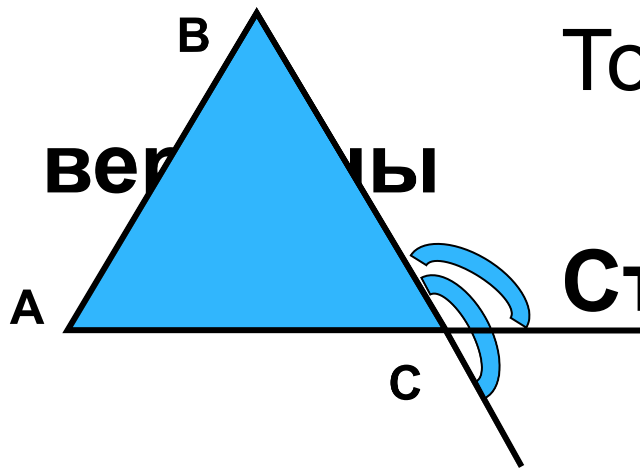
Все о треугольниках (теория)

Разработано учителем математики
МОУ «СОШ» п. Аджером
Корткеросского района Республики Коми
Мишариной Альбиной Геннадьевной

Содержание

А

Треугольник – фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.



Точки А; В; и С – **вершины**

Стороны - отрезки

Внешний угол треугольника при данной вершине – это угол, смежный с углом треугольника при данной вершине

Виды треугольников

- **Остроугольный** – все углы острые
- **Прямоугольный** – один угол прямой
- **Тупоугольный** – один угол тупой
- **Разносторонний** – все стороны разной длины
- **Равнобедренный** – две стороны (боковые) равны
- **Равносторонний** – все стороны равны (правильный)

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними

Если $AB = A_1B_1$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

$AC = A_1C_1$

$<A = <A_1$

2. По стороне и прилежащим к ней углам

Если $AB = A_1B_1$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

$<A = <A_1$

$<B = <B_1$

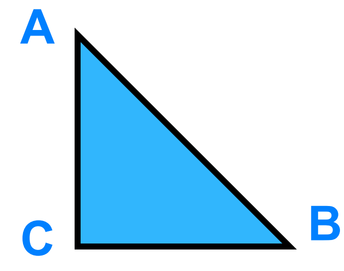
3. По трём сторонам

Если $AB = A_1B_1$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

$BC = B_1C_1$

$AC = A_1C_1$

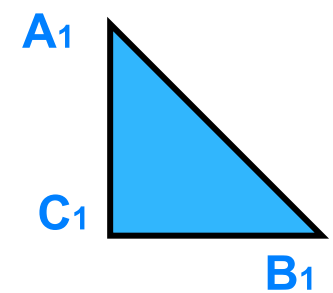
Признаки равенства прямоугольных треугольников



1. **По двум катетам**

Если $\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \end{cases}$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

2. **По катету и острому углу**



Если $\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ <A = <A_1 \end{cases}$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

3. **По гипотенузе и острому углу**

Если $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ <A = <A_1 \end{cases}$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

4. **По гипотенузе и катету**

Если $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \end{cases}$ то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Признаки подобия треугольников

1. По двум углам

Если $<A = <A_1$; $<B = <B_1$, то $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$

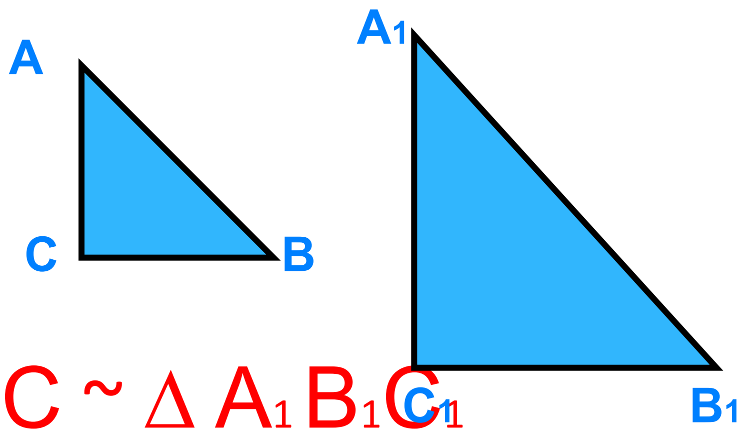
2. По двум сторонам и углу между ними

Если $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$; $<A = <A_1$ то $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$

