Издательство «Легион»

Окружность и круг в задачах повышенного уровня сложности по планиметрии в КИМ на ЕГЭ по математике

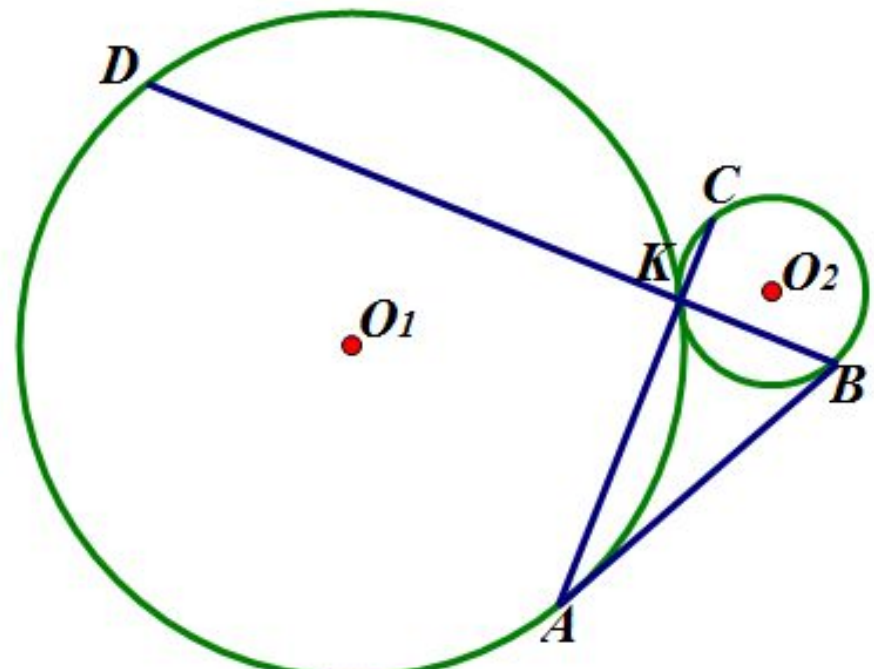
Докладчик Фридман Елена Михайловна

Задание 16
Демонстрационный вариант ЕГЭ 2018

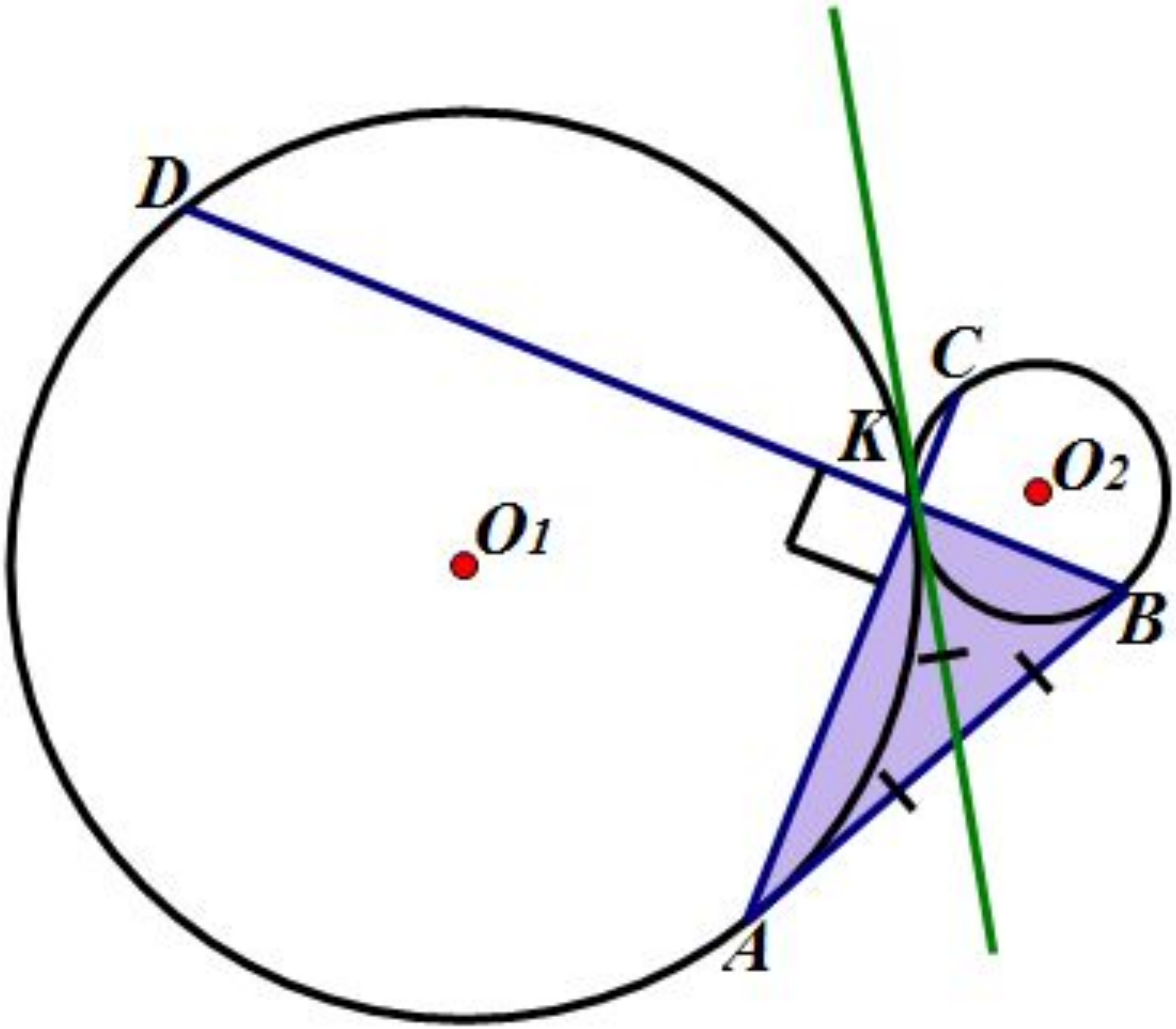
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

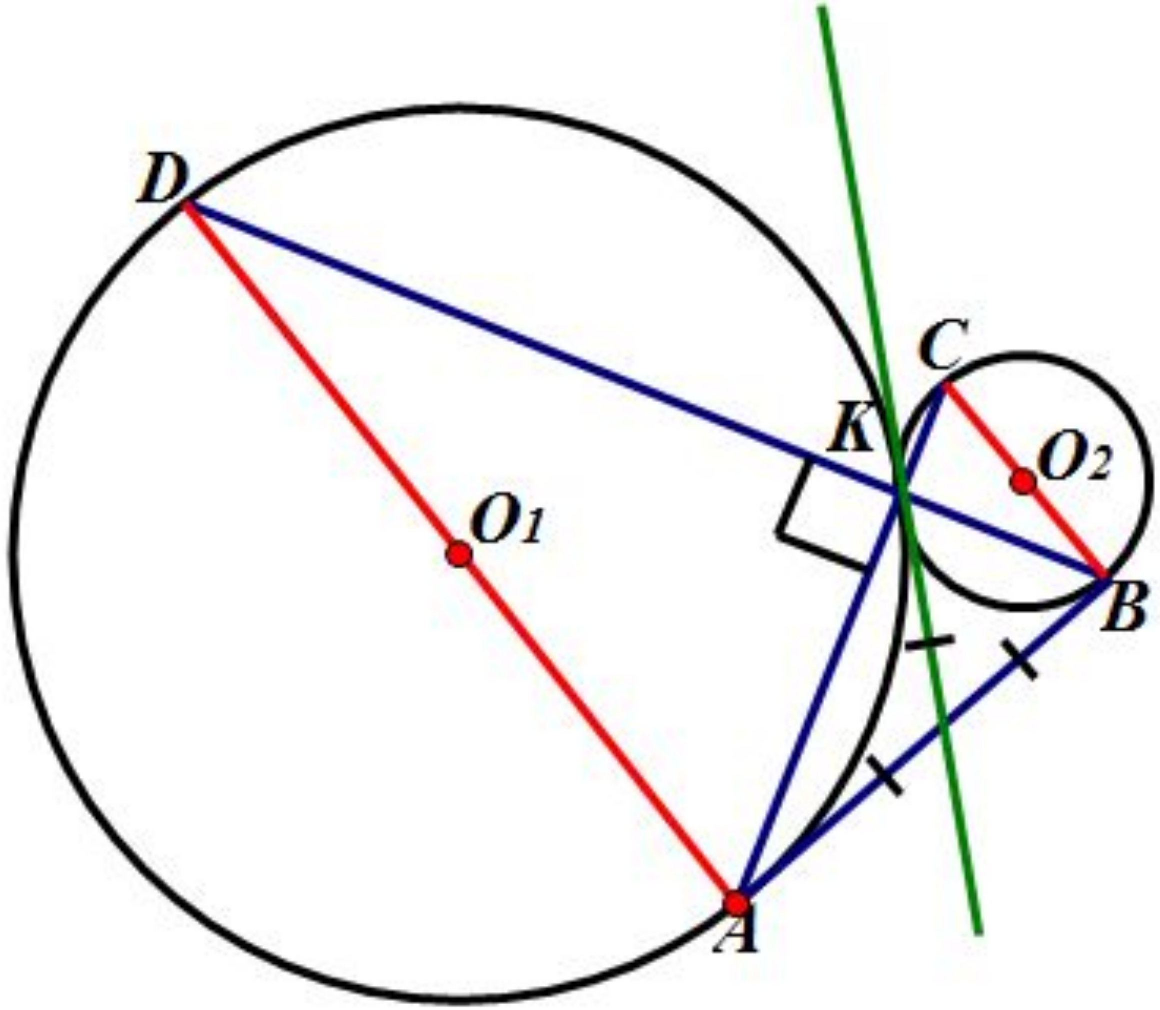
б) Найдите площадь треугольника ABK, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. а)



