ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 2.

Основные изучаемые вопросы:

- **Классическое определение вероятности.**
- **Геометрическое определение вероятности.**
- **Статистическое определение вероятности.**
- **Теоремы сложения и умножения вероятностей.**

Классическое определение вероятности

- Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.
- В соответствии с классическим определением, ***вероятность Р(А) события А равняется отношению числа случаев М, благоприятствующих событию А, к общему числу всех возможных исходов испытания N***:

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

При этом полагают, что:

- испытание содержит конечное число исходов, то есть A_1, A_2, A_3, A_n – <u>полная группа событий</u>;
- все исходы испытания <u>равновозможны и несовместны</u>: говорят: «взяты наугад», «наудачу» и т.п.

Примеры

- В урне находятся 10 шаров белого цвета и 5 шаров красного цвета. Пусть событие A_1 состоит в извлечении из урны белого шара , а событие A_2 – в извлечении красного шара.
- Тогда

  $P(A_1) = 10/(10 + 5) = 2/3,$

  $P(A_2) = 5/(10 + 5) = 1/3.$

- Событие A_1 состоит в выпадении на игральном кубике 6 очков, событие

  A_2 – в выпадении 4 или 5 очков, а событие A_3 – в выпадении 1, 2 или 3 очков. Всего исходов 6. Исходов, благоприятных событию

  A_1 – 1, событию A_2 - 2, событию A_3 - 3. тогда

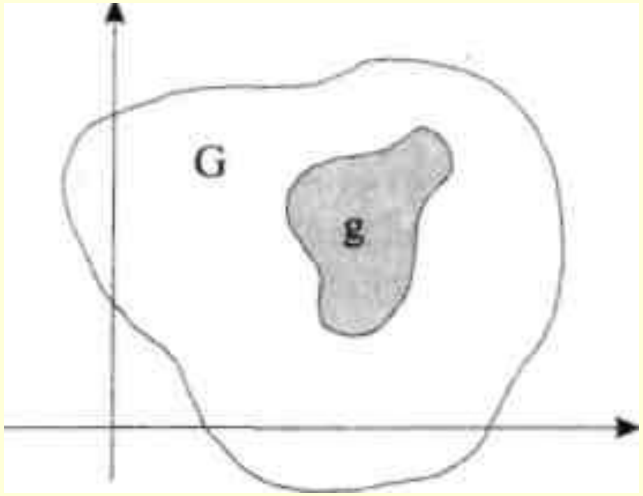
  $P(A_1) = 1/6,$

  $P(A_2) = 2/6 = 1/3,$

  $P(A_3) = 3/6 = 1/2.$

Геометрическое определение вероятности

- Классическое определение вероятности основывается на том, что число всех возможных случаев <u>конечно</u>.
- Если распределение возможных исходов испытания непрерывно и бесконечно, то при решении задач используется понятие геометрической вероятности - ***вероятности попадания точки в область*** (отрезок, часть плоскости, часть объема и т. д.).



Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области *g (mes(g))*, благоприятствующей событию *A*, к мере всей области *G (mes(G))*:

$$P(g) = \frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

Область, на которую распространяется геометрическая вероятность, может быть:

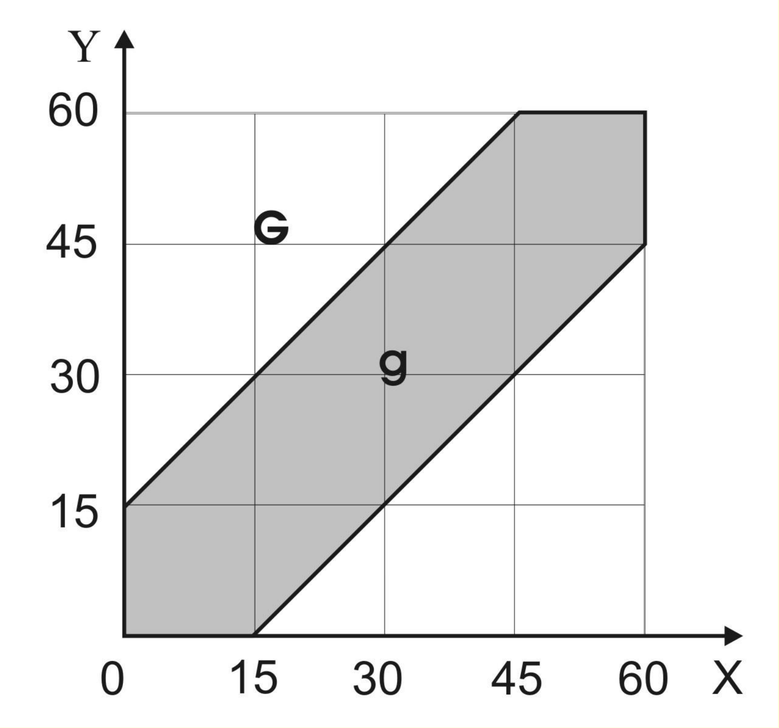
- одномерной (кривая, отрезок), тогда ее мерой является ***<u>длина</u>***;
- двумерной (геометрическая фигура на плоскости), мерой ее является ***<u>площадь</u>***;
- трехмерной (тело в пространстве), мерой ее является ***<u>объем</u>***;
- n-мерной в общем случае.

Пример. Два друга договорились встретиться в определенном месте между 16.00 и 17.00. Пришедший первым ждет другого в течение 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность их встречи, если приход каждого из друзей в течение указанного времени случаен и моменты прихода независимы?

- ***Решение.***

Событие A состоит в том, что встреча друзей состоялась.

- Обозначим x и y- моменты прихода двух друзей, которые меняются в интервале от 0 до 60 минут. Все такие пары (x, y) представляют собой все возможные моменты приходов двух друзей. Для того чтобы встреча состоялась необходимо, чтобы $x - y < 15$ или $y - x < 15$, т. е. $|x - y| < 15$. При графическом изображении (x, y) в двумерной системе координат область G - всех возможных исходов представляет собой квадрат со сторонами 60, а область g (исходов, благоприятствующих событию g), представляет собой выделенную область.



- Вероятность события *A,* согласно геометрическому определению вероятности, равна отношению площади выделенной фигуры *g* к площади квадрата G:

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

Статистическое определение вероятности

- ***Статистическая вероятность определяется из опыта наблюдения результатов испытания.*** С этой целью проводится в неизменных условиях большое число ***n*** независимых друг от друга одинаковых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может появиться или не появиться, и фиксируется число появлений события A, обозначаемое через m_A.
- По данным наблюдений рассчитывают отношение $w_A = \frac{m_A}{n}$ называемое ***частостью*** (***относительной частотой***, выборочной долей) события A.
- **Статистической вероятностью** события A называется предел частости (относительной частоты) m_A / n появления этого события в n произведенных испытаниях при стремлении n к бесконечности:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} w_A = \lim_{n\to\infty} \frac{m_A}{n}.$$

- При конечном значении n, меньшем бесконечности, частость в результате проведения опыта может, разумеется, несколько отличаться от вероятности.
- Например, при проведении серий из 1000 опытов с подбрасыванием монеты Яков Бернулли лишь несколько раз получил значение частости выпадения «орла», в точности равным 0,5; в большинстве же случаев частость отличалась от «теоретического» значения на 1-2 %.
- Общее правило при этом таково: ***с увеличением числа опытов среднее значение частости стремится к значению «классической» вероятности события***.
- Классическая вероятность априорна (ее получают, не производя опытов, на основе рассуждений), а статистическая вероятность апостериорна (ее получают после проведения серии или нескольких серий опытов).

- **Пример.** На 1000 заключенных договоров определенного типа страховщик зафиксировал к концу года 15 произошедших страховых случаев. Следовательно, в дальнейшем он может считать вероятность наступления страхового случая в такого типа договорах, приблизительно равной:

$$P(A) = w_A = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{1000} = 0{,}015.$$

- Заметим, что рассматриваемый статистический подход к определению неизвестной вероятности события дает ***оценку вероятности***, понятие которой уточняется в математической статистике.
- К статистическому определению вероятности приходится часто обращаться на практике, когда ***исходы случайного эксперимента*** уточнены досконально и, если даже они известны в конечном числе, то их никак ***нельзя считать равновероятными до опыта***.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

- Для использования теорем сложения вероятностей ***необходимо установить совместность - несовместность событий***, т. е. могут ли они происходить одновременно.