3. По трем сторонам

Если $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, то

Признаки подобия прямоугольных треугольников



1. По острому углу

Если $<A = <A_1$, то $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$

2. По двум катетам

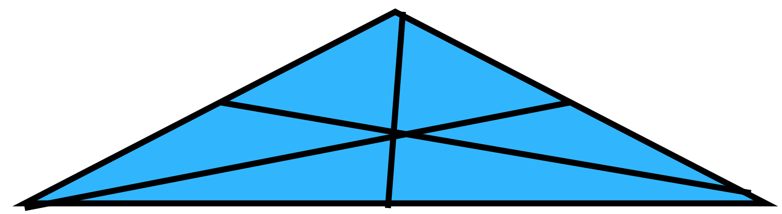
$AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, то $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$

3. По гипотенузе и катету

$AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$, то $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1B_1C_1$

Медиана треугольника

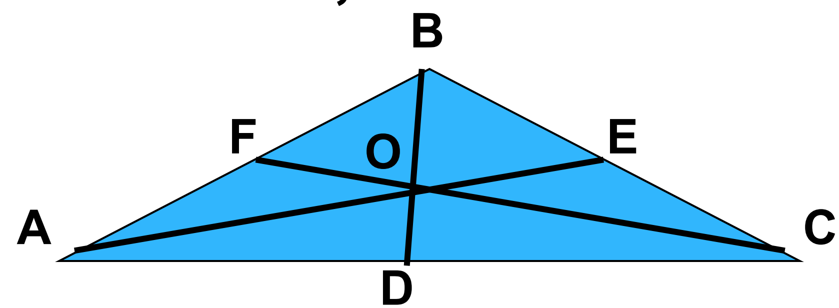
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны



Медианы пересекаются в одной точке (центр тяжести треугольника).

Свойства медиан треугольника

1. Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины угла



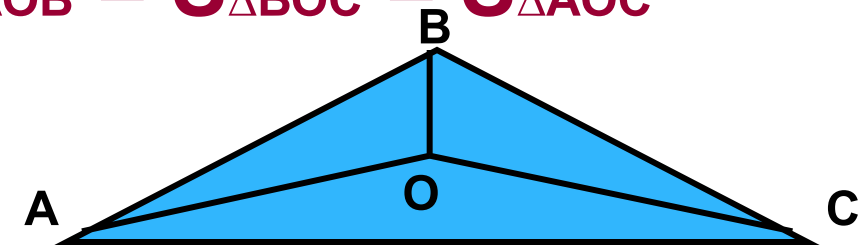
$AO = 2OE;\ BO = 2OF;\ CO = 2OD$

2. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника

$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$

Свойства медиан треугольника

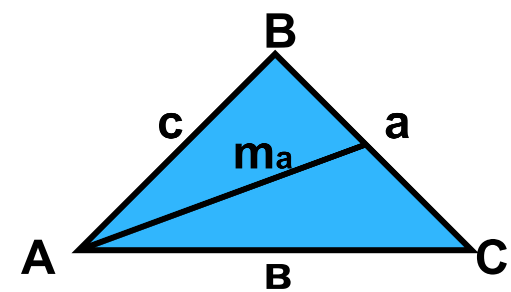
3. **Если О – точка пересечения медиан, то $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC}$**



4. **Медиана на сторону a вычисляется по формулам:**

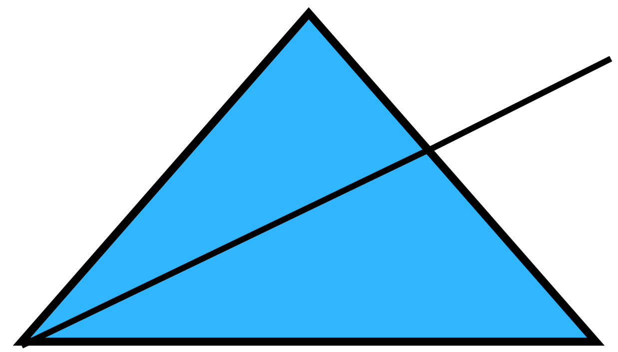
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A}$$



Биссектриса треугольника

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины угла до противолежащей стороны.

