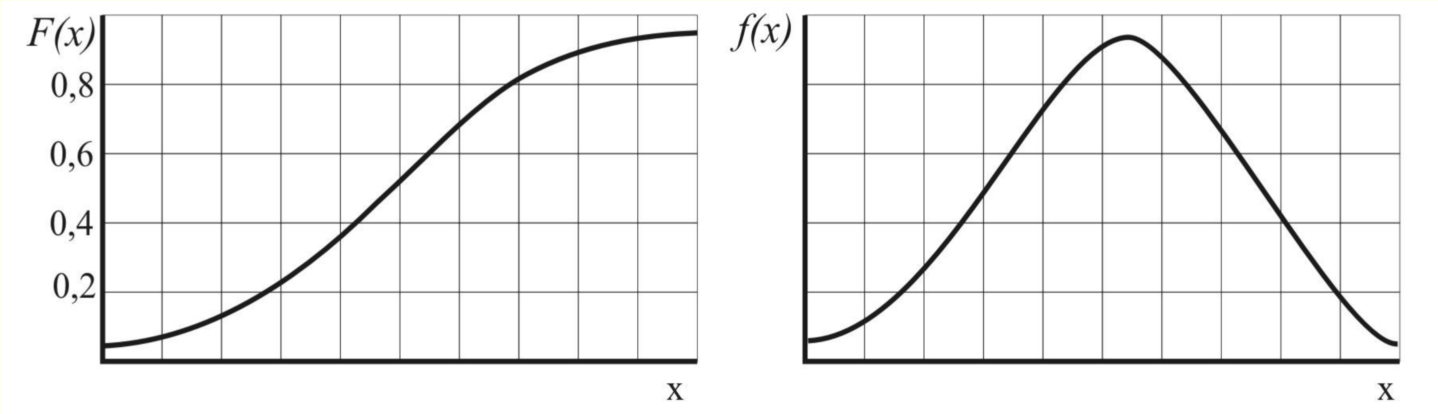
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 5.
Основные изучаемые вопросы:

- **Непрерывные случайные величины.**
- **Функция распределения непрерывной случайной величины.**
- **Равномерный и нормальный законы распределения.**

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- Другой тип случайных величин, кардинально отличающийся от дискретных, - непрерывные случайные величины.
- ***Непрерывная случайная величина*** - это случайная величина, бесконечное и несчетное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный), и она сплошь заполняет этот интервал.
- Следовательно, закон распределения непрерывной случайной величины нельзя задать рядом распределения. Для этого используются ***интегральная*** и ***дифференциальная*** функции распределения.



Функция распределения непрерывной случайной величины

- ***Функция распределения (интегральная функция)*** определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного действительного числа x:

$$F(x) = P(X < x).$$

- Функция распределения непрерывной случайной величины ***непрерывна в любой точке*** и имеет всюду (кроме, возможно, конечного числа точек) непрерывную производную.
- ***Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю.***
- ***Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение X в интервале (x_1, x_2), определяется так:***

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойства интегральной функции распределения непрерывной случайной величины

- 1. Функция распределения может принимать любые значения от 0 до 1, так как по определению является вероятностью:

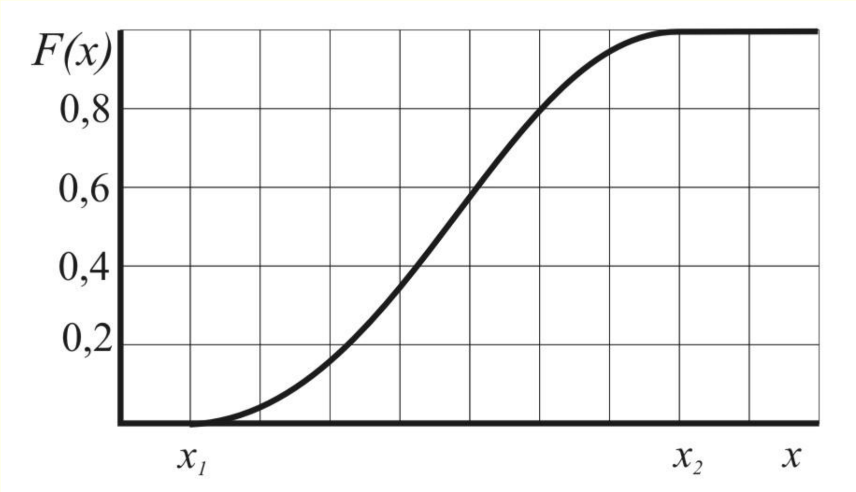
$$0 \le F(x) \le 1.$$

- 2. Интегральная функция распределения является неубывающей:

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ \text{если}\ x_2 \ge x_1.$$

- 3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (x_1, x_2), то

$$F(x) = 0,\ \text{при}\ X < x_1,$$
$$F(x) = 1\ \text{при}\ X > x_2.$$

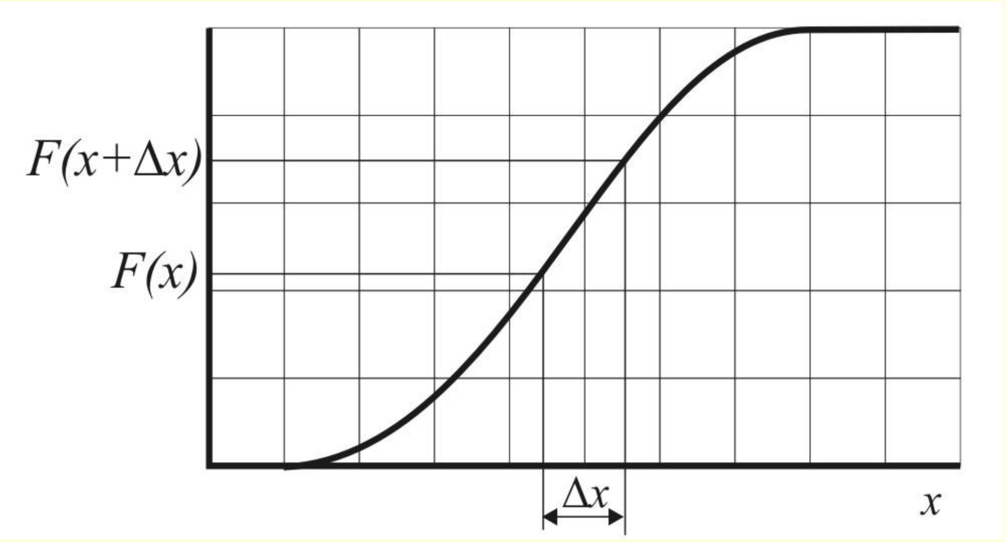


Функция плотности вероятностей непрерывной случайной величины

- Определим некоторую функцию, отражающую вероятности попадания случайной точки в различные участки области возможных значений непрерывной случайной величины, т. е. представим некоторую замену вероятностям p_i для дискретной случайной величины в непрерывном случае.
- Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю. Поэтому необходимо рассматривать ***вероятность попадания в некоторый интервал.***
- Рассмотрим вероятность попадания случайной точки на элементарный участок $(x, \Delta x)$ длины Δx непрерывной случайной величины X, имеющей непрерывную и дифференцируемую функцию распределения $F(x)$ на этом участке. По свойству функции распределения:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

- Определим теперь отношение этой вероятности к длине участка, т. е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины рассматриваемого участка, и рассмотрим предел при $\Delta x \to 0$:

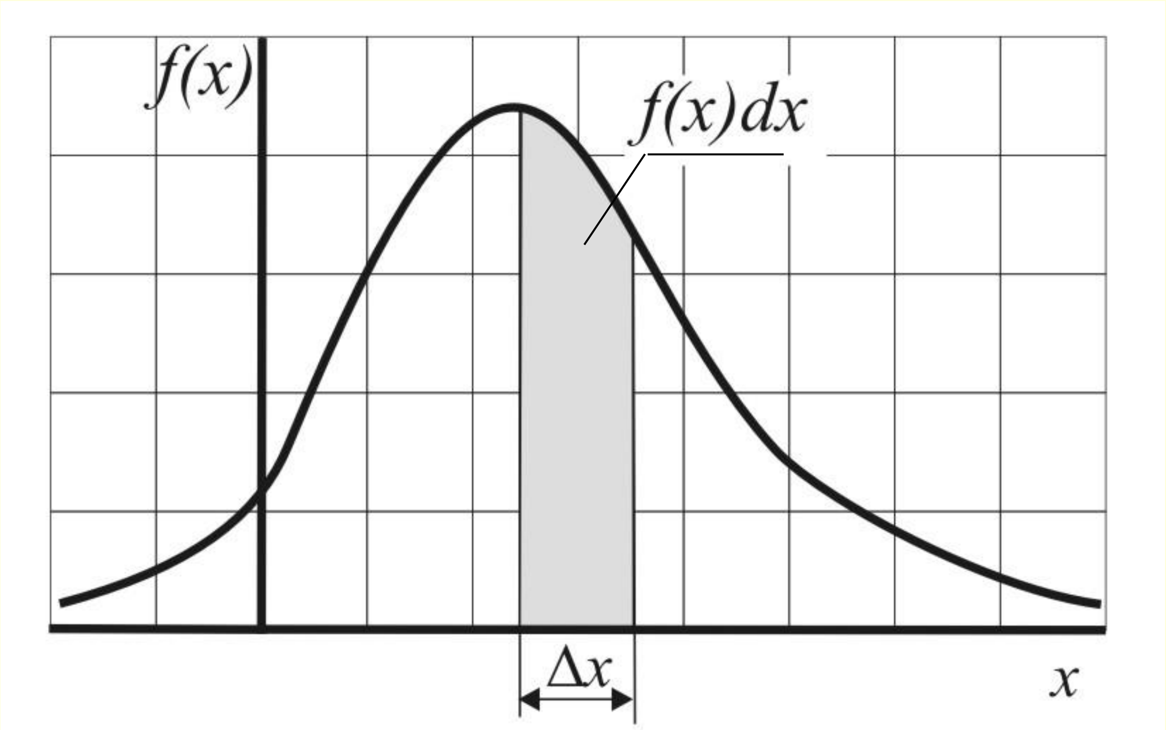


$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

- Функция, характеризующая плотность, с которой распределяются значения непрерывной случайной величины в данной точке, называется ***функцией плотности распределения или функцией плотности вероятностей f(x)***.

- ***Плотностью вероятности*** (плотностью распределения, дифференциальной функцией) случайной величины Х называется функция $f(x)$, являющаяся ***<u>первой производной интегральной функции распределения</u>***

$$f(x) = F'(x).$$



Свойства функции плотности вероятностей

- 1. ***Функция плотности вероятностей принимает только неотрицательные значения*** как производная неубывающей функции распределения *F(x)*:

$$f(x)>0.$$

- 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал от x_1 до x_2 ***равна определенному интегралу*** от функции плотности вероятностей в этих пределах:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

- 3. Функция распределения непрерывной случайной величины ***равна интегралу*** от функции плотности вероятностей в пределах от $-\infty$ до *x:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx.$$

- ***Интеграл*** в бесконечных делах ***от функции плотности вероятностей равен 1*** (как сумма вероятностей всех возможных значении случайной величины *X):*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины

- 1. ***Математическое ожидание*** непрерывной случайной величины определяется по формуле:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

- 2. ***Дисперсия*** непрерывной случайной величины определяется по формуле:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)\, dx.$$

- 3. ***Среднее квадратическое отклонение*** определяется по формуле:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Задана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; при \; x \le 0 \\ x, \; при \; 0 \le x \le 1 \\ 1, \; при \; x \ge 1 \end{cases}$$

- Определить вероятность того, что в результате испытаний случайная величина примет значение большее 0,3, но меньшее 0,7. Найти плотность вероятности распределения случайной величины и ее дисперсию.
- ***Решение.***
- По свойству интегральной функции распределения:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

