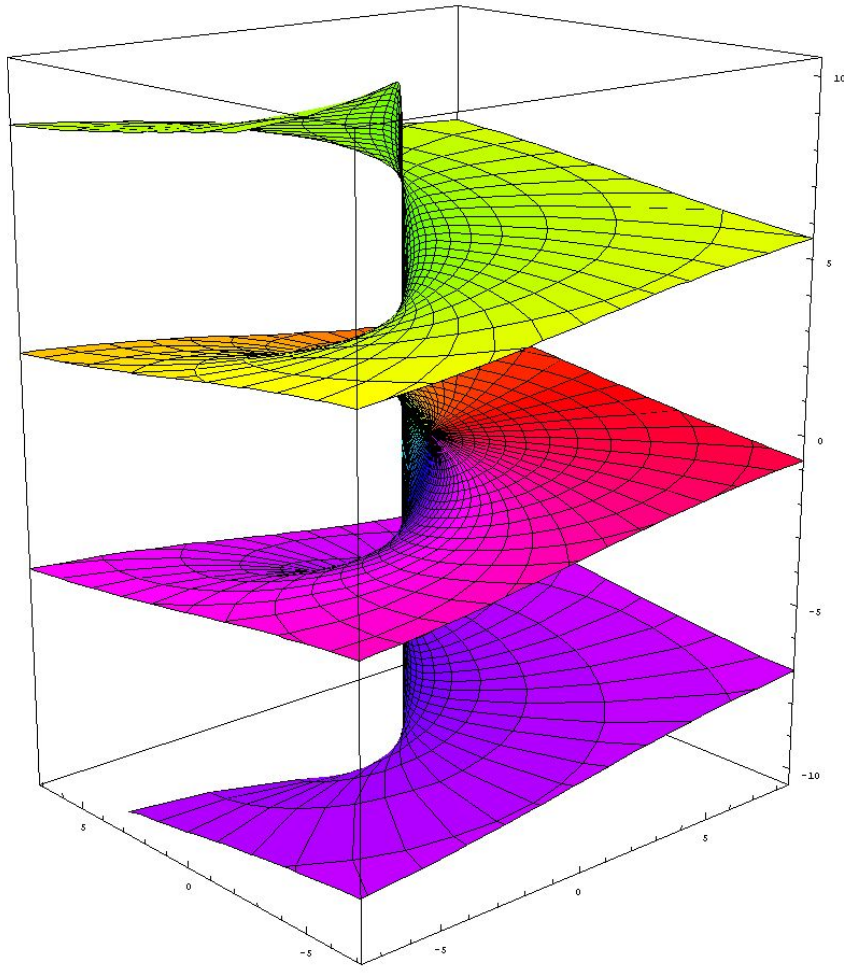
Понятие логарифма



Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b

$\log_a b = c$

$a^c = b$ $\quad (a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0)$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество

Примеры

1. $\log_2 8 =$ $3, \; 2^3 = 8;$
2. $\log_3 729 =$ $6, \; 3^6 = 729;$
3. $\log_{0,2} 25 =$ $-2, \; (0,2)^{-2} = 25;$
4. $\log_4 8 =$ $1,5, \; 4^{1,5} = 8;$
5. $\log_2 2 =$ $1, \; 2^1 = 2;$
6. $\log_{10} 1 =$ $0, \; 10^0 = 1;$
7. $\log_{49} 1/7 =$ $-0,5, \; 49^{-0,5} = 1/7;$
8. $\log_{0,1} 10000 =$ $-4, \; 0,1^{-4} = 10000.$

Сведения из истории

Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц геометрической арифметической прогрессии. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени *n* сводится к делению логарифма подкоренного выражения на *n*. Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» *Михаэль Штифель*, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.