$\angle AKB = 90°$



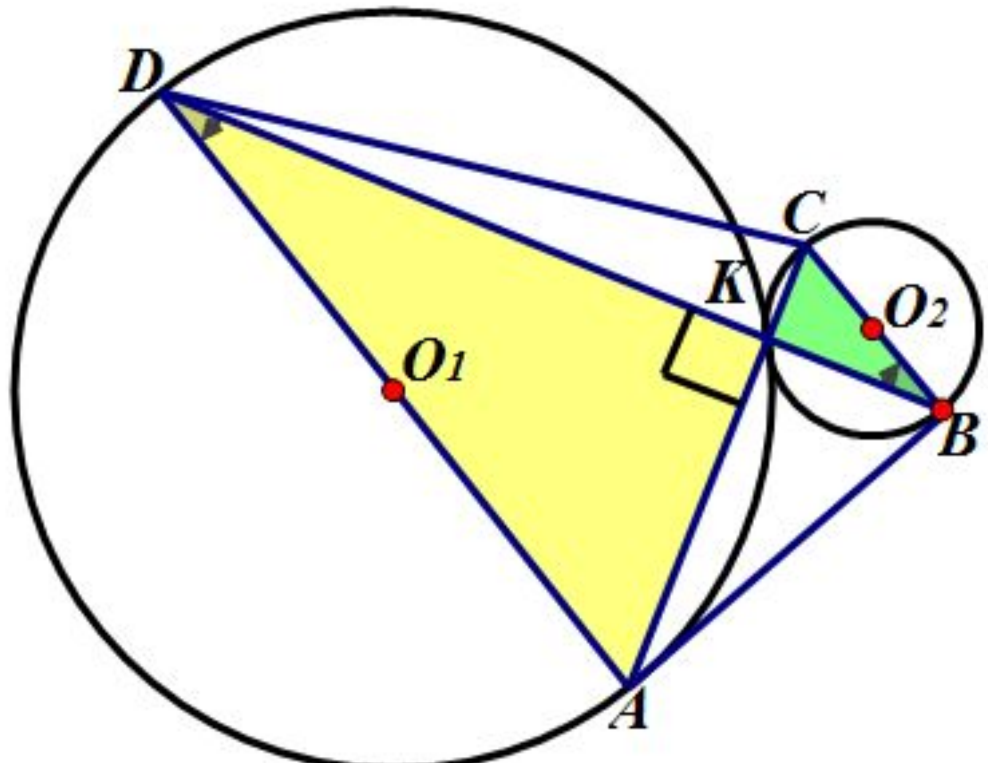
AD - диаметр $\Rightarrow AD \perp AB$,
BC – диаметр $\Rightarrow BC \perp AB$, $\Rightarrow AD \parallel BC$.

б) AK – общая высота ΔABD и ΔAKB

$\Delta AKD \sim \Delta BKC$ (по двум углам)

$$\frac{AD}{BC} = \frac{4}{1} \quad \frac{S_{ADK}}{S_{BKC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = 16.$$ Пусть $S_{BKC} = S$.