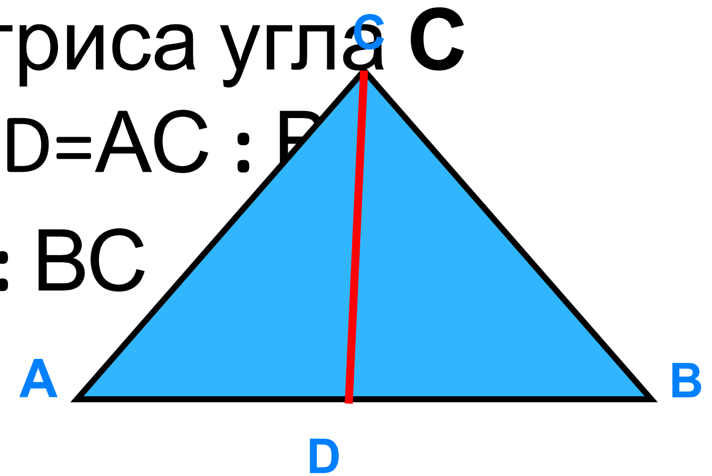


Свойства биссектрис треугольника

1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в треугольник окружности

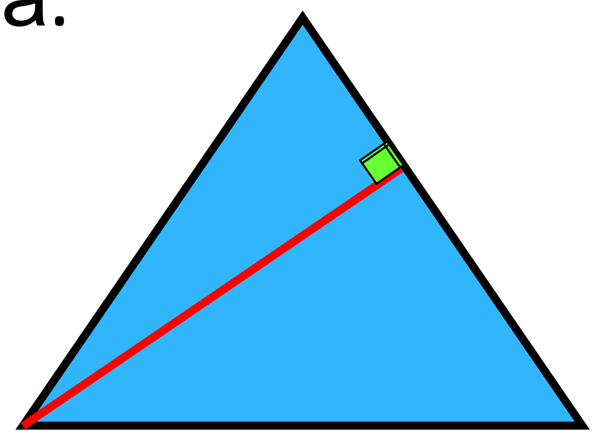
2. Если **CD** – биссектриса угла **C** ΔABC, то: 1) AD : BD=AC : B

2) $S_{\Delta ACD} : S_{\Delta BCD} = AC : BC$



Высота треугольника

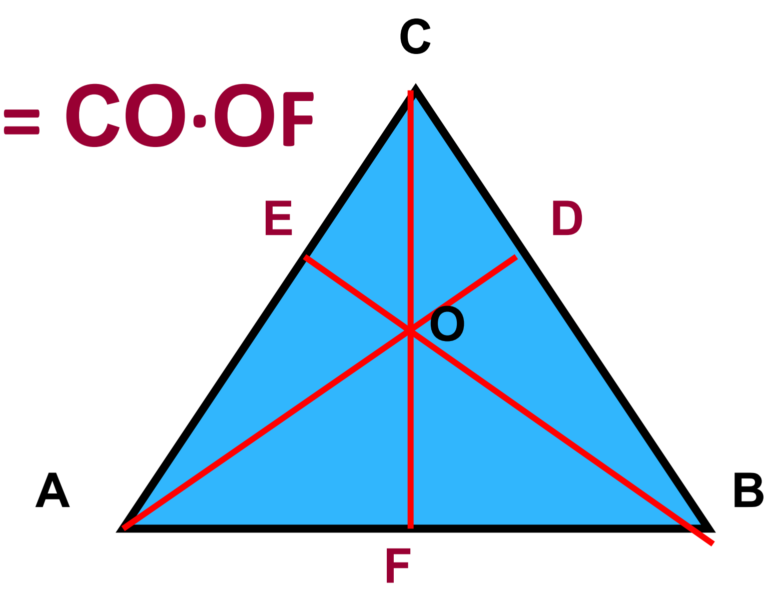
Высота треугольника – перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, на которой лежит противолежащая сторона.



