ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 1.

Основные изучаемые вопросы:

- **Случайные события.**
- **Понятие вероятности события.**
- **Элементы комбинаторики.**

ВВЕДЕНИЕ

- Все явления окружающей нас действительности можно рассматривать с точки зрения вероятности их наступления в ходе опыта (испытания).
- Под ***испытанием*** понимают процесс, протекающий при определенных условиях и приводящий к одному из возможных исходов.
- ***Исходом опыта*** может быть результат наблюдения, измерения, оценки.
- ***Элементарным событием*** является отдельный, отличающийся от других, исход испытания.
- К примеру, испытание – это выстрел, а исходы (элементарные события) – попадание или промах.

Основные понятия. Алгебра событий

- ***Случайное событие*** **- это любой факт, который может либо произойти, либо не произойти при выполнении некоторого комплекса условий.**

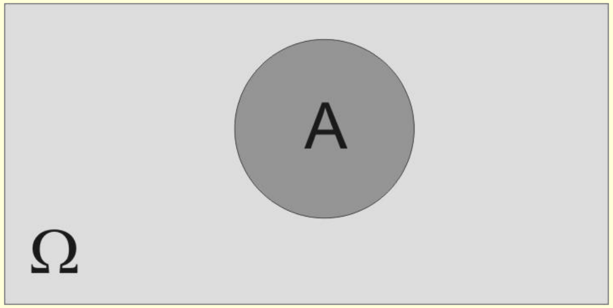


Диаграмма Эйлера-Венна

- Примеры случайных событий — выпадение «орла» при бросании монеты, попадание в мишень при выстреле, появление туза при вынимании карты из колоды и т. п.
- Обычно случайные события обозначаются заглавными латинскими буквами: *A, B, C,...*

- Если в каждом испытании с неизбежностью происходит некоторое событие - оно называется ***достоверным*** (обозначается Ω).
- Если событие заведомо не может произойти при данном комплексе условий (ни при каком испытании) — оно называется ***невозможным*** (обозначается $\varnothing$).
- События A и B называются ***несовместными (несовместимыми),*** если появление одного из них исключает появление другого (не могут произойти одновременно).
- События A и B - ***совместные (совместимые),*** если они могут произойти одновременно в результате испытания.
- События A и B ***- равновозможные,*** если по условиям испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным.

Пример. Рассмотрим случайные события - выпадение определенного числа на верхней грани - которые могут произойти при бросании простого шестигранного игрального кубика.

Введем обозначения случайных событий:

- Ω - выпадение какого-либо числа от 1 до 6 - достоверное событие;
- $\varnothing$ - выпадение числа 7 - невозможное событие;
- A - выпадение числа 2,
- B - выпадение числа 3,
- C - выпадение нечетного числа,
- D - выпадение любого из чисел 1, 3 или 5.
- Тогда события: A и B, A и C, A и D - несовместные;

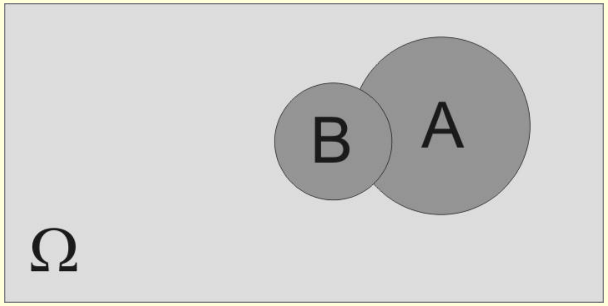
  B, C и D - совместные; причем B - частный случай *C*.

  C и *D* - равносильные;

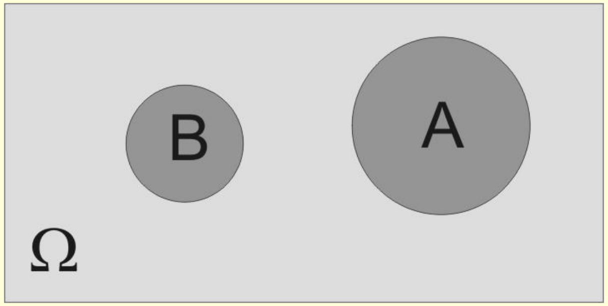
  A и B - равновозможные.