$$S_{ADK} = 16S$$
$$S_{AKB} = 4S$$
$$S_{ABCD} = 25S$$

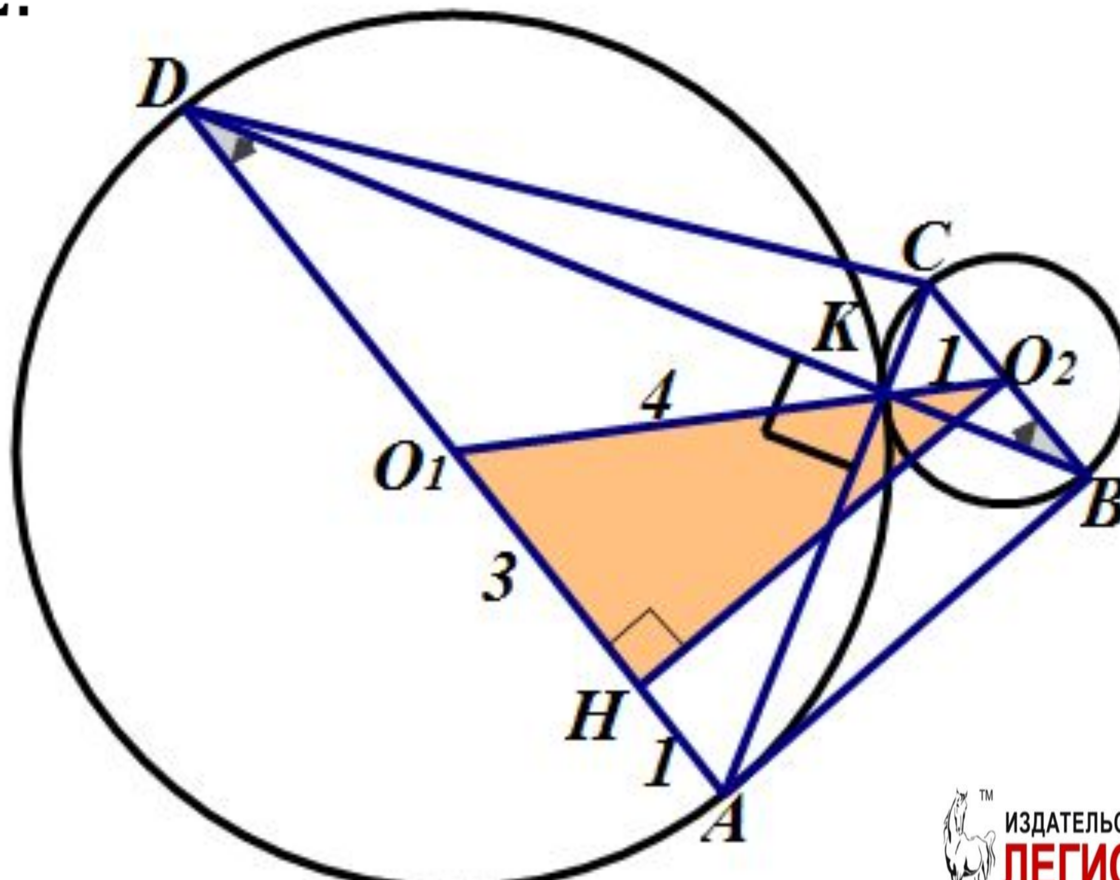


$O_2H = AB = 4.$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB$$

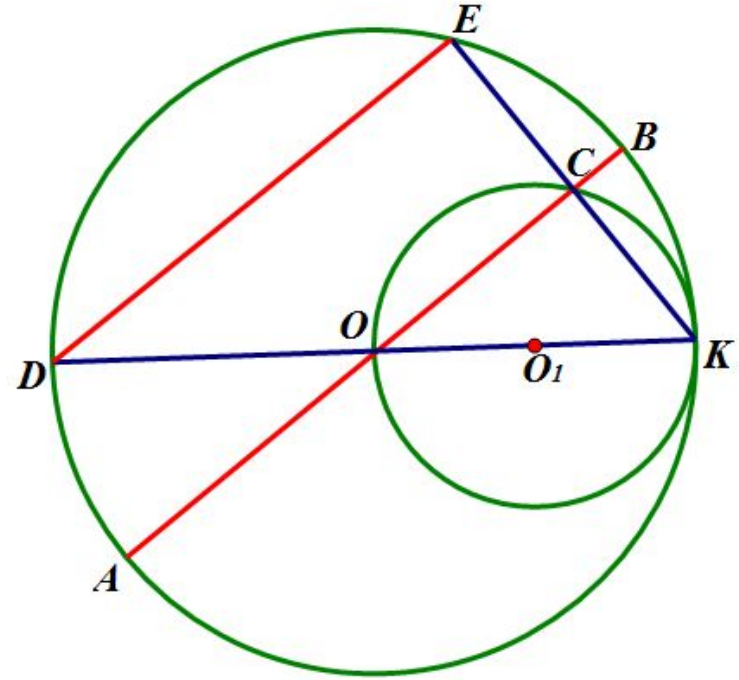
S_{ABCD}=20=25S,

$$S_{ABK} = 4S = 3{,}2.$$



Ответ. 3,2

Задача 2



• Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причем меньшая окружность проходит через центр O большей окружности. Диаметр AB большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке C, отличной от K. Лучи KO и KC вторично пересекает большую окружность в точках D и E соответственно. Точка B лежит на дуге EK большей окружности, не содержащей точку D.

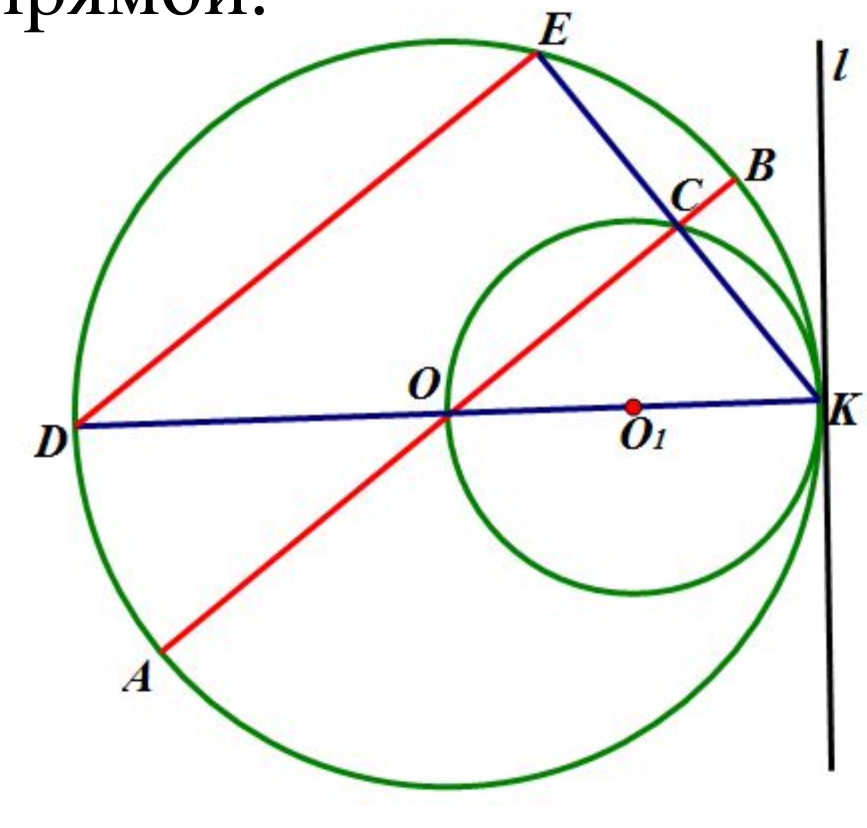
а) Докажите, что прямые DE и AB параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle KOB = \frac{\sqrt{15}}{8}$. ПрямыеDB и EK пересекаются в точке L. Найдите отношение EL:LK.

а)

l- общая касательная, OK $\perp l$, $O_1K \perp l$
$\Rightarrow$
D, O, O_1, K лежат на одной прямой.

$\angle DEK = \angle OCK = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow DE \| AB$.



б) $AB \perp EK \Rightarrow EC = CK$
$\Rightarrow$
$\Rightarrow \cup KB = \cup BE$

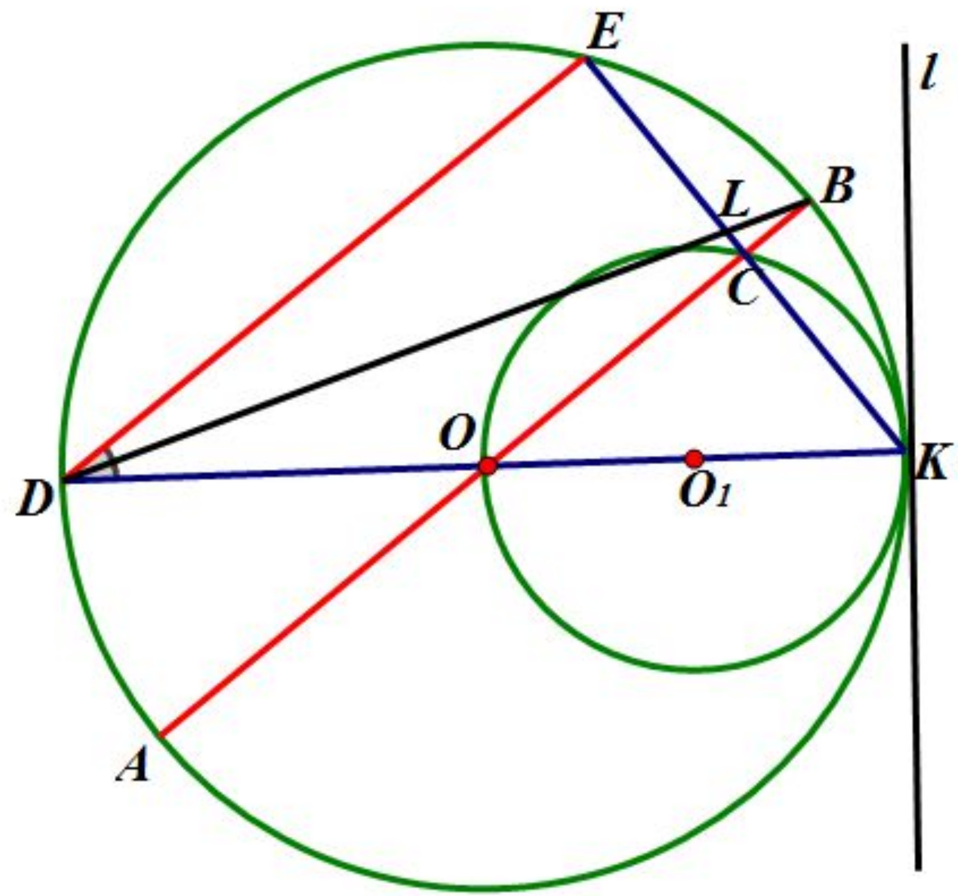
DB – биссектриса $\angle$EDK.