то есть $P(0{,}3 < X < 0{,}7) = F(0{,}7) - F(0{,}3) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4.$

- По определению плотности вероятностей случайной величины:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, при\ x \le 0 \\ 1,\ при\ 0 \le x \le 1 \\ 0, при\ x \ge 1 \end{cases}$$

- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в определенный интервал на основании свойства плотности распределения вероятностей:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,$$

т.е.

$$P(0{,}3 < X < 0{,}7) = \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx = x\Big|_{0,3}^{0,7} = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4.$$

- По определению, математическое ожидание непрерывной случайной величины равно:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{1} x \cdot 1\,dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0\,dx = x^2/2\Big|_0^1 = 0{,}5.$$

- По определению, дисперсия непрерывной случайной величины равна:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x-0,5)^2 \cdot 0\,dx + \int_{0}^{1} (x-0,5)^2 \cdot 1\,dx + \int_{1}^{\infty} (x-0,5)^2 \cdot 0\,dx =$$

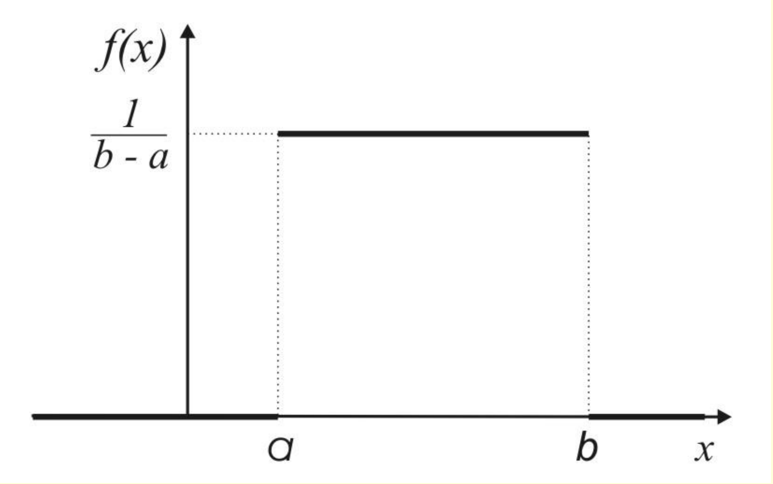
$$= \int_{0}^{1} (x-0,5)^2 \cdot 1\,d(x-0,5) = \frac{(x-0,5)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{0,125+0,125}{3} = \frac{1}{12}.$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

1. Равномерный закон распределения

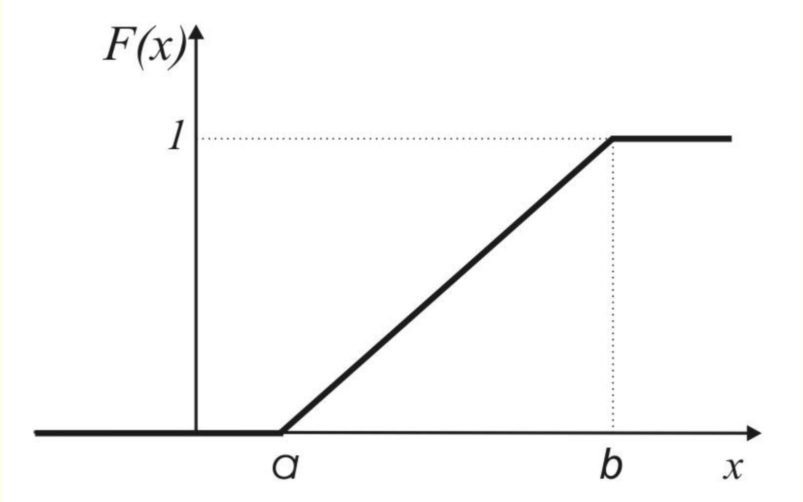
- Непрерывная случайная величина *X* имеет равномерный закон распределения (закон постоянной плотности) на отрезке [*a*; *b*], если на этом отрезке ***функция плотности вероятности*** случайной величины постоянна, т. е. *f(x)* имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}$$