В теории вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

- ***Суммой событий*** A и B называют событие $A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий A или B.
- Для суммы событий выполняются соотношения:
- $A + B = B + A;$
- $A + \Omega = \Omega;$
- $A + \varnothing = A;$
- $A + A = A.$

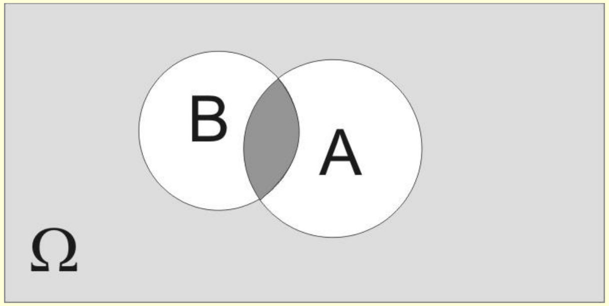


Сумма совместных событий A и B

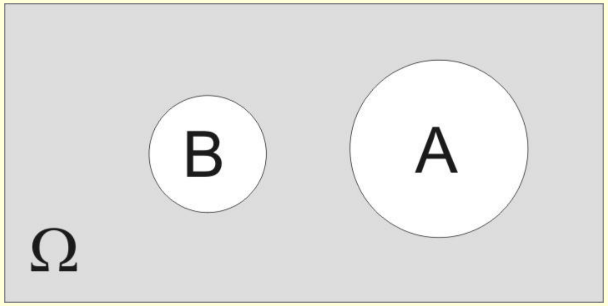


Сумма несовместных событий A и B

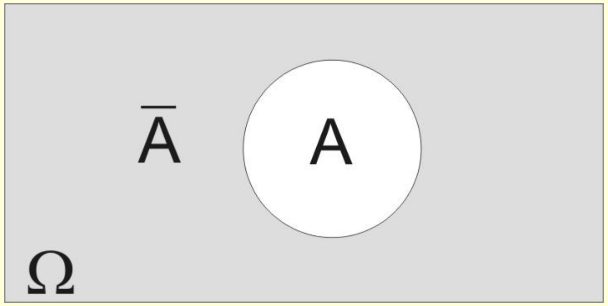
- ***Произведением событий*** A *и* B называют событие $A \cdot B$, состоящее в одновременном наступлении этих событий.



- Для произведения событий выполняются соотношения:
- $A \cdot B = B \cdot A;$
- $A \cdot \Omega = A;$
- $A \cdot \varnothing = \varnothing;$
- $A \cdot A = A.$



- Событие $\bar{A}$ называется ***противоположным событием*** (дополнением) события A, если непоявление одного события влечет появление другого.



- **Пример.** Пусть случайным образом из колоды карт извлекается одна карта. Введем обозначения:
- событие *A* - извлечение дамы;
- событие *B* - извлечение короля;
- C - извлечение карты пиковой масти.

Тогда события: $A + B$ - извлечение дамы или короля любой масти;

$A \cdot C$ - извлечение пиковой дамы;

$(A+B) \cdot C$ - извлечение пиковой дамы или пикового короля.

***Операции сложения и произведения удовлетворяют свойству дистрибутивности**:*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

$$A + B \cdot C = (A + B)(A+C).$$

Операции над событиями удовлетворяют формулам де Моргана:

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

- События образуют ***полную группу попарно несовместимых событий***, если любые два из них несовместны и хотя бы одно непременно должно произойти в результате испытания.
- Следует иметь в виду соотношения:

$$\overline{\overline{A}} = A;$$

$$A + \overline{A} = \Omega;$$

$$A \cdot \overline{A} = \varnothing.$$

- **Пример.** При бросании игрального кубика случайные события H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 - обозначающие соответственно выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6 - образуют полную группу событий.

  События A_1 и A_2 - выпадения четного и нечетного числа - также образуют полную группу событий (и, заметим, являются противоположными).

Примеры для обсуждения

- 1. Какие из предложенных событий являются совместными?

  a). Опыт - бросание монеты.

  События: A - выпала цифра; B - выпал герб;

  b). Опыт - бросание игральной кости.

  События: A - выпадение единицы; B - выпадение тройки; C - выпадение четного числа очков;

  c). Опыт - бросание двух монет.

  События: A - хотя бы на 1 из монет выпадет герб; B - на обеих монетах выпадет герб;

  d). Опыт - два выстрела по мишени.

  События: A - есть хотя бы одно попадание; B - ни одного попадания.

- 2. Какие из предложенных событий являются несовместными?

  a). Опыт - бросание монеты.

  События: *A* - хотя бы на одной монете выпал герб; *B* - на обеих монетах выпал герб;

  b). Опыт - два выстрела по мишени.