$\frac{EL}{LK} = \frac{DE}{DK} = cos\ \angle \text{EDK} =$

$= cos\ \angle \text{BOK (AE} \| \text{AB)} =$

$= \sqrt{1 - sin^2 \angle \text{BOK}} =$

$= \sqrt{1 - \frac{15}{64}} = \frac{7}{8}.$

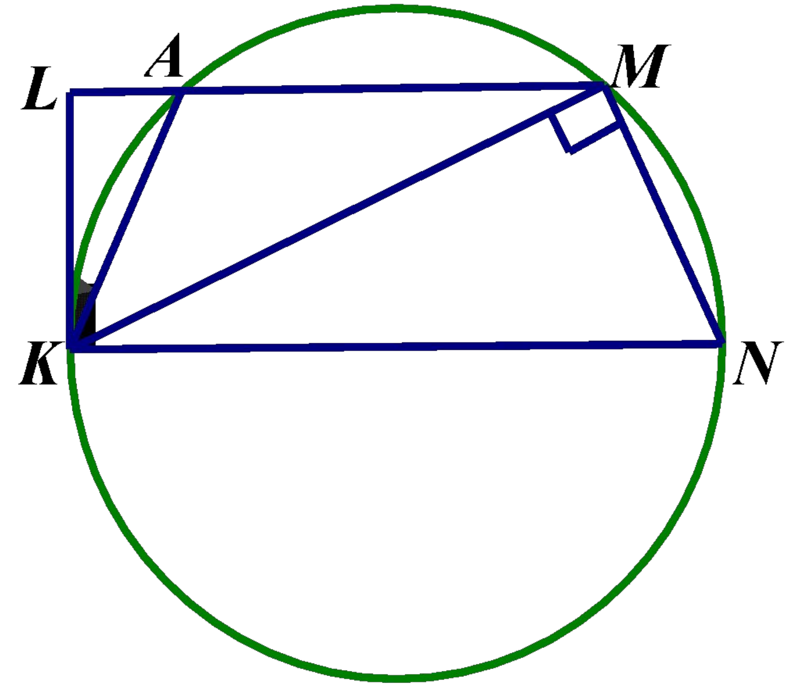


Ответ. $\frac{7}{8}$

Задача 3 (задание 16 ЕГЭ 2017)

основная волна

В прямоугольной трапеции KLMN с основаниями KN и LM (KN>LM) окружность, построенная на большем основании как на диаметре, пересекает меньшее основание в точках A и M.



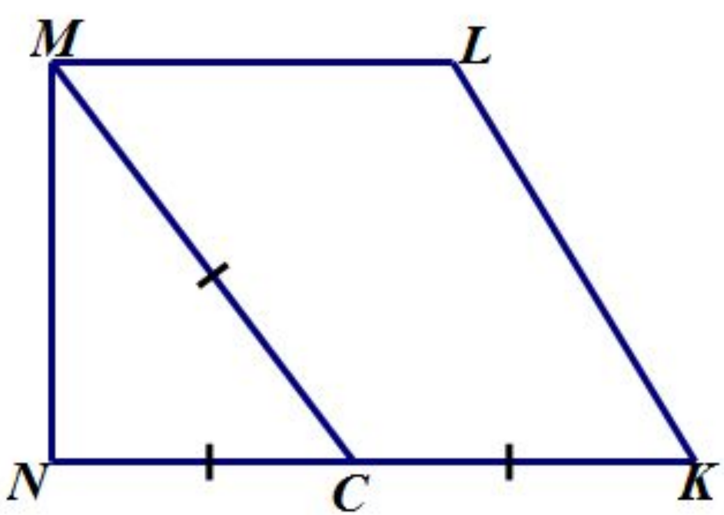
а) Докажите, что угол AKL равен углу MKN.

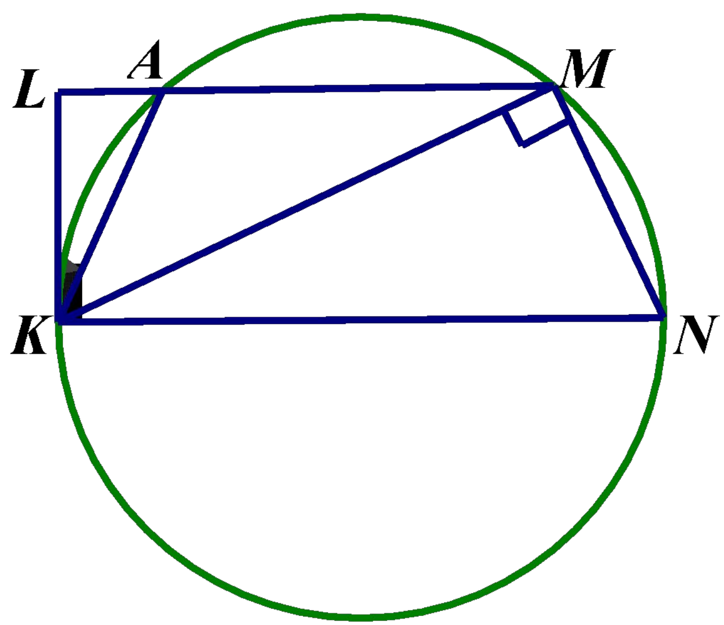
б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника KLO, если $KL=3\sqrt{6}$, $LM=6LA$.

Рассмотрим два случая:

1. ∠ MNK= 90°.
MC=NC,
что невозможно (катет не равен гипотенузе).

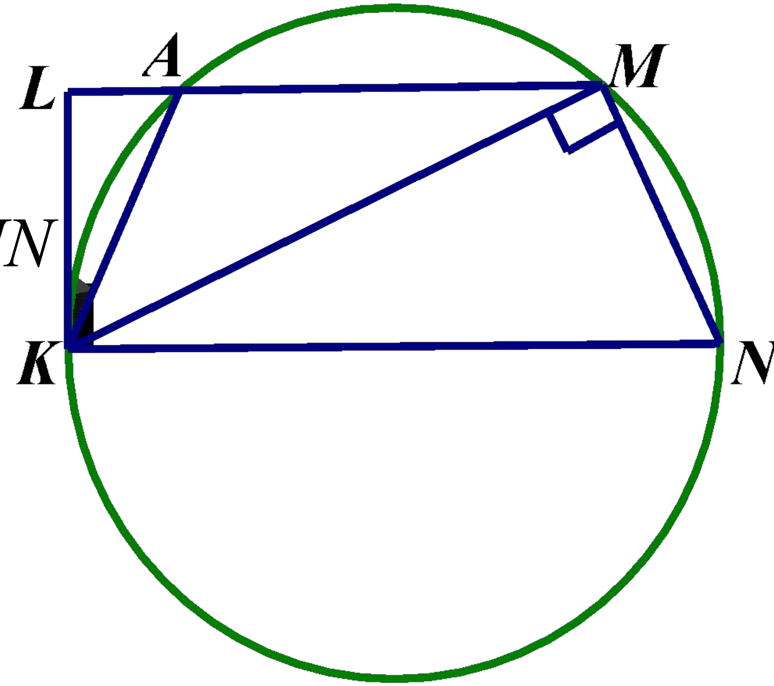
2. ∠ LKN= 90°.
KN - диаметр, следовательно, KL – касательная,
AK – хорда.





Решение.

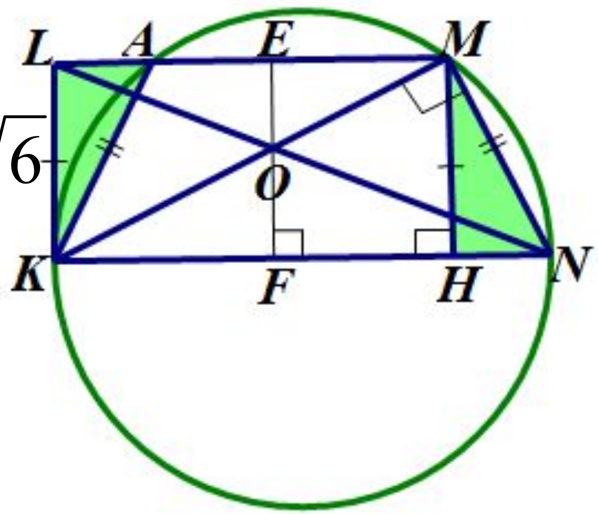
а) $\angle AKL = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle MKN = \frac{1}{2} \cup MN$



$\cup AK = \cup MN$

$\angle AKL = \angle MKN$.