Сведения из истории

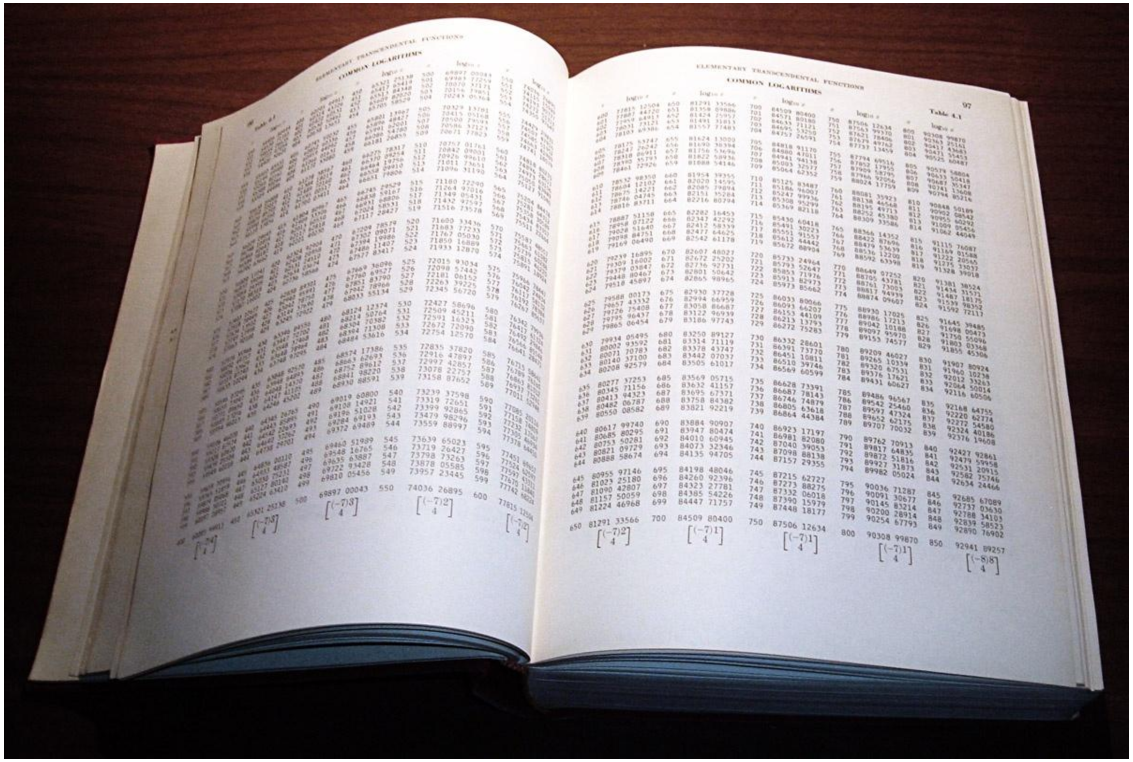
В 1614 году шотландский математик-любитель **Джон Непер** опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств. Термин логарифм, предложенный **Непером**, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», изданной посмертно в 1619 году его сыном.