Свойства высот треугольника

1. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке – ортоцентре треугольника.
2. Если AD, BE,CF – высоты ΔABC, O-точка пересечения этих высот или их продолжений, то

AO·OD = BO·OE = CO·OF



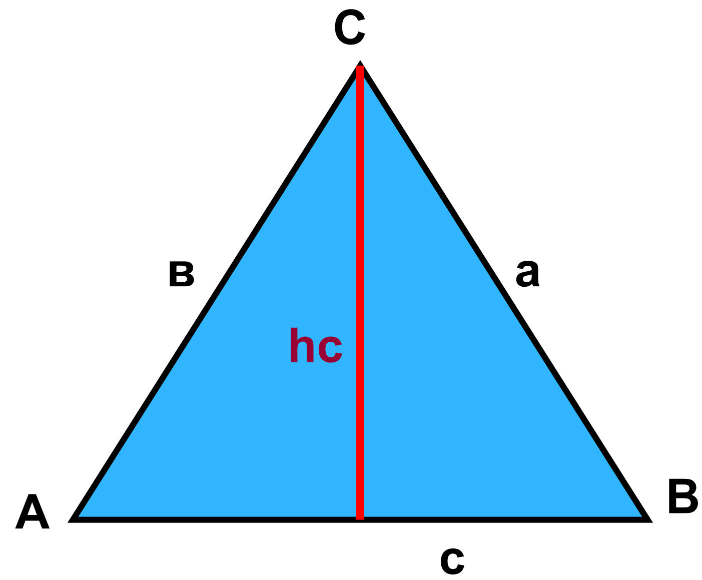
Свойства высот треугольника

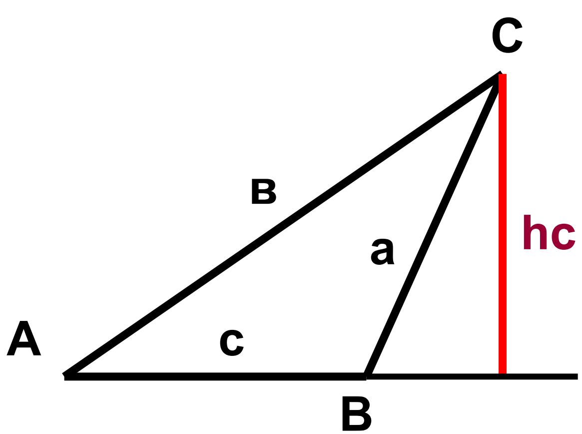
3. Высота на сторону с вычисляется по формулам:

$$h_c = \text{в} \cdot \text{Sin}A$$

$$h_c = a \cdot \text{Sin}B$$

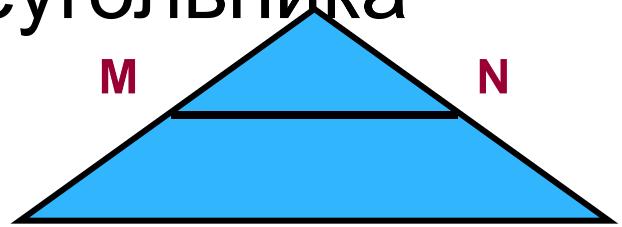
$$h_c = 2S_{\Delta} : c$$





Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника



Свойство средней линии:

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

MN II AB и MN=1/2·AB

Свойства треугольников

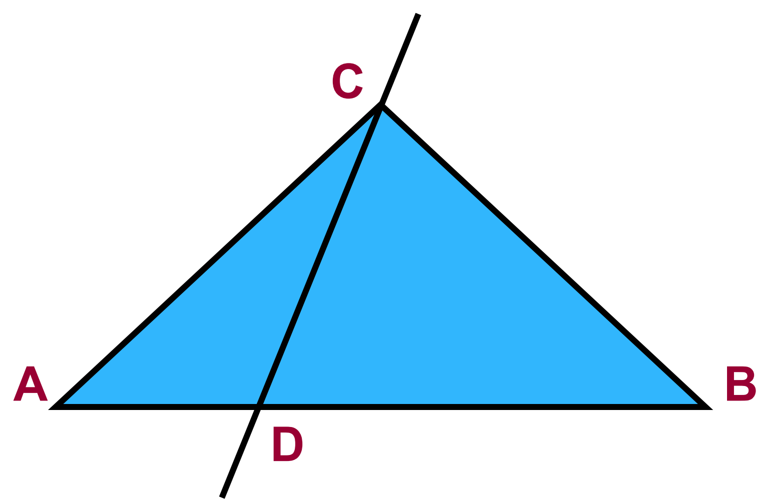
1. Сумма углов треугольника равна **180°**
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
3. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла – большая сторона.
4. **Неравенство треугольника**.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон

Свойства треугольников

5. Прямая **CD** делит **∆ABC** на два таких треугольника, что

$$S_{\Delta ACD} : AD = S_{\Delta DCB} : DB$$



Свойства треугольников

6. Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C = 2R$$

где **R –** радиус окружности, описанной около треугольника

Свойства треугольников

7. Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$а^2 = в^2 + с^2 - 2вс \cdot \mathrm{Cos}A$$

$$в^2 = а^2 + с^2 - 2ас \cdot \mathrm{Cos}B$$

$$с^2 = а^2 + в^2 - 2ав \cdot \mathrm{Cos}C$$

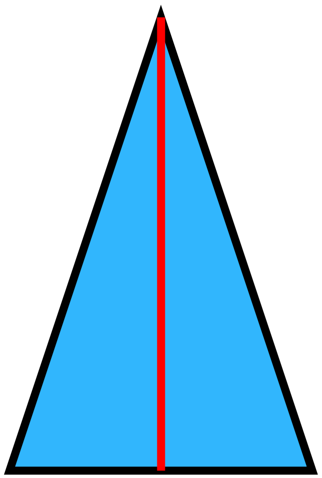
Соотношение между сторонами и углами треугольника

В треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;
2) обратно, против большего угла лежит большая сторона
3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета
4) Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный

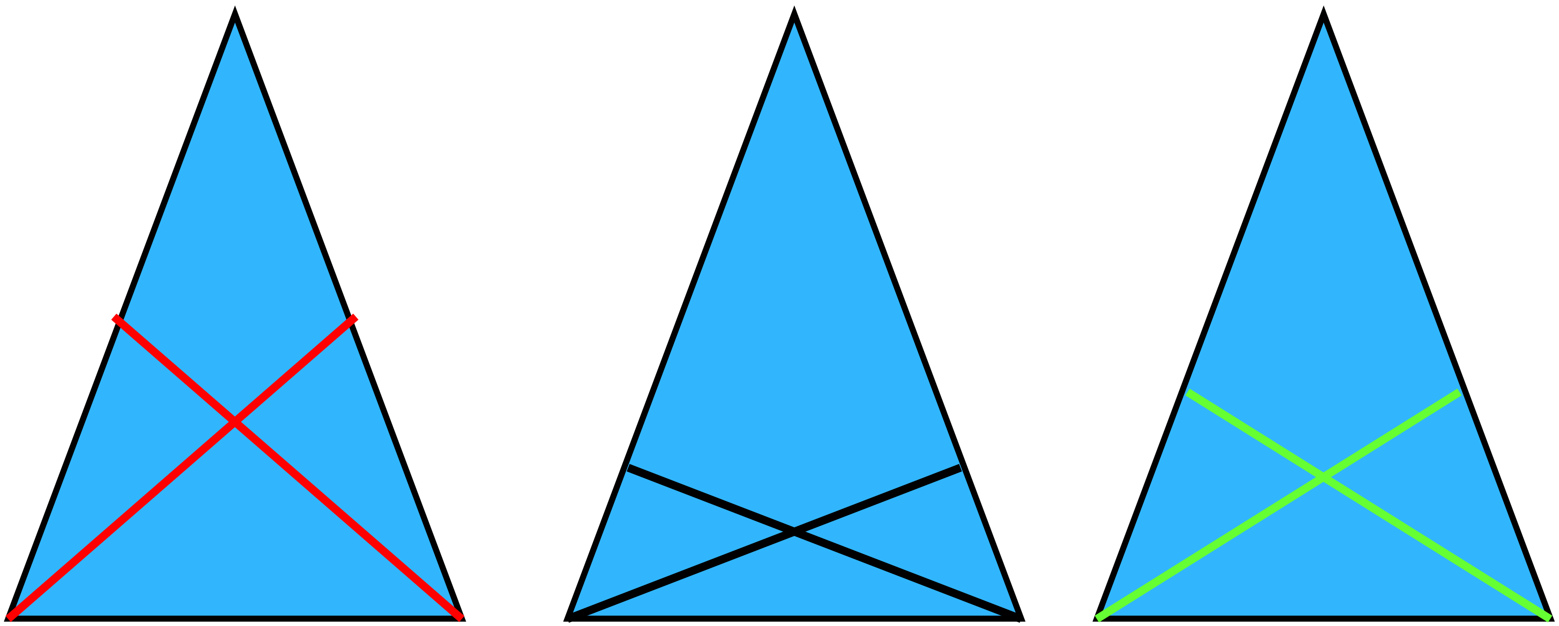
Свойства равнобедренного треугольника

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.