Теорема сложения для двух <u>несовместных</u> событий

- Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения для *n* <u>несовместных</u> событий

- Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \dots + P(A_n).$$

Рассмотрим важные следствия из теоремы сложения для несовместных случайных событий.

Следствие 1.

- Сумма вероятностей событий H_1, H_2 ..., H_n, ***образующих полную группу несовместных событий***, равна 1.

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Следствие 2.

- Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема сложения для двух совместных событий

- Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорема сложения для трех совместных событий

- Вероятность суммы трех совместных событий равна: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(B\cdot C)-P(A\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)$.

  Пример. Сеть закусочных, торгующих хотдогами и гамбургерами, установила, что 75 % всех посетителей используют горчицу, 80 % - кетчуп, а 65 % - и то, и другое.

  а) Какова вероятность, что случайно взятый клиент будет использовать хотя бы одну из этих приправ?

  б) Какова вероятность, что он будет использовать только кетчуп?

- ***Решение.***

  Обозначим случайные события:

  A - случайно выбранный посетитель использует горчицу;

  B - случайно выбранный посетитель использует кетчуп.

  Тогда $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}8$; $P(A\cdot B) = 0{,}65$.

В соответствии с формулой для двух совместных событий

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,75 + 0,8 – 0,65 = 0,9.$

Итак, вероятность того, что посетитель воспользуется хотя бы одной из двух специй

$$P(A + B) = 0,9.$$

Вероятность события, заключающегося в том, что посетитель воспользуется только кетчупом, можно определить двумя способами:

- вычесть из вероятности использования хотя бы одной из специй вероятность использования горчицы:

$$P(A + B) - P(A) = 0,9 – 0,75 = 0,15;$$

- вычесть из вероятности использования посетителем кетчупа вероятность использования одновременно обеих специй:

$$P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 – 0,65 = 0,15.$$

Теоремы умножения вероятностей

- Если при использовании теорем сложения вероятностей проверяется совместность/несовместность событий, то применение теорем умножения требует проверки случайных событий на зависимость/независимость.
- События *А и В* называются ***зависимыми***, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. Иначе случайные события называются ***независимыми.***
- **Пример.** При подбрасывании двух монет событие *А* - появление герба на первой монете и событие *В* - появление герба на 2-й монете - есть события независимые друг от друга, так как вероятность их наступления не зависит от появления или не появления другого события.
- При подбрасывании одной и той же монеты несколько раз появление герба каждый раз не зависит от того, появился ли герб предыдущий раз, и соответствующие события также будут независимыми.

- **Пример.** При извлечении без возвращения одного за другим двух шаров из урны с черными и белыми шарами событие *A* - появление первого белого шара и событие *B* - извлечение после этого второго белого шара - **являются зависимыми**, так как вероятность события *B* зависит от того, произошло или нет событие *A,* изменяющее количество и состав шаров в урне.
- ***Несовместные события зависимы***, так как появление любого из их обращает в нуль вероятности появления всех остальных.
- В случае зависимых событий ***вводится понятие условной вероятности***.
- ***Условной вероятностью P(A/B)*** события *A* называется его вероятность, вычисленная при условии, что событие *B* произошло. Аналогично, через *P(B/A)* обозначается условная вероятность события *B* при условии, что *A* наступило.
- Для независимых событий по определению

$$P(A/B)=P(A); \; P(B/A) = P(B).$$

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) случайным образом извлекается одна карта. Определим случайные события:

- A - появление дамы,
- B - появление карты черной масти,
- C - появление пиковой дамы.

Определить зависимость/независимость следующих пар событий:

1) A и B; 2) A и C, 3) B и C.

- ***Решение.***

1) А и В - независимы, при этом $P(A) = 1/13$, $P(B) = 1/4$.

2) А и С – зависимы, при этом $P(A/C) = 1$, $P(C/A) = 1/4$.