б)



$$\frac{AL}{LK} = \frac{LK}{LM} \qquad \frac{AL}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6AL}$$

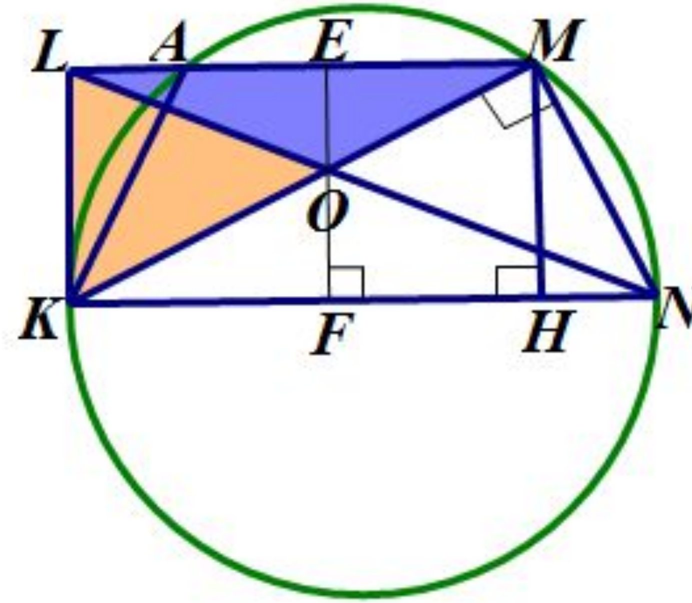
$6AL^2 = 6 \cdot 9$, $AL = 3$, $LM = 18$,

$\Delta AKL = \Delta MHN \Rightarrow AL = HN$

$KN = KH + HM =$
$= LM + LA = 18 + 3 = 21.$

$\Delta ALK \sim \Delta LKM$, $LM = 6LA$

$S_{LOK}=S_{LKM}-S_{LOM}$



$$S_{LKM}=\frac{1}{2}LK\cdot LM=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot 18=27\sqrt{6}$$

$$S_{LOM}=\frac{1}{2}LM\cdot OE=9\cdot OE$$

$\Delta LOM\sim\Delta KON$

$$\frac{LM}{NK}=\frac{OE}{OF}\qquad \frac{LM}{NK}=\frac{OE}{EF-OE}$$

$$\frac{18}{21}=\frac{OE}{3\sqrt{6}-OE}\qquad \frac{OE}{3\sqrt{6}-OE}=\frac{6}{7}$$

$$OE=\frac{18\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOM}=9\cdot\frac{18\sqrt{6}}{13}=\frac{162\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOK}=27\sqrt{6}-\frac{9\cdot 18\sqrt{6}}{13}=$$

$$=9\sqrt{6}\left(3-\frac{18}{13}\right)=$$

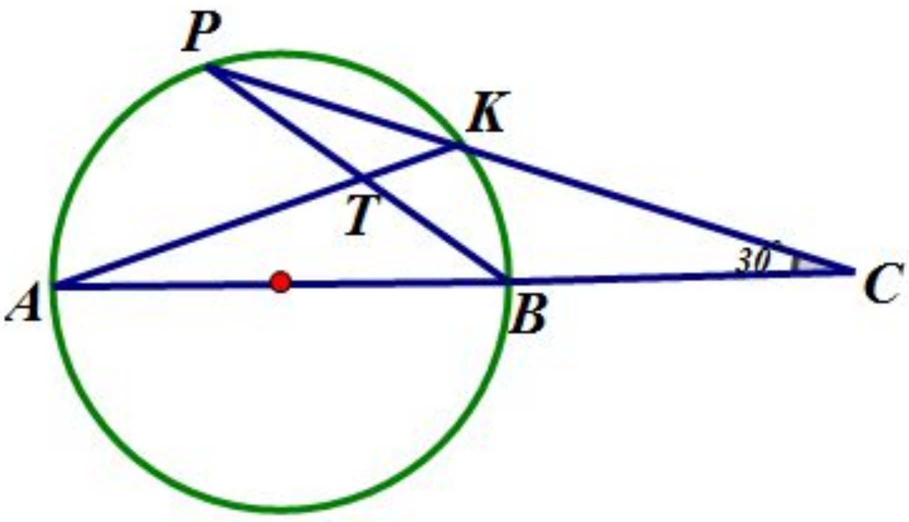
$$=\frac{9\cdot 21\sqrt{6}}{13}=\frac{189\sqrt{6}}{13}$$

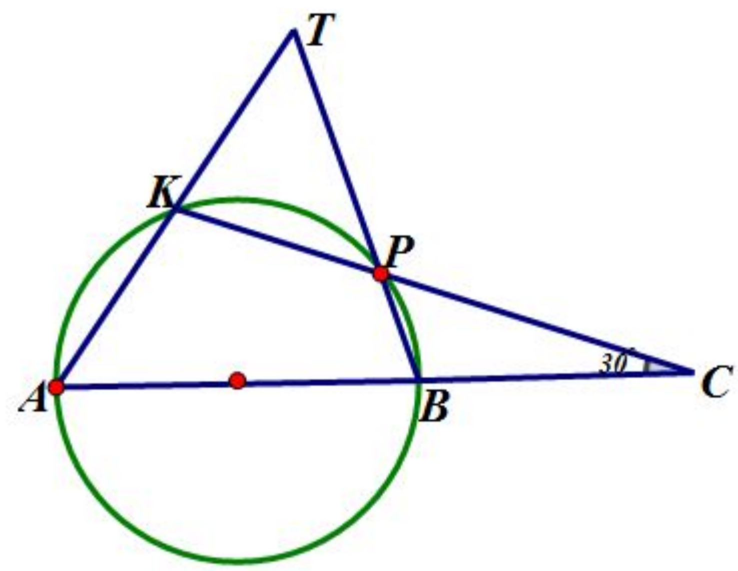
Задача 4

Дана окружность. Продолжения диаметра AB и хорды PK пересекаются под углом 30° в точке C. Известно, что CB:AB=1:4; AK пересекает BP в точке T.

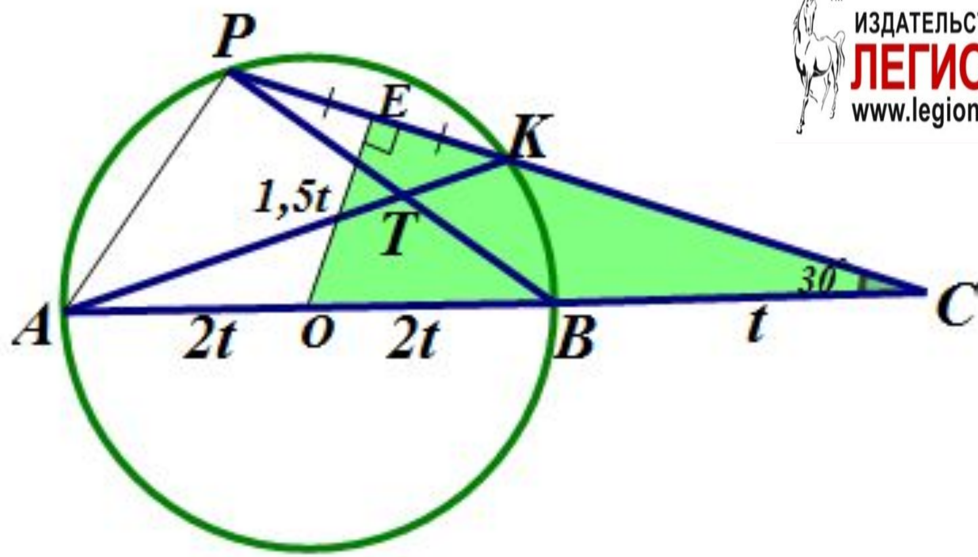
а) Докажите, что AP:AT=3:4.

б) Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках A, B, P и K, если радиус окружности равен 4.





Решение. а)



1. Проведем $OE \perp PC$,
 $KE=EP$, $OE=\frac{3}{2}t$,

$EC=OC \cdot \cos C = \frac{3\sqrt{3}}{2}t$.