Свойства равнобедренного треугольника

3. В равнобедренном треугольнике **медианы** (соответственно **высоты** и **биссектрисы**), проведенные из вершин при основании, равны.



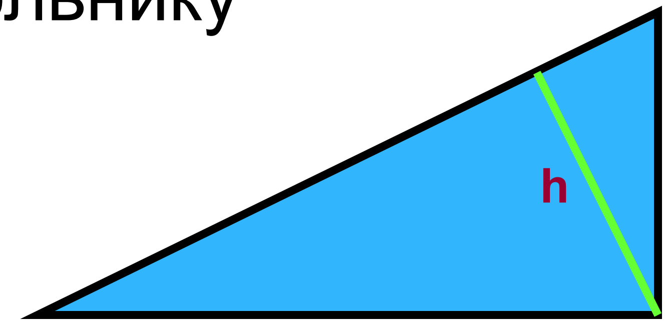
Свойства прямоугольного треугольника

1. Гипотенуза больше катета
2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна **90°**
3. Катет, лежащий против угла в **30°**, равен половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение.
4. Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

CD = ½ AB

Свойства прямоугольного треугольника

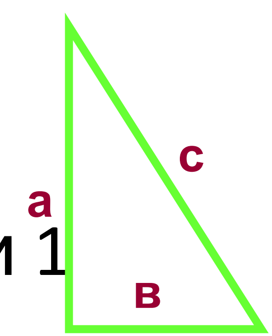
5. Высота, опущенная из прямого угла делит прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, которые подобны и исходному треугольнику



6. Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + в^2$$



Египетский треугольник: 3; 4 и 5

Пифагоровы треугольники: 5; 12 и 1

8; 15 и 17   7; 24 и 25

Свойства прямоугольного треугольника

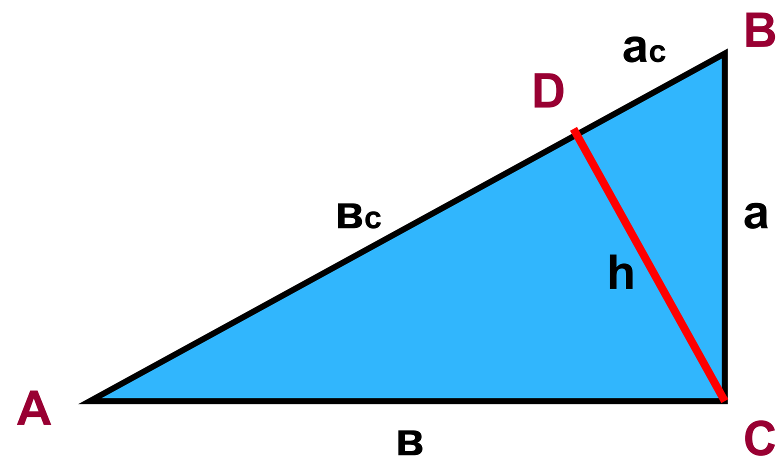
7. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

а) Высота, опущенная из прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов.

$$h : a_c = в_c : h$$

т.е.

$$h = \sqrt{a_c \cdot в_c}$$



а

б) Каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу:

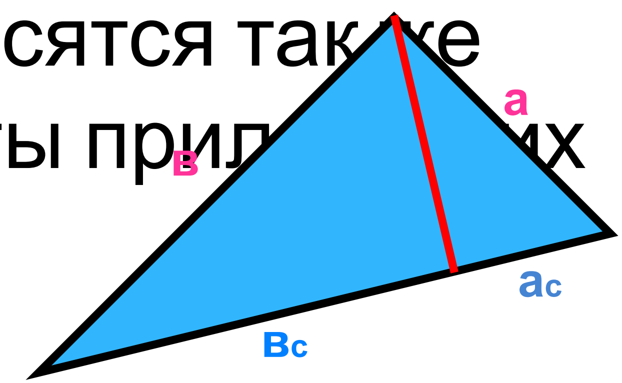
$$a = \sqrt{c \cdot a_c}$$

а : с = а$_c$: а, т.е.

$$в = \sqrt{c \cdot в_c}$$

в : с = в$_c$: в, т.е.

