задачи коммивояжера: сгенерировать все n! возможных перестановок вершин полного графа, подсчитать для каждой перестановки длину маршрута и выбрать кратчайший. Однако, n! с ростом n растет быстрее, чем любой полином от n, и даже быстрее, чем . Таким образом, решение задачи коммивояжера методом полного перебора оказывается практически неосуществимым, даже при достаточно небольших n.
- Существует метод решения задачи коммивояжера, который дает оптимальное решение. Этот метод называется методом ветвей и границ. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ по-другому называют алгоритмом Литтла.
- Если считать города вершинами графа, а коммуникации (i,j) - его дугами, то требование нахождения минимального пути, проходящего один и только один раз через каждый город, и возвращения обратно, можно рассматривать как нахождение на графе гамильтонова контура минимальной длины.
- Для практической реализации идеи метода ветвей и границ применительно к задаче коммивояжера нужно найти метод определения нижних границ подмножества и разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества (ветвление).
- Определение нижних границ базируется на том утверждении, что если ко всем элементам i-й строки или j-го столбца матрицы C прибавить или отнять число , то задача останется эквивалентной прежней, то есть оптимальность маршрута коммивояжера не изменится, а длина любого гамильтонова контура изменится на данную величину .

- Опишем алгоритм Литтла для нахождения минимального гамильтонова контура для графа с n вершинами. Граф представляют в виде матрицы его дуг. Если между вершинами X_i и X_j нет дуги, то ставится символ «?».
- Алгоритм Литтла для решения задачи коммивояжера можно сформулировать в виде следующих правил:
- 1. Находим в каждой строке матрицы минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов соответствующей строки. Получим матрицу, приведенную по строкам, с элементами
- 2. Если в матрице , приведенной по строкам, окажутся столбцы, не содержащие нуля, то приводим ее по столбцам. Для этого в каждом столбце матрицы выбираем минимальный элемент , и вычитаем его из всех элементов соответствующего столбца. Получим матрицу
- каждая строка и столбец, которой содержит хотя бы один нуль. Такая матрица называется приведенной по строкам и столбцам.
- 3. Суммируем элементы и , получим константу приведения
- которая будет нижней границей множества всех допустимых гамильтоновых контуров, то есть
- 4. Находим степени нулей для приведенной по строкам и столбцам матрицы. Для этого мысленно нули в матице заменяем на знак «?» и находим сумму минимальных элементов строки и столбца, соответствующих этому нулю. Записываем ее в правом верхнем углу клетки

- 5. Выбираем дугу , для которой степень нулевого элемента достигает максимального значения
- 6. Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров на два подмножества и . Подмножество гамильтоновых контуров содержит дугу , - ее не содержит. Для получения матрицы контуров , включающих дугу , вычеркиваем в матрице строку и столбец . Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменим симметричный элемент на знак «?».
- 7. Приводим матрицу гамильтоновых контуров . Пусть - константа ее приведения. Тогда нижняя граница множества определится так
- 8. Находим множество гамильтоновых контуров , не включающих дугу . Исключение дуги достигается заменой элемента в матрице на ?.
- 9. Делаем приведение матрицы гамильтоновых контуров . Пусть - константа ее приведения. Нижняя граница множества определится так
- 10. Сравниваем нижние границы подмножества гамильтоновых контуров и . Если , то дальнейшему ветвлению в первую очередь подлежит множество . Если же , то разбиению подлежит множество .

- Процесс разбиения множеств на подмножества сопровождается построением дерева ветвлений.
- 11. Если в результате ветвлений получаем матрицу , то определяем полученный ветвлением гамильтонов контур и его длину.
- 12. Сравниваем длину гамильтонова контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина контура не превышает их нижних границ, то задача решена. В противном случае развиваем ветви подмножеств с нижней границей, меньшей полученного контура, до тех пор, пока не получим маршрут с меньшей длиной или не убедимся, что такого не существует.
- 3. Математическая модель задачи коммивояжера
- Задача коммивояжера может быть сформулирована как целочисленная введением булевых переменных , если маршрут включает переезд из города i непосредственно в город j и в противном случае. Тогда можно задать математическую модель задачи, то есть записать целевую функцию и систему ограничений