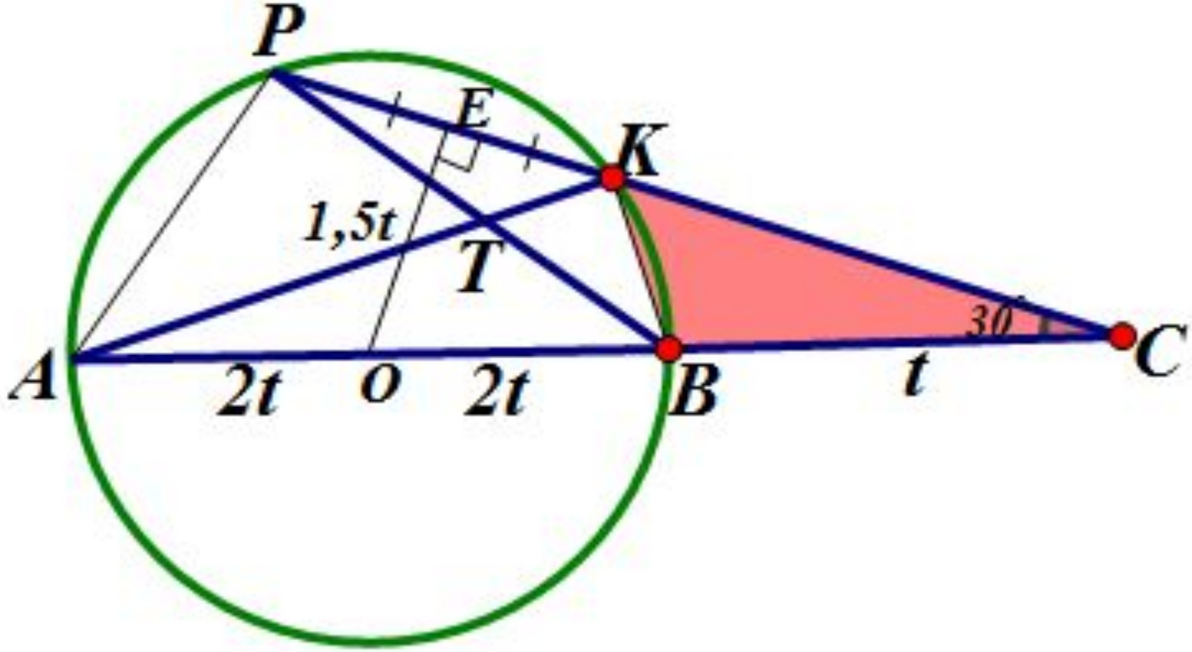
2. $PE=\frac{\sqrt{7}}{2}t$ (ΔPOE); $PK = \sqrt{7}t$.

3. $\Delta ATB \sim \Delta KTP$ ($\angle ATB=\angle KTP$ как вертикальные, $\angle PKT=\angle ABT$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. $\frac{AB}{KP} = \frac{AT}{PT}$; $PT=\frac{AT\sqrt{7}}{4}$.

4. $AP^2 = AT^2 - PT^2 = \frac{9AT^2}{16}$, $AP=\frac{3AT}{4}$; $\frac{AP}{AT} = \frac{3}{4}$

AO=4, t=2

AC=10, BC=2,
PC= $3\sqrt{3}+\sqrt{7}$,
KC=$3\sqrt{3}-\sqrt{7}$



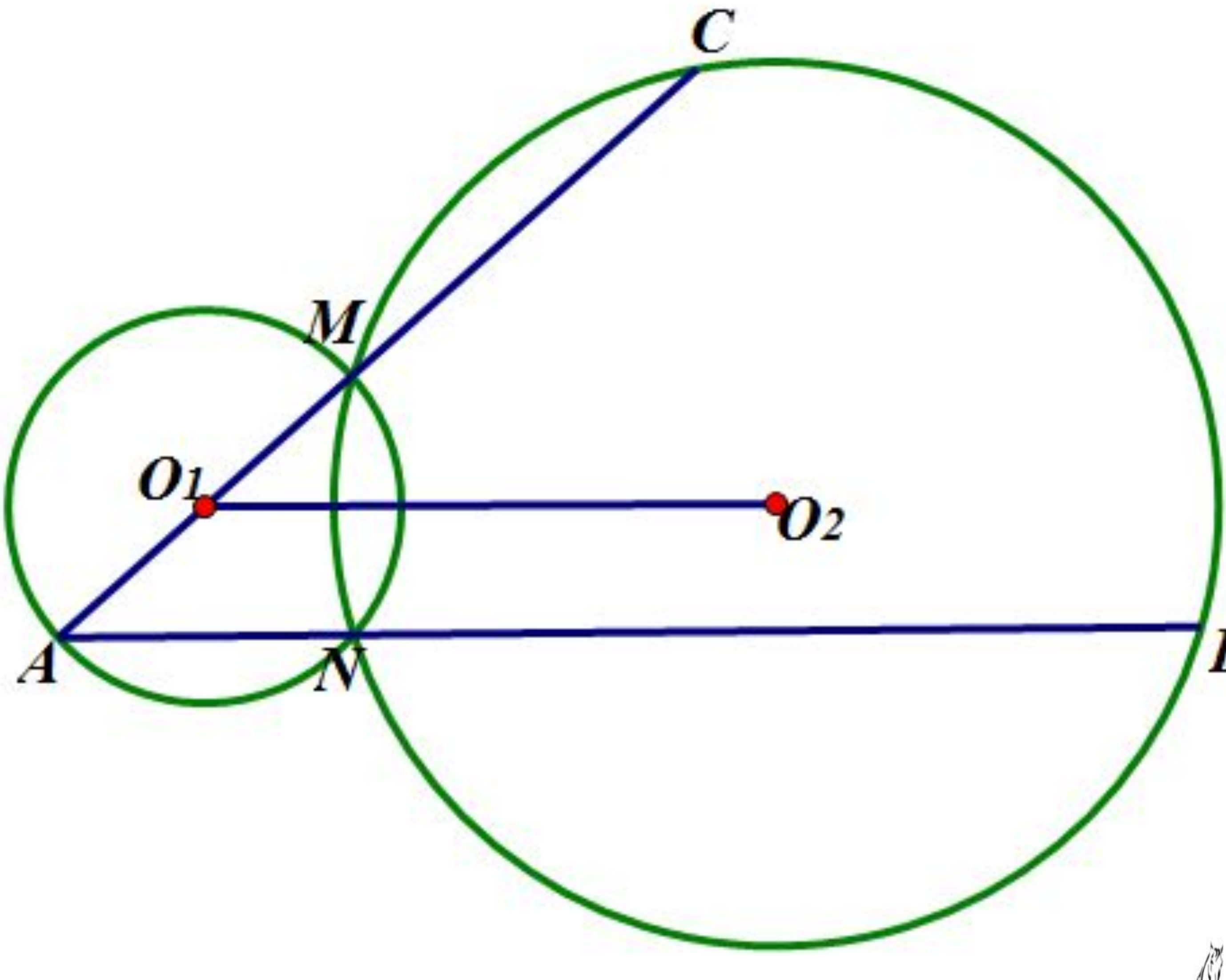
$$S_{APKB}=S_{APC}-S_{BKC}$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot PC\cdot sin30°-\frac{1}{2}BC\cdot KC\cdot sin30°=$$
$$=6\sqrt{3}+3\sqrt{7}.$$

Задача 5
(№16 вариант 15 «Легион» ЕГЭ 2018)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой MN. Продолжение диаметра AM первой окружности и хорды AN этой же окружности пересекают вторую окружность в точках C и B соответственно.