  События: *A* - хотя бы одно попадание; *B* - ни одного попадания;

  c). Опыт - бросание игрального кубика.

  События: *A* - выпадение шестерки; *B* - выпадение четного числа очков;

  d). Опыт - сдача экзамена.

  События: *A* - получение оценки «3» на экзамене;

  B - получение оценки ниже оценки «5».

- 3. Какие из предложенных событий образуют полную группу событий?

  а). Выигрыш по первому билету и проигрыш по второму лотерейному билету при наличии двух лотерейных билетов.

  b). Два попадания, одно попадание и ни одного попадания при двух выстрелах.

  c). Появление 1, 2, 3, 4 при бросании игрального кубика.

  d). Получение оценки «5» и получение оценки 4 «на экзамене».

- 4. Что понимают под суммой двух несовместных событий *А и В?*

  а). Совместное появление событий *А и В*.

  b). Появление хотя бы одного из событий *А* или *В*.

  с). Появление либо события *А,* либо события *В*.

Классическое определение вероятности

- ***Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.***
- В соответствии с классическим определением, вероятность *P(A)* события *A* равняется отношению числа случаев *M,* благоприятствующих событию *A,* к общему числу всех возможных исходов испытания *N:*

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

При этом полагают, что:

- испытание содержит конечное число исходов;
- все исходы испытания равновозможны и несовместны.

Свойства вероятности события

1. ***Вероятность любого случайного события есть число от нуля до единицы***, так как число благоприятных исходов не может превышать общего числа исходов испытания *(M < N):*

$$0 < P(A) < 1.$$

2. ***Вероятность достоверного события равна 1***, так как все исходы испытания являются благоприятными *(M = N):*

$$P(A) = 1.$$

3. ***Вероятность невозможного события равна 0***, так как нет ни одного благоприятного исхода испытания ($M = 0$):

$$P(\varnothing) = 0.$$

Пример. Известно, что среди 25 приборов имеется 5 бракованных. Какова вероятность при случайном отборе взять бракованный?

- ***Решение.***

Множество исходов испытания представляет собой все возможные способы выбора одного прибора из имеющихся 25. Так как отбор случайный, ***все они равновозможны.***

Событие A состоит в том, что отобранный прибор - бракованный. Таким образом общее число вариантов отбора N = 25, из них 5 случаев благоприятствуют событию A, т. е. $M = 5$.

Следовательно, в соответствии с классическим определением, вероятность события A составляет:

$$P(A) = 5/25 = 0{,}2.$$

Элементы комбинаторики

- **Комбинаторика** - это раздел математики, изучающий методы решения задач на подсчет числа различных комбинаций.
- В комбинаторике есть два важных правила, часто применяемых при решении комбинаторных задач.

1. Правило умножения комбинаторики

Пусть требуется выполнить одно за другим какие-то k действий, причем первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами и т. д. до *k-го* действия, которое можно выполнить n_k способами. Тогда все k действий вместе могут быть выполнены $n_1\ n_2\ \ldots\ n_k$ способами.

2. Правило сложения комбинаторики.

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно них можно выполнить n_1 способами, а другое n_2 способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n_1 + n_2$ способами.

Пример. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

- ***Решение.***

Семизначный номер представляет собой комбинацию 7 ячеек, каждую из которых мы можем заполнить одной из имеющихся в нашем распоряжении 10 цифр - 0, 1, 2, ..., 9. Только в первой ячейке не может быть цифры 0 - иначе номер не будет 7-значным (мы не рассматриваем варианты, когда телефонный номер не может начинаться еще на какие-то цифры, например, на 8 в Москве).

Таким образом, 1-ю ячейку мы можем заполнить 9 способами, а 2-ю, 3-ю и т. д. до последней - 10 способами. Следовательно, по правилу умножения, общее число комбинаций будет равна произведению:

$$N = 9 \cdot 10^6 = 9\ 000\ 000.$$

Пример. Выбрать книгу или диск (один предмет) из 10 книг и 12 дисков можно $N = 10 + 12 = 22$ способами.

Рассмотрим основные понятия комбинаторики. Пусть дано множество из $\boldsymbol{n}$ различных элементов и из него мы выбираем случайным образом $\boldsymbol{m}$ элементов ($0 < \boldsymbol{m} < n$).

Эти $\boldsymbol{m}$-элементные подмножества могут отличаться:

- составом элементов;
- порядком следования элементов;
- возможностью повтора элементов в подмножестве;
- объемом подмножества.