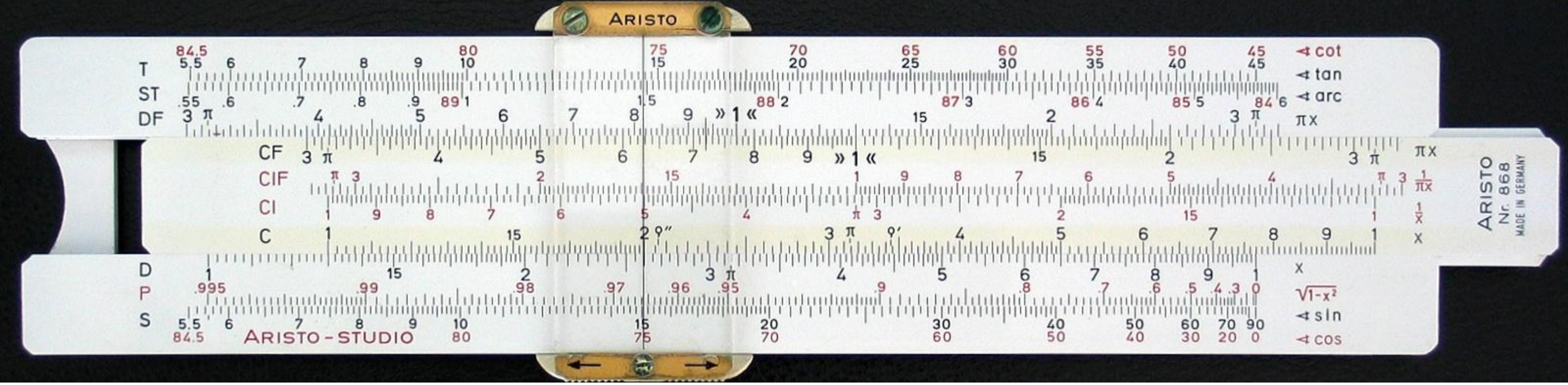
Слово ***логарифм*** произошло от греческого ***λόγοφ*** (число) и ***αρινμοφ*** (отношение), и переводится, следовательно, как отношение чисел.

Сведения из истории

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство – таблицы логарифмов, – резко повысившее производительность труда вычислителей. Добавим, что уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком *Д. Гантером* была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений.

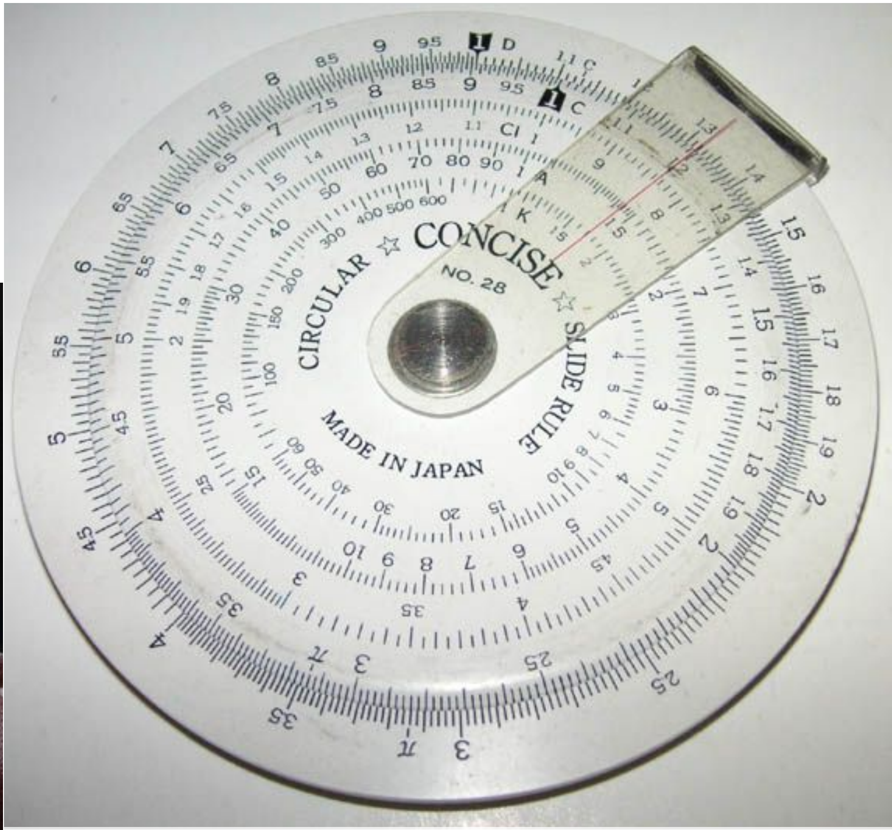
Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским математиком *Дж. Непером* (1550 - 1617) и швейцарцем *И. Бюрги* (1552 - 1632).