- ***Функция распределения*** равномерно распределенной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \textit{при} \ \ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ \textit{при} \ a\le x\le b \\ 1, \ \textit{при} \ \ x>b \end{cases}$$



- ***Математическое ожидание*** равномерно распределенной случайной величины:

$$M[X] = (b + a)/2.$$

- ***Дисперсия*** равномерно распределенной случайной величины:

$$D[X] = (b - a)^2/12.$$

2. Нормальный закон распределения

- Нормальное распределение – наиболее часто встречающийся вид распределения. Наиболее важным условием возникновения нормального распределения является ***формирование признака X как суммы большого числа независимых слагаемых***, ни одно из которых не характеризуется исключительно большой по сравнению с другими дисперсией.
- Главная особенность нормального распределения состоит в том, что ***оно является предельным***, к которому с ростом числа наблюдений стремятся другие распределения.
- Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения (закон Гаусса)*** с параметрами μ и σ, если ее плотность вероятности имеет вид:

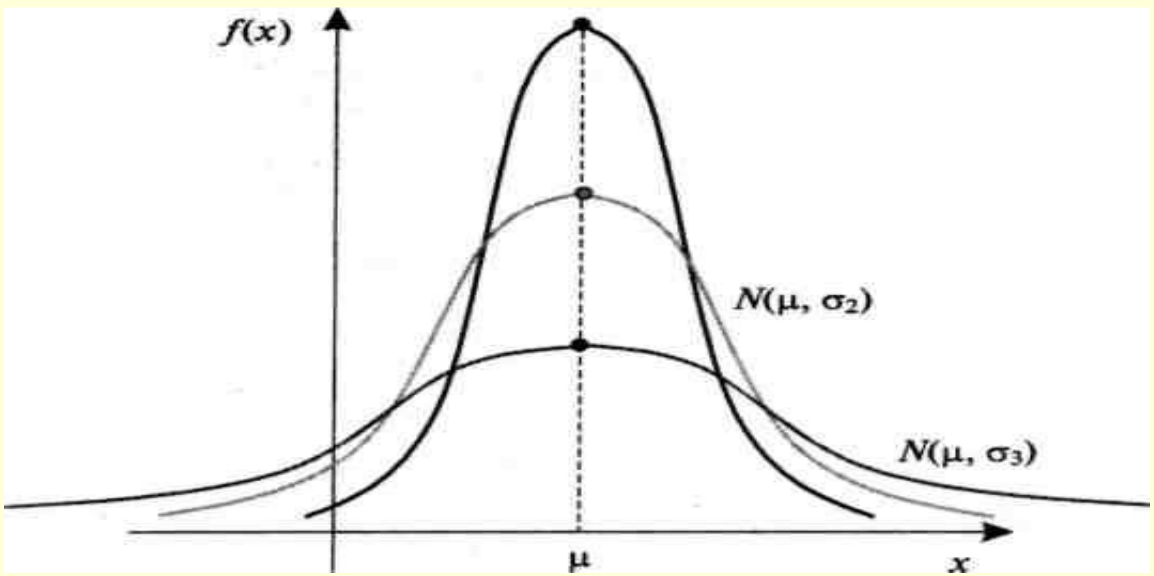
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ - математическое ожидание X,

σ^2 - дисперсия (σ - среднее квадратическое отклонение).

Свойства функции плотности вероятности (кривой Гаусса) нормального закона распределения

- 1. $f(x) > 0$ существует при любых действительных x.
- 2. $f(x) \to 0$ при $x \to \pm \infty$.
- 3. Максимальное значение $f(x)$ принимает в точке $x_0 = \mu$, при этом
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$
- 4. Кривая плотности нормального закона распределения симметрична относительно прямой $x = \mu$.
- 5. Кривая плотности нормального закона распределения имеет две точки перегиба с координатами
$$\left(\mu \pm \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$



- Вычислим функцию распределения случайной величины, имеющей нормальный закон распределения. По определению функции распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

