Тема 1. Численные методы алгебры

Лекция 4. Численные методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений

Цель: изучить систематизированную основу теоретических знаний численных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ).

Учебные вопросы:

4.1. Постановка задачи.

4.2. Метод простых итераций.

4.3. Метод Зейделя.

4.4. Метод Ньютона.

Литература к лекции 4:

[1], с. 69…74, 66…68;

[2], с. 43…48;

[3], с. 46…55.

4.1. Постановка задачи

Исходные данные:

$$\left.\begin{array}{l} f1(x1, x2, \ldots, xn) = 0, \\ f2(x1, x2, \ldots, xn) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ fn(x1, x2, \ldots, xn) = 0, \end{array}\right] \text{СНАУ} \qquad (1)$$

Начальное приближение:

$$X^{(0)} = \left[x1^{(0)} \quad x2^{(0)} \quad x3^{(0)} \ldots \ xn^{(0)}\right]^T.$$

4.2 Метод простых итераций

$$fi(x1, x2, \ldots, xn) = 0, \qquad xi = xi + fi(x1, x2, \ldots, xn), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\text{имеем} \quad xi^{(0)}, \; i = \overline{1, n}. \qquad \left[xi = \varphi i(x1, x2, \ldots, xn), \quad i = \overline{1, n}. \right. \qquad (2)$$

$$xi^{(K+1)} = \varphi i(x1^{(K)}, x2^{(K)}, \ldots, xn^{(K)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad K = 0, 1, 2, \ldots,$$

условие остановки итераций:

$$\left\| X^{(K+1)} - X^{(K)} \right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = \left\| \xi - X^{(K+1)} \right\|, \quad \xi \approx X^{(K+1)}, \qquad (3)$$

условие сходимости итераций к точному решению:

$$\left\| J(X^{(K)}) \right\| < 1, \quad J(X^{(K)}) = \left[\frac{\partial \; \varphi i(X), i = \overline{1, n}}{\partial \; X} \right]_{X = X^{(K)}}. \qquad (4)$$

4.3.Метод Зейделя

Имеем: $$X^{(K)} = \left[x1^{(K)} \;\; x2^{(K)} \;\; x3^{(K)} \ldots \;\; xn^{(K)}\right]^T,$$

$$x1^{(K+1)} = \varphi 1(x1^{(K)}, x2^{(K)}, x3^{(K)}, \ldots, xn^{(K)}),$$

$$x2^{(K+1)} = \varphi 2(\underline{x1^{(K+1)}}, x2^{(K)}, x3^{(K)}, \ldots, xn^{(K)}),$$

$$x3^{(K+1)} = \varphi 3(\underline{x1^{(K+1)}}, \underline{x2^{(K+1)}}, x3^{(K)}, \ldots, xn^{(K)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$xn^{(K+1)} = \varphi n(\underline{x1^{(K+1)}}, \underline{x2^{(K+1)}}, \underline{x3^{(K+1)}}, \ldots, \underline{x(n-1)}^{(K+1)}, xn^{(K)}),$$

$$K = 0,1,2,3,\ldots,$$

условия сходимости и остановки итераций смотри на слайде 3 – (3) и (4).

4.4. Метод Ньютона

Исходные данные:

$$fi(x1, x2, ..., xn) = bi, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad F(X) = B,$$
$$X^{(0)} = \left[x1^{(0)} \;\; x2^{(0)} ... xn^{(0)} \right]^T. \tag{5}$$

Итерационная схема Ньютона:

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} + \Delta X^{(K)}, \quad K = 0,1,2,3,....$$

Линейное разложение $F(x1^{(K+1)}, x2^{(K+1)}, ..., xn^{(K+1)})$ (6)

в точке $X^{(K)}$:

$$F(x1^{(K+1)}, x2^{(K+1)}, ..., xn^{(K+1)}) =$$
$$= F(x1^{(K)}, x2^{(K)}, ..., xn^{(K)}) + \left. \frac{\partial F(X)}{\partial X} \right|_{X = X^{(K)}} \cdot \Delta X^{(K)}, \tag{7}$$

СЛАУ метода Ньютона:

$$J(X^{(K)}) \cdot \Delta X^{(K)} = B - F(X^{(K)}), \tag{8}$$

$$\Delta X^{(K)} = J(X^{(K)})^{-1} \cdot (B - F(X^{(K)})).$$

Алгоритм метода Ньютона:

1. Имеем $X^{(0)}=\left[x1^{(0)} \quad x2^{(0)} \ldots xn^{(0)}\right]^T.$

2. Для $K=0,1,2,3,\ldots.$

$$X^{(K+1)}=X^{(K)}+J(X^{(K)})^{-1}\cdot\left[B-F(X^{(K)}\right].$$

3.Условие остановки итераций:

$$\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|\le\varepsilon.$$

4.Результат: $\xi\approx X^{(K+1)}.$

Условие работоспособности метода Ньютона:

$$\left|J(X^{(K)}\right|\ne 0,\quad K=0,1,2,3,\ldots\ . \tag{9}$$