В соответствии с этим выделяют следующие виды подмножеств.

1. Размещения - упорядоченные m-элементные подмножества n-элементного множества, которые отличаются как ***составом***, так и ***порядком следования элементов***. Число всех размещений A^m_n из n элементов по m (где $m < n$), определяется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Напомним, что факториал есть

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

$$0! = 1.$$

Пример. Сколькими способами можно случайным образом из 25 студентов курса выбрать двух (с учетом порядка их выбора)?

- ***Решение.***

Так как в данном случае важно не только то, какие два человека будут выбраны из 25 (состав элементов ***n***), но и кто из них первый, а кто - второй (порядок следования элементов), то общее число комбинаций будет числом размещений из 25 элементов по 2 (***m***).

Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$A_n^m = \frac{25!}{(25-2)!} = \frac{25!}{23!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} = 25 \cdot 24 = 600.$$

Размещения с повторениями

- Каждое размещение с повторениями из n элементов по m элементов может состоять не только из различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов или не содержать их вообще.
- Например, возьмем в качестве трех элементов цифры 1, 2 и 3, тогда $n = 3$. Построим соединения из них, содержащие два элемента ($m = 2$), которые будут отличаться друг от друга либо элементами, либо порядком их расположения
- Таких соединений будет девять (число размещений с повторениями из трех по два):

11 12 13 21 22 23 31 32 33

- Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов будем обозначать символом $A^m_{n(c\ повт)}$

$$A^m_{n(c\ повт)} = n^m.$$

2. Перестановки - любые упорядоченные множества, в которые входят по одному все n различных элементов исходного множества. Число всех перестановок P_n из n элементов определяется по формуле:

$$P_n = n!$$

Перестановки - это частный вид размещений, когда $n = m$:

$$P_n = A^m_n.$$

Пример. Сколькими способами можно поставить 5 человек в очередь?

- ***Решение.***

Так как в данном случае искомые комбинации будут состоять из всех 5 элементов исходного множества, то общее число комбинаций будет числом перестановок из 5 элементов.

- Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

- **Перестановки с повторениями**
- Пусть имеется совокупность n элементов, среди которых m элементов первого типа, l элементов второго типа и k элементов третьего типа ($m + l + k = n$).
- Для расчета числа возможных перестановок с повторениями применяют формулу:

$$P_{повт} = \frac{n!}{m!\, l!\, k!}.$$

- Например, возьмем две цифры (1 и 2), которые в 4-значном (n = 4) числе повторяются по 2 раза (m = 2, k = 2). Число возможных перестановок с повторениями

$$P_{повт} = \frac{4!}{2!\, 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6.$$

- Найдем все эти перестановки:

1122 1212 1221 2112 2121 2211.

3. Сочетания – это m-элементные подмножества n-элементного множества, которые отличаются только составом элементов (порядок их следования не важен!).

Число всех сочетаний C^m_n из n элементов по m (где $m < n$), определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно вызвать двух человек из группы 25 человек случайным образом к доске?

- ***Решение.***

Так как в данном случае важно только то, какие 2 человека будут выбраны из 25 человек группы (состав элементов), а порядок их следования не важен, то общее число комбинаций будет числом сочетаний из 25 элементов по 2. Таким образом, искомое общее число способов будет равно:

$$C_n^m = \frac{25!}{2!\cdot(23)!} = 300.$$

Сочетания с повторениями

- Рассмотрим случай, когда сочетание из n элементов по m элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз *от 1 до m включительно*, или не содержать его совсем. Такое соединение называется *сочетанием с повторениями.*
- Например, возьмем в качестве трех элементов цифры 1, 2 и 3, тогда $n = 3$. Построим соединения из них, содержащие два элемента $(m = 2)$, которые будут отличаться друг от друга хотя бы одним элементом, при этом каждый элемент может повторяться.
- Таких соединений будет шесть (число перестановок с повторениями):

  11 12 13 22 23 33
- Формула для вычисления числа сочетаний с повторениями:

$$C^m_{n\ (c\ повт)} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Примеры для обсуждения

- Четыре студента претендуют на три места в олимпиаде. Сколько существует способов распределения мест между ними?
- Сколькими способами можно выбрать 7 красок из 9?
- Если выполняются соотношения $n > 2, m < n,$ то какое число больше: A_n^m или C_n^m ?
- Сколькими способами можно составить список из пяти фамилий?
- Сколькими способами можно переставить буквы в слове ОЛОВО?