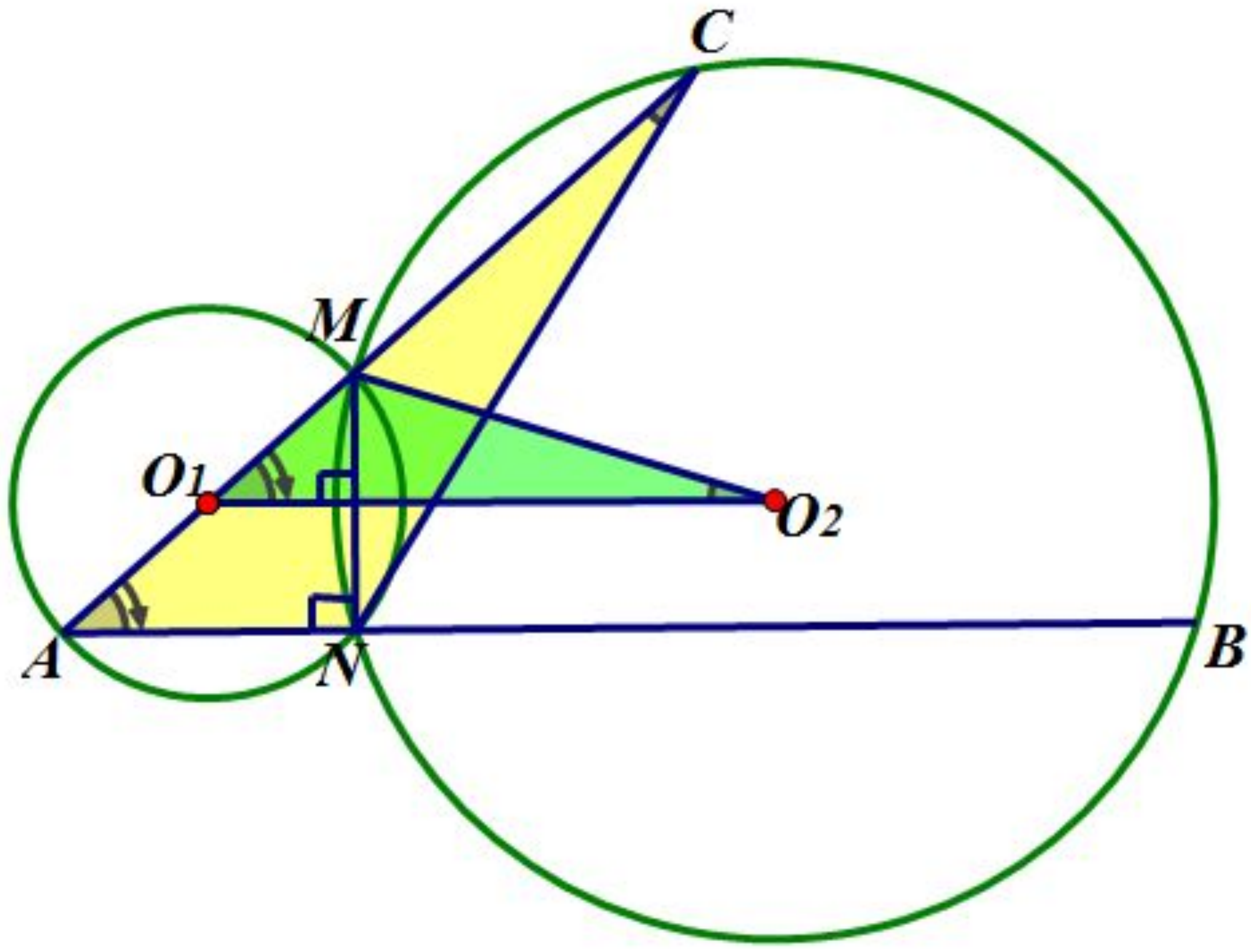
а) Докажите, что треугольники ANC и O_1MO_2 подобны;

б) Найдите MC, если $\angle CMB = \angle NMA$, а радиус второй окружности в 2,5 раза больше радиуса первой и MN=2.

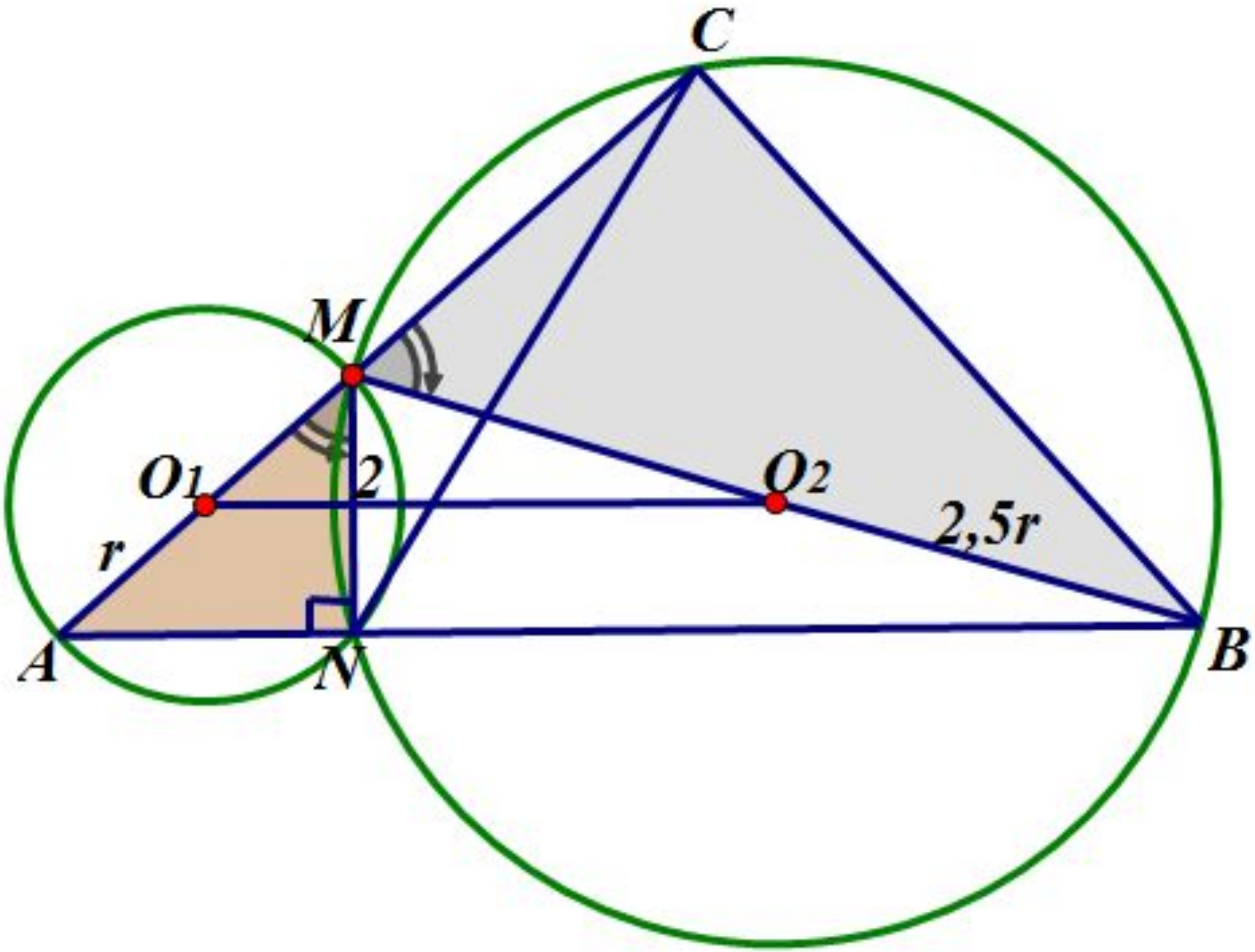

C
M
O1
O2
A
N
B

Решение.

а)



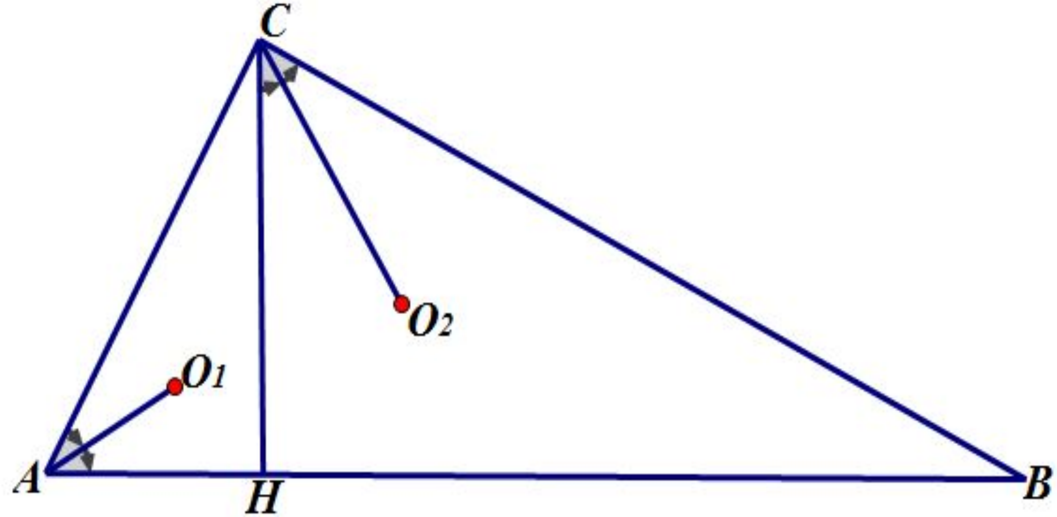
б)



