Свойства числовых неравенств

Число $\boldsymbol{a}$ *больше* *числа* $\mathbf{b}$, *если разность* $\boldsymbol{a} - \mathbf{b}$ *–* ***положительное число***.

$$\boxed{\boldsymbol{a > b}, \text{ если } \boldsymbol{a - b > 0}}$$

Число $\boldsymbol{a}$ *меньше* *числа* $\mathbf{b}$, *если разность* $\boldsymbol{a} - \mathbf{b}$ *–* ***отрицательное число***.

$$\boxed{\boldsymbol{a < b}, \text{ если } \boldsymbol{a - b < 0}}$$

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 1:

Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a < b$, то $b > a$.

Пример:

$10 > 3 \Rightarrow 3 < 10$

$1 < 100 \Rightarrow 100 > 1$

Доказательство:

Соотношение $a > b$ означает, что $a - b > 0$. Тогда $-(a - b) < 0$.

Т.к. $-(a - b) = -a + b = b - a \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow b < a$.

Соотношение $a < b$ означает, что $a - b < 0$. Тогда $-(a - b) > 0$.

Т.к. $-(a - b) = -a + b = b - a \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b > a$.

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 2:

Если $\boldsymbol{a < b}$ и $\boldsymbol{b < c}$, то $\boldsymbol{a < c}$.

Пример:

$5 < 9 \qquad 9 < 20$

$\Rightarrow \quad 5 < 20$

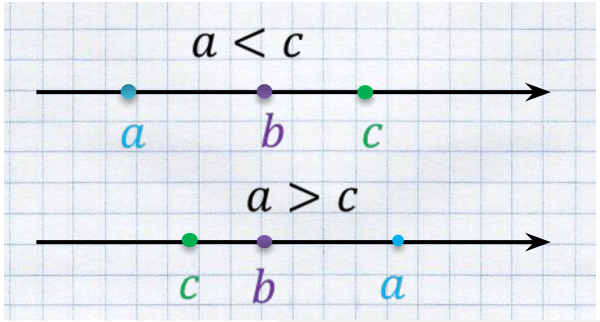
Доказательство:

Так как $\boldsymbol{a < b}$ и $\boldsymbol{b < c}$, то $\boldsymbol{a - b < 0}$ и $\boldsymbol{b - c < 0}$.

Тогда $\boldsymbol{(a - b) + (b - c) < 0}$.

$$\boldsymbol{(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a - c < 0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{a < c}$$



Если $\boldsymbol{a > b}$ и $\boldsymbol{b > c}$, то $\boldsymbol{a > c}$.

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 3:

Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.

Пример:

$4 < 8$

$4 + (-2) < 8 + (-2) \Rightarrow 2 < 6$

Доказательство:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

Т.к. $a < b$, то $a - b < 0$.

$$\Rightarrow (a + c) - (b + c) < 0$$

$$\Rightarrow a + c < b + c$$

Если к обеим частям **верного неравенства** прибавить одно и то же число, то получится **верное неравенство**.

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 4:

Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Пример:

$10 < 30$

$10 \cdot 2 < 30 \cdot 2$

$\Rightarrow 20 < 60$

$3 < 5$

$3 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$

$\Rightarrow -12 > -20$

Доказательство:

$ac - bc = c(a - b)$

Т.к. $a < b$, то $a - b < 0$.

Если $c > 0$, то $c(a - b) < 0 \Rightarrow ac < bc$

Если $c < 0$, то $c(a - b) > 0 \Rightarrow ac > bc$

Если обе части **верного неравенства** умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится **верное неравенство**.

Если обе части **верного неравенства** умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится **верное неравенство**.

Основные свойства числовых неравенств.

Следствие:

Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доказательство:

Разделим обе части неравенства $a < b$ на $ab > 0$.

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} < \frac{\cancel{b}}{a\cancel{b}} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Задание. Сравните значения выражений $k - 17y^2$ и $t - 17y^2$, зная, что $k > t$ – верное числовое неравенство.

Решение:

Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.

$$k > t$$

$$k + (-17y^2) > t + (-17y^2)$$

$$k - 17y^2 > t - 17y^2$$

Ответ: $k - 17y^2 > t - 17y^2$.

Теорема 1: Если $a>b$, то $b<a$.

Если $a<b$, то $b>a$.

Теорема 2: Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

Теорема 3: Если $a<b$ и c – любое число, то $a+c<b+c$.

Теорема 4: Если $a<b$ и c – положительное число, то $ac<bc$.

Если $a<b$ и c – отрицательное число, то $ac>bc$.

Следствие: Если a и b – положительные числа и $a<b$, то

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}.$$