Логарифмическая линейка

Часы Breitling Navitimer



Круговая логарифмическая линейка (логарифмический

Основные свойства логарифмов

1. $log_{a}(bc) = log_{a} b + log_{a} c$
2. $\log_{a}(b : c) = \log_{a} b - \log_{a} c$
3. $\log_{a^{к}} b = \frac{1}{k}\log_{a} b$
4. $\log_{a} b^{k} = k \ log_{a} b$
5. $log_{a^{к}} b^{n} = \frac{n}{k} log_{a} b$
6. $\log_{a} a = 1$
7. $log_{a} 1 = 0$
8. $\log_{a} \frac{1}{a} = -1$
9. $\log_{a} b = \frac{\log_{c} b}{\log_{c} a}$

№	Задание	Варианты ответов
1.		
2.		А) 0; Б) 32; В) 1; Г) 1 .
3.		А) 4 ; Б) 64 ; В) 16; Г) 3 .
4.		
5.		А) 2,5; Б) 9; В) 21; Г) 90.
6.		
7.		
8.		А)-1 ; Б)1 ; В)-0,2 ; Г)0,2 .
9.		
10.		

Понятие логарифмической функции

Функцию вида

$y = \log_a x$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$

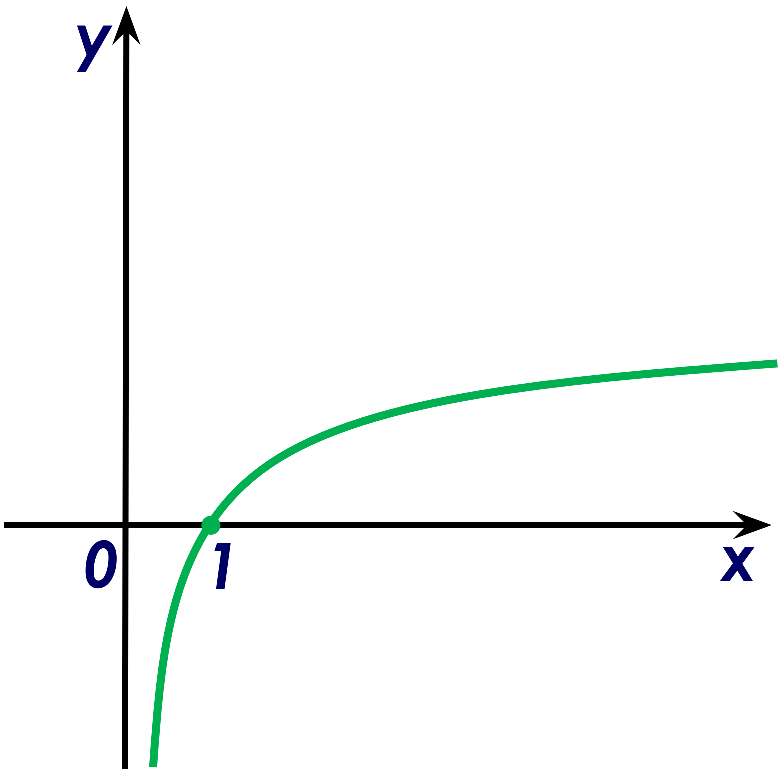
называют

логарифмической функцией

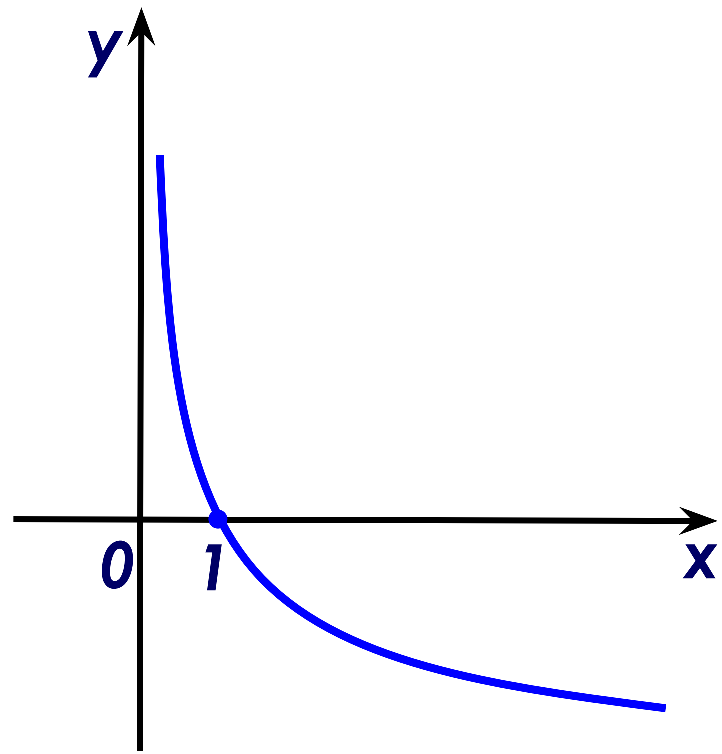
График логарифмической функции

$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$

$y = \log_a x,\ a > 1$

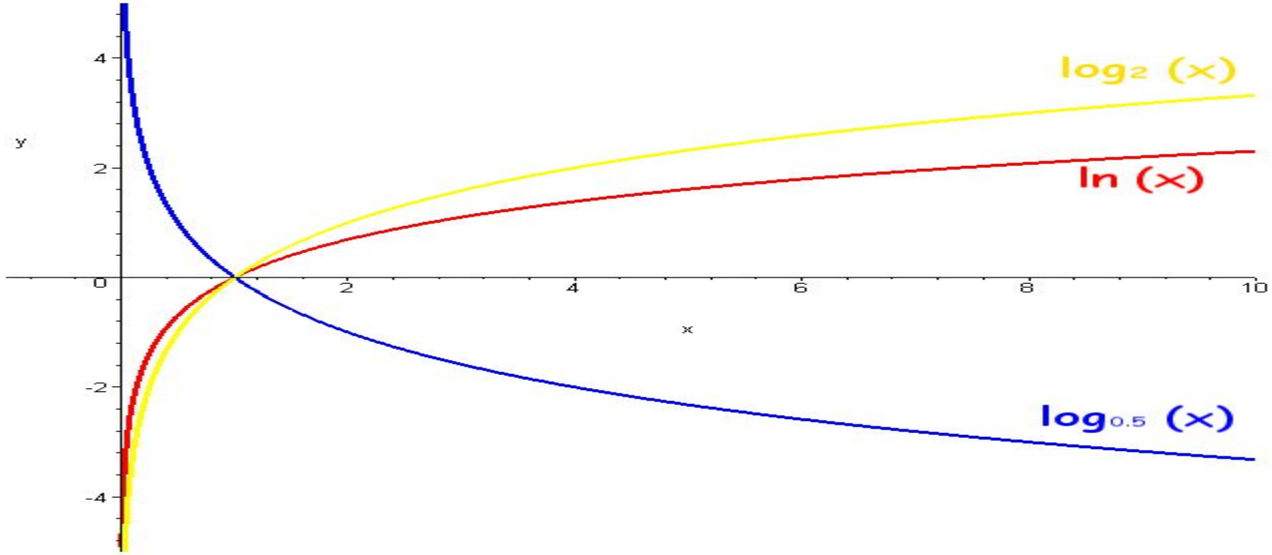


$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



Свойства функции:

1. $D(y) = (0; +\infty)$,
   $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. а) Нули функции: $y = 0$ при $x = 1$;
   б) точек пересечения с осью ординат нет.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на $(0; +\infty)$;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на $(0; +\infty)$.



Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

1) Простейшие:	$\log_a x = b$.