- условия (2) - (4) в совокупности обеспечивают, что каждая переменная равна или нулю, или единице. При этом ограничения (2), (3) выражают условия, что коммивояжер побывает в каждом городе один раз в него прибыв (ограничение (2)), и один раз из него выехав (ограничение (3)).
- Однако этих ограничений не достаточно для постановки задачи коммивояжера, так как они не исключают решения, где вместо простого цикла, проходящего через n вершин, отыскиваются 2 и более отдельных цикла (подцикла), проходящего через меньшее число вершин. Поэтому задача, описанная уравнениями (2) - (4) должна быть дополнена ограничениями, обеспечивающими связность искомого цикла.
- Для того, чтобы исключить при постановке задачи все возможные подциклы в систему ограничений задачи включают следующее ограничение:
- , где , и .
- 4. Алгоритм решения
- Дана матрица расстояний, представленная в таблице 1. Необходимо с помощью алгоритма Литтла решить задачу коммивояжера.

Табл.1

j i	1	2	3	4	5	6	
1	?	7	16	21	2	17	
2	13	?	21	15	43	23	
3	25	3	?	31	17	9	
4	13	10	27	?	33	12	
5	9	2	19	14	?	51	
6	42	17	5	9	23	?	

- 1) Справа к таблице присоединяем столбец U_i, в котором записываем минимальные элементы соответствующих строк. Вычитаем элементы U_i из соответствующих элементов строки матрицы.

j i	1	2	3	4	5	6	U_i	
1	?	7	16	21	2	17	2	
2	13	?	21	15	43	23	13	
3	25	3	?	31	17	9	3	
4	13	10	27	?	33	12	10	
5	9	2	19	14	?	51	2	
6	42	17	5	9	23	?	5	

2) Внизу полученной матрицы присоединяем строку V_j, в которой записываем минимальные элементы столбцов. Вычитаем элементы V_j из соответствующих столбцов матрицы.

j i	1	2	3	4	5	6	
1	?	5	14	19	0	15	
2	0	?	8	2	30	10	
3	22	0	?	28	14	6	
4	3	0	17	?	23	2	
5	7	0	17	12	?	49	
6	37	12	0	4	18	?	
V_j	0	0	0	2	0	2	

3) В результате вычислений получаем матрицу, приведенную по строкам и столбцам, которая изображена в виде таблицы 2.

Табл.2

j i	1	2	3	4	5	6	
1	?	5	14	17	0^{19}	13	
2	0^{3}	?	8	0^{2}	30	8	
3	22	0^{4}	?	26	14	4	
4	3	0^{0}	17	?	23	0^{4}	
5	7	0^{7}	17	10	?	47	
6	37	12	0^{8}	2	18	?	

- 4) Находим константу приведения
- Таким образом, нижней границей множества всех гамильтоновых контуров будет число
- 5) Находим степени нулей полностью приведенной матрицы. Для этого как бы заменяем в ней все нули на знак «?» и устанавливаем сумму минимальных элементов соответствующей строки и столбца. Степени нулей записаны в правых верхних углах клеток, для которых .
- 6) Определяем максимальную степень нуля. Она равна 19 и соответствует клетке (1;5). Таким образом, претендентом на включение в гамильтонов контур является дуга (1;5).
- 7) Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров на два: и . Матрицу с дугой (1;5) получаем табл.2 путем вычеркивания строки 1 и столбца 5. Чтобы не допускать образования негамильтонова контура, заменяем элемент (5;1) на знак «?».

j i	1	2	3	4	6	
2	0	?	8	0	8	
3	22	0	?	26	4	
4	3	0	17	?	0	
5	?	0	17	10	47	
6	37	12	0	2	?	

8) Матрицу гамильтоновых контуров получим из таблицы 2 путем замены элемента (1;5) на знак «?».

j i	1	2	3	4	5	6		
1	?	5	14	17	?	13	5	
2	0	?	8	0	30	8		
3	22	0	?	26	14	4		
4	3	0	17	?	23	0		
5	7	0	17	10	?	47		
6	37	12	0	2	18	?		