- Интеграл такого рода ***не выражается в элементарных функциях***. ***Для его нахождения используют особую функцию, так называемый интеграл вероятностей или функцию Лапласа*** *Ф(x),* для которой составлены таблицы.
- Одна из разновидностей функции Лапласа имеет вид

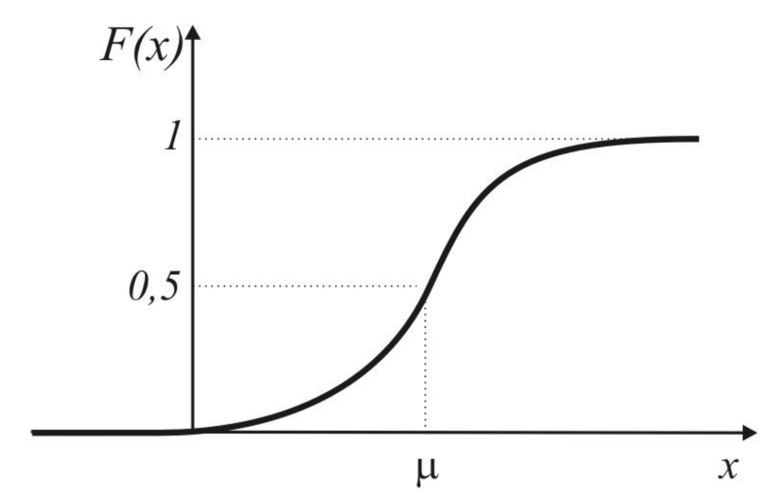
$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

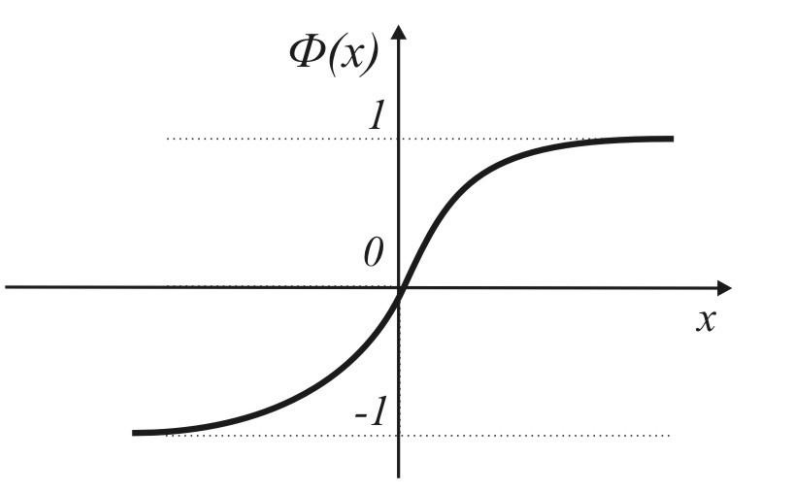
Свойства функции Лапласа:

- 1. *Ф(x)* - нечетная функция, т.е. *Ф(-x) = -Ф(x)*.
- 2. *Ф(x)* - монотонно возрастающая функция, т. е. *Ф(x)* → *1* при $x \to \infty$.

- Итак, ***используя интеграл вероятностей или функцию Лапласа Ф(х) можно выразить функцию распределения нормального закона***:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t);\ t = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$





Функция распределения нормального закона

Функция Лапласа (интеграл вероятностей)

Свойства случайной величины, имеющей нормальный закон распределения

- 1. Для нахождения ***вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал*** *(x_1; x_2)* используется формула:

$$F(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}(\Phi(t_2) - \Phi(t_1));\ t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma};\ t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}.$$

- 2. Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания μ не превысит величину $\varepsilon > 0$ (по абсолютной величине), равна:

$$P(\left|X - \mu\right| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

- 3. «Правило трех сигм». Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами μ и σ, то практически достоверно (с вероятностью $P = 0{,}9973$), что ее значения заключены в интервале (μ - 3σ; μ + 3σ). (Вероятность «выброса» равна 0,0027.)