в) Высота, опущенная на гипотенузу, делит гипотенузу на отрезки, которые относятся так же как относятся квадраты прилежащих катетов:

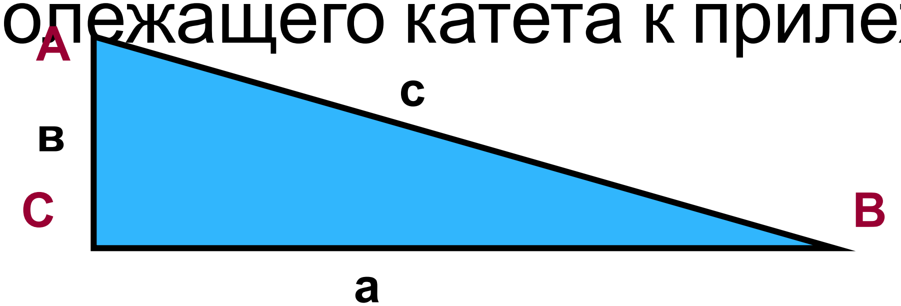


а$_c$: в$_c$ = а^2 : в^2

Свойства прямоугольного треугольника

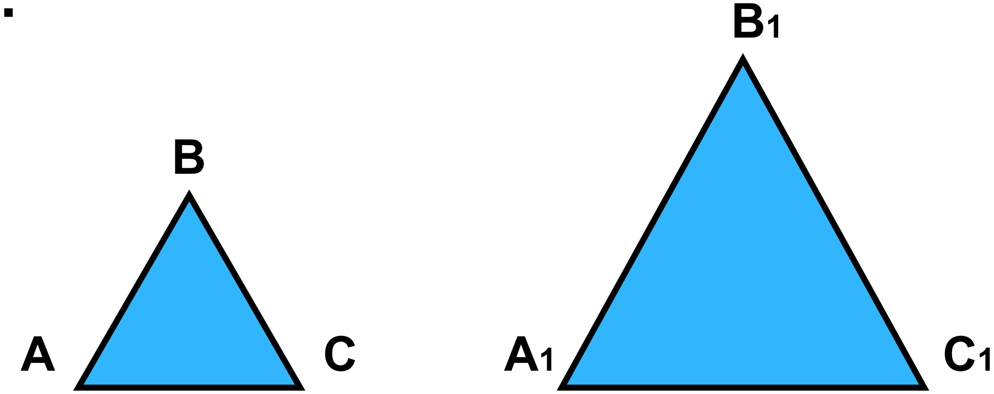
8. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

- **Синус острого угла** равен отношению противолежащего катета к гипотенузе
- **Косинус острого угла** равен отношению прилежащего катета к гипотенузе
- **Тангенс острого угла** равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету



Свойства подобных треугольников

1. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:



1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$

2) $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = k$

(коэффициент подобия)

Свойства подобных треугольников

2. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta A_1B_1C_1} = k$$

3. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$$

Формулы площади треугольника

Произвольный треугольник:

$S = ½ \cdot a h_a = ½ \cdot в h_в = ½ \cdot c h_c$;

$S = ½ \cdot ab \cdot \sin C = ½ \cdot ac \cdot \sin B = ½ \cdot вc \cdot \sin A$;

$$S_{\text{тр.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где p- полупериметр

Прямоугольный треугольник:

$S = ½ \cdot ав$, где а и в - катеты

Правильный треугольник:

$S = (a^2\sqrt{3}) : 4$

Источники

- Л.С. Атанасян. Учебник геометрии 7-9.М.: «Просвещение», 2009 г.
- Т.С. Степанова. Математика. Весь школьный курс в таблицах., Минск, «Букмастер»,2012

https://www.google.com/search?hl=ru&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1382&bih=732&q=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&oq=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&gs_l=img.1.0.0l10.11499.13684.0.20805.10.7.0.3.3.0.113.481.6j1.7.0...0.0...1ac.1.7.img.ZRxa7gaF-MI#imgrc=hBP2SMLPpmMX9M%3A%3BLrDnnfsdseyC3M%3Bhttp%253A%252F%252Fimg16.slando.ua%252Fimages_slandocomua%252F74852745_1_644x461_podgotovka-k-zno-matematika-harkov.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fkharkov.kha.slando.ua%252Fobyavlenie%252Fpodgotovka-k-zno-matematika-ID5e1v1.html%3B527%3B461