3) В и С – зависимы, при этом $P(B/C) = 1$, $P(C/B) = 1/26$.

Теорема умножения для зависимых событий

- ***Вероятность произведения зависимых событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, первое произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Следствие 1.

- ***Вероятность произведения независимых событий*** равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие 2.

- ***Для n независимых испытаний***, в каждом из которых случайное событие *A* может появиться с вероятностью $P(A) = p$, вероятность появления *A* хотя бы один раз равна:

$$P(B) = 1 - (1 - p)^n.$$

Пример. В коробке имеется 5 новых и 7 использованных батареек. Случайным образом из коробки извлекают две батарейки. Какова вероятность, что обе батарейки окажутся новыми, если осуществляется выбор:

- а) без возвращения - батарейки не возвращаются обратно;
- б) с возвращением - батарейки после извлечения возвращаются обратно в коробку.

Решение.

- Обозначим события:
- A_1 - первая извлеченная батарейка - новая;
- A_2 - вторая извлеченная батарейка - новая;
- A - обе извлеченные батарейки - новые.
- Очевидно, что событие A является произведением A_1 и A_2, так как оба эти события должны наступить для того, чтобы произошло событие A, т. е. $A = A_1 \cdot A_2$.

- а). Так как выбор осуществляется без возвращения, то события A_1 *и* A_2 - зависимые. Вероятность события A_2 зависит от того, произошло или не произошло до этого событие A_1.
- Вероятность того, что первая извлеченная батарейка будет новой, равна $P(A_1) = 5/12$.
- После этого в коробке останется 11 батареек, из них 4 новые. Таким образом, условная вероятность события A_2, при условии что перед ним произошло событие A_1 равна $P(A_2/A_1) = 4/11$.
- По теореме умножения для зависимых событий вероятность искомого события *A:*

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = 5/12 \cdot 4/11 = 5/33.$$

- б). Так как выбор осуществляется с возвращением, то состав коробки не изменяется, следовательно, события A_1 и A_2 - независимые, так как вероятность события A_2 не зависит от того, произошло или не произошло до этого событие A_1.
- Вероятность того, что первая и вторая извлеченные батарейки будут новыми равна

$$P(A_1) = P(A_2) = 5/12.$$

- По теореме умножения для независимых событий, вероятность искомого события A:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = (5/12)^2 = 25/144.$$

Примеры для обсуждения

- По какой формуле вычисляют вероятность совместного появления двух зависимых событий?

  а) $P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$;

  б) $P(A) + P(B)$;

  в) $P(A) \cdot P(B/A)$;

  г) $P(A) \cdot P(B)$.

- По какой формуле можно определить вероятность появления одного из двух несовместных событий

  а) $P(A) \cdot P(B)$;

  б) $P(A) + P(B)$;

  в) $P(A) \cdot P(B/A)$;

  г) $P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$.

- Известны вероятности событий А, В и С. Какие из формул соответствуют событию, состоящему в том, что выполнятся все события А, В и С?

  а) $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$;

  б) $P(A + B + C)$;

  в) $1 - P(A \cdot B \cdot C)$;

  г) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

- Известны вероятности событий А, В и С. Какая из формул соответствует событию, состоящему в том, что выполнится хотя бы одно из событий А, В и С?