Решение: $x=a^b$ **ОДЗ не надо !**

2) Сводящиеся к простейшим: $\log_a f(x) = \log_a h(x)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ \left.\begin{aligned} f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{aligned}\right\} \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- **Использование определения логарифма**

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad b = a^c$$

Пример:

$$\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3$$

Решение:

$$5+3\log_2(x-3) = 2^3$$

$$3\log_2(x-3) = 8-5 \mid :3$$

$$\log_2(x - 3) = 1$$

$$x - 3 = 2^1$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

Методы решения логарифмических уравнений

- **Использование свойств логарифмов**

Пример.

$$\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24),$$

Решение:

$$\text{О.Д.З.:}\quad \begin{cases} x>0, \\ x+3>0, \\ x+24>0 \end{cases}$$

$$\log_3 (x(x+3)) = \log_3(x+24)$$

$$x(x+3)=x+24\ ;$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x=\{-6;4\} \qquad x = -6 \text{ -п.к.}$$

Ответ: <u>x=4</u>

Методы решения логарифмических уравнений

- **Метод подстановки**

Пример.

$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

Решение:

$\lg x = t$ $\lg x=1$

$t^2-3t+2=0$ $\lg x=2$ <u>$x=\{10;100\}$</u>

$t=1,\ t=2$

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$

называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ \left.\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \text{ОДЗ} \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ \left.\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \text{ОДЗ} \end{cases}$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

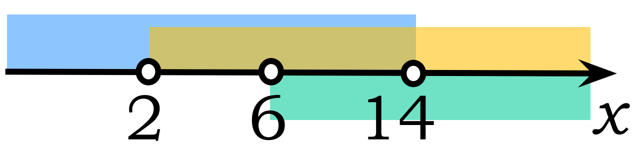
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$$т.к.\ 3>1,\ то\ ф-ция\ возр.$$

$$\begin{cases} 2x-4>14-x, \\ 2x-4>0, \\ 14-x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x>18, \\ x>2, \\ x<14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>6, \\ x>2, \\ x<14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}16$$

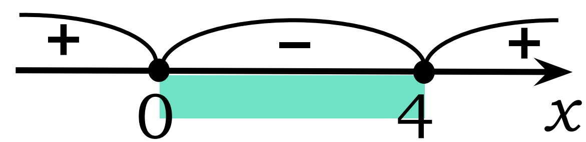
$$т.к.\ \frac{1}{2}<1,\ то\ ф-ция\ убыв.$$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2>0; \end{cases}$$ – *лишнее условие*

$$4x-x^2 \ge 0$$

$$x^2-4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

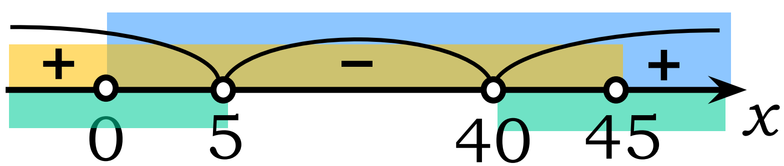
$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

$$т.к.\ 10 > 1,\ то$$

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{array}\right.$$



Ответ: $(0;\ 5) \cup (40;\ 45)$.

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0 \quad ОДЗ:\ x > 0$$

$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

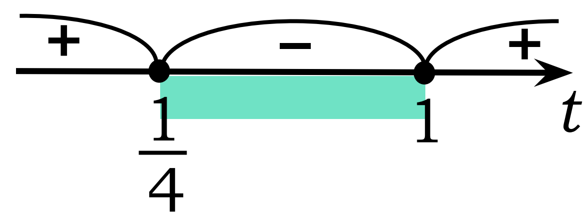
$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 \le 0$$

н.ф.: $4t^2 - 5t + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{array}\right.$$



$$\frac{1}{4} \le t \le 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \le \log_2 x \le 1,\ т.к.\ a = 2,\ то$$

$$\sqrt[4]{2} \le x \le 2$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2};\ 2]$.