- 9) Делаем дополнительное приведение матрицы контуров : = 0. Нижняя граница множества равна .
- 10) Находим константу приведения для множества контуров
- :
- Следовательно, нижняя граница множества равна
- 11) Сравниваем нижние границы подмножеств и . Так как
- то дальнейшему ветвлению подвергаем множество .
- На рис.1 представлено ветвление по дуге (1;5).
- Рис.1
- Переходим к ветвлению подмножества . Его приведенная матрица представлена в таблице ниже.
-

j i	1	2	3	4	6	
2	0^3	?	8	0^2	8	
3	22	0^4	?	26	4	
4	3	0^0	17	?	0^4	
5	?	0^{10}	17	10	47	
6	37	12	0^{10}	2	?	

12) Узнаем степени нулей матрицы. Претендентами на включение в гамильтонов контур будут несколько дуг (5;2) и (6;3). Для дальнейших расчетов выберем дугу (6;3). Разбиваем множество на два подмножества: и (табл. 3 и 4). Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, в таблице 3 заменяем элемент (3;6) на знак «?»

Табл.3

j i	1	2	4	6	
2	0	?	0	8	
3	22	0	26	?	
4	3	0	?	0	
5	?	0	10	47	

Табл.4

j i	1	2	3	4	6		
2	0	?	8	0	8		
3	22	0	?	26	4		
4	3	0	17	?	0		
5	?	0	17	10	47		
6	37	12	?	2	?	2	
8							

Определим константы приведения для этих матриц

,

Следовательно

,

Так как , то дальнейшему ветвлению подлежит подмножество .
Находим степени нулей матрицы.

j i	1	2	4	6	
2	0^{3}	?	0^{2}	8	
3	22	0^{22}	26	?	
4	3	0^{0}	?	0^{8}	
5	?	0^{10}	10	47	

Претендентом к включению в гамильтонов контур станет дуга (3;2). Разбиваем множество на два и .

j i	1	4	6		
2	0	0	8		
4	3	?	0		
5	?	10	47	10	
j i	1	2	4	6	
2	0	?	0	8	
3	22	?	26	?	22
4	3	0	?	0	
5	?	0	10	47	

- Очевидно
- ,
- Следовательно, очередному ветвлению нужно подвергнуть подмножество .
- Переходим к ветвлению подмножества . Определяем степени нулей. Претендентом на включение в гамильтонов контур является дуга (5;4). Разбиваем множество на два подмножества: и .
- Находим нижние границы
- ,
- Следовательно, очередному ветвлению нужно подвергнуть подмножество . Но его матрица имеет размерность . Поэтому в гамильтонов контур следует включить дуги, соответствующие в матрице нулевым элементам.
- Определим полученный гамильтонов контур. В него вошли дуги
- Длина контура равна
- Так как границы оборванных ветвей больше длины контура 1 - 5 - 4 - 6 - 3 - 2 - 1, то этот контура имеет наименьшую длину.
- алгоритм крускал коммивояжер

- Выводы
- Задача коммивояжера является частичным случаем гамильтоновой задачи о путешественнике. Суть задачи коммивояжера состоит в нахождении суммарной минимальной характеристики (расстояния, стоимости проезда и т.д.), при этом коммивояжер должен пройти все n городов по одному разу, вернувшись в тот город, с которого начал.
- Существуют несколько методов решения задачи коммивояжера: метод полного перебора, с помощью метода ветвей и границ (алгоритм Литтла), алгоритма Крускала, «деревянного» алгоритма и т.д. Однако только метод ветвей и границ дает нам в итоге самое оптимальное решение.
- Основная идея метода Литтла состоит в том, что вначале строят нижнюю границу длин маршрутов для всего множества гамильтоновых контуров . Затем все множество контуров разбивают на два подмножества таким образом, чтобы первое подмножество состояло из гамильтоновых контуров, содержащих некоторую дугу (i,j), а другое подмножество не содержало этой дуги.
- Для практической реализации идеи метода ветвей и границ применительно к задаче коммивояжера нужно найти метод определения нижних границ подмножества и разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества (ветвление). Такое определение нижних границ базируется на том утверждении, что если ко всем элементам i-й строки или j-го столбца матрицы C прибавить или отнять число , то задача останется эквивалентной прежней, то есть оптимальность маршрута коммивояжера не изменится, а длина любого гамильтонова контура изменится на данную величину .