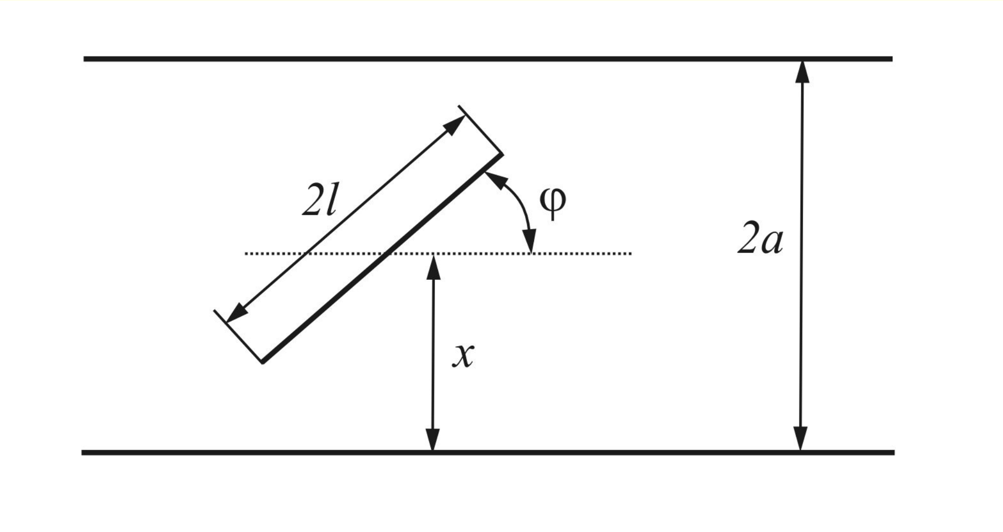
  а) $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$;

  б) $1 - P(A + B + C)$;

  в) $1 - P(A \cdot B \cdot C) - P(A \cdot B \cdot C) - P(A \cdot B \cdot C)$;

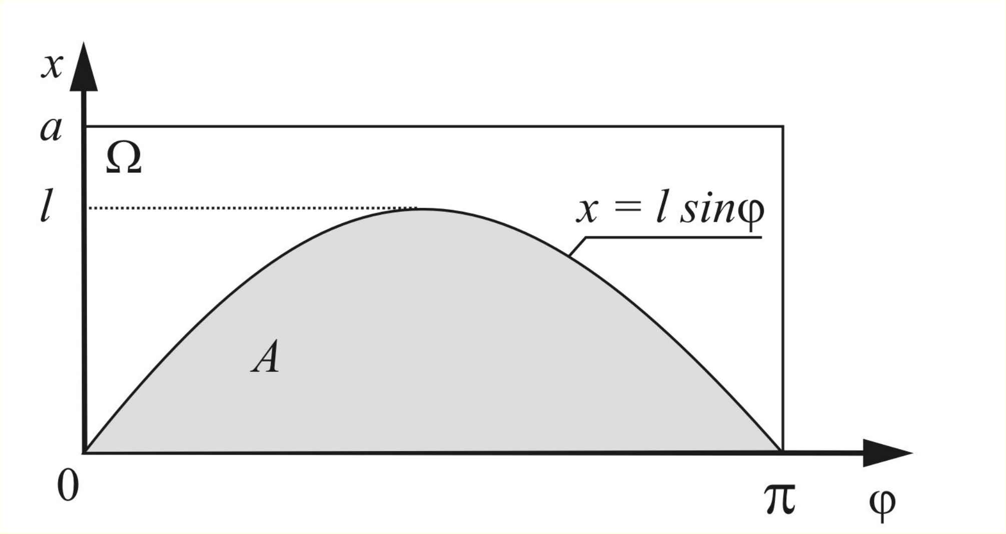
  г) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

- **Задача Бюффона**
- На плоскости проведены две параллельные прямые на расстоянии $2a$ друг от друга. На плоскость наудачу брошена игла длиной $2l < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?
- Решение
- Возможные положения иглы (длины отрезка $2l$) полностью определяются поперечной координатой центра иглы x и углом поворота ее относительно параллельных прямых ϕ. Эти параметры не зависят друг от друга.



- Координата x может изменяться относительно середины расстояния между прямыми в интервале от 0 до a, а координата ϕ – в интервале от 0 до π.
- Множество возможных положений иглы может быть задано прямоугольником размерами $a \cdot \pi$.
- Благоприятные для пересечения иглой одной из параллельных прямых задаются неравенством

$$x \leq l \sin\pi.$$



- Площадь области A$\in\Omega$, точки которой удовлетворяют неравенству $x \le$ l sinπ, равна интегралу

$$m(A) = \int_0^{\pi} l\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi = -l\cdot\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = 2l.$$

- Площадь области Ω равна, как уже упоминалось, $a\cdot\pi$. Тогда вероятность накрытия иглой одной из линий определится как отношение указанных площадей:

$$P(A) = 2l / a\pi.$$