$$\frac{MC}{MN} = \frac{MB}{AM} \qquad \frac{MC}{2} = \frac{5r}{2r}$$

MC=5

Задача 6

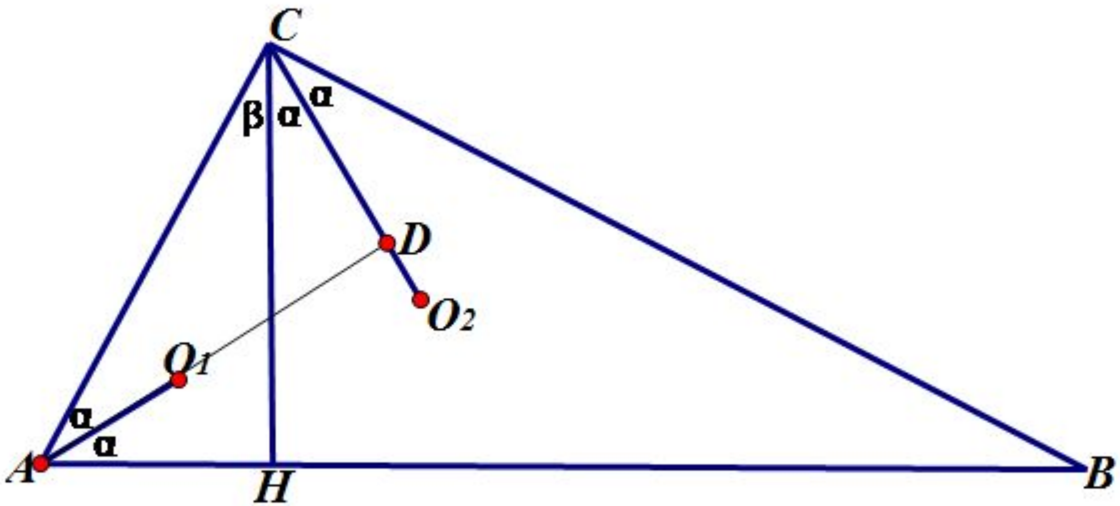


В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся отрезка CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырехугольника MO_1NO_2, если AC=7, BC=24.

а)

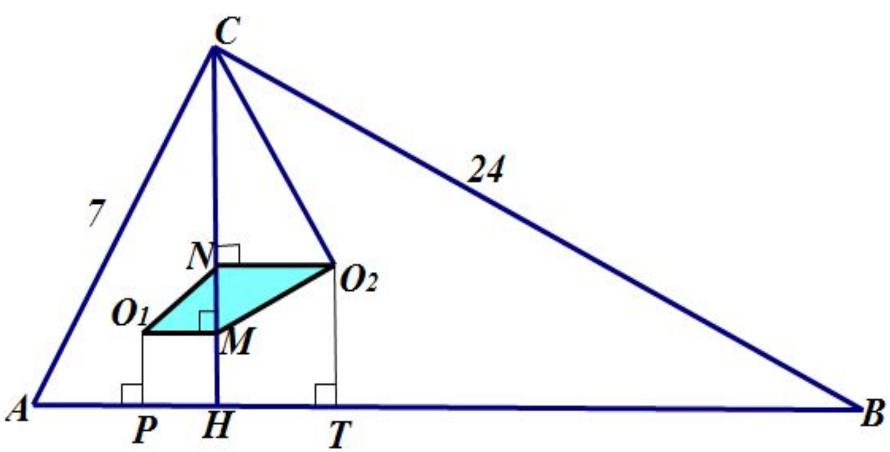


б) O_1NO_2M – трапеция.

$$S_{O_1NO_2M} = \frac{O_1M+O_2N}{2}\cdot MN$$

Пусть $O_1M=r_1$, $O_1N=r_2$

$$S_{O_1NO_2M} = \frac{r_1+r_2}{2}\cdot(r_1-r_2)$$

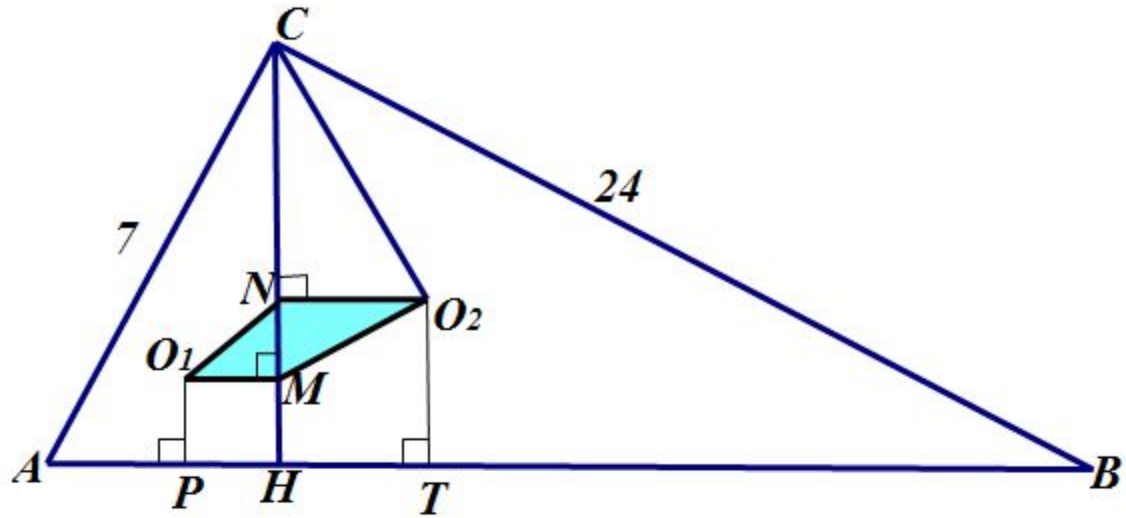


$AC \cdot BC = CH \cdot AB$

$AB = 25$, $CH = \frac{7 \cdot 24}{25}$

$AH = \frac{49}{25}, BH = \frac{576}{25}.$

$r = \frac{a+b-c}{2}$



$$r_1 = \frac{\frac{49}{25} + \frac{7 \cdot 24}{25} - 7}{2} = \frac{7}{2 \cdot 25}(7 + 24 - 25) = \frac{21}{25};$$

$$r_2 = \frac{\frac{576}{25} + \frac{7 \cdot 24}{25} - 24}{2} = \frac{24}{2 \cdot 25}(7 + 24 - 25) = \frac{72}{25};$$

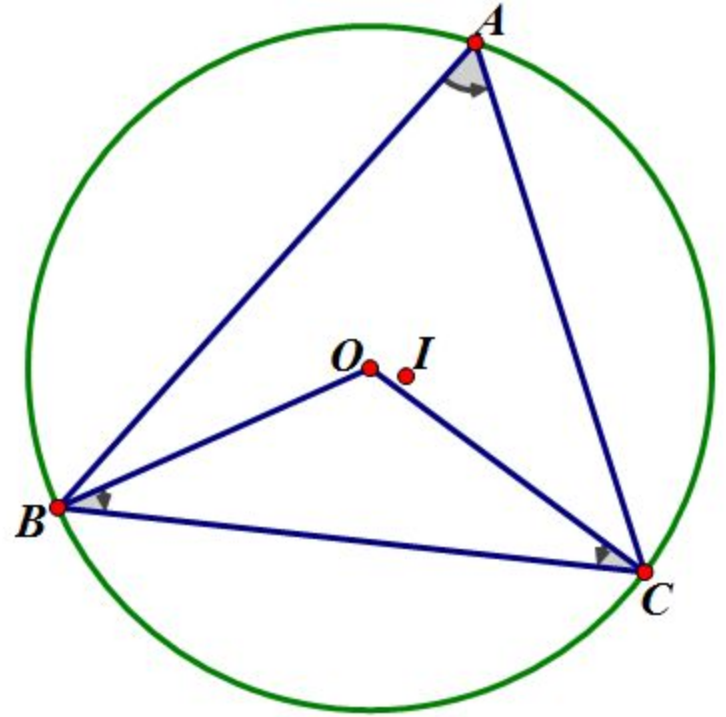
$$S_{O_1NO_2M} = \frac{\frac{72}{25}+\frac{21}{25}}{2} \cdot \left(\frac{72}{25} - \frac{21}{25}\right) = \frac{51 \cdot 93}{2 \cdot 625} = \frac{4743}{1250}$$

Ответ. $\frac{4743}{1250}$

Задача 7

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что

$\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$, угол $ABC = 50°$.



а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите $\angle OIH$.

<u>Решение</u>.

1. $\angle BOC = 2\angle A$,

$\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=$

$= 180°-\angle A \Rightarrow 2\angle A= 180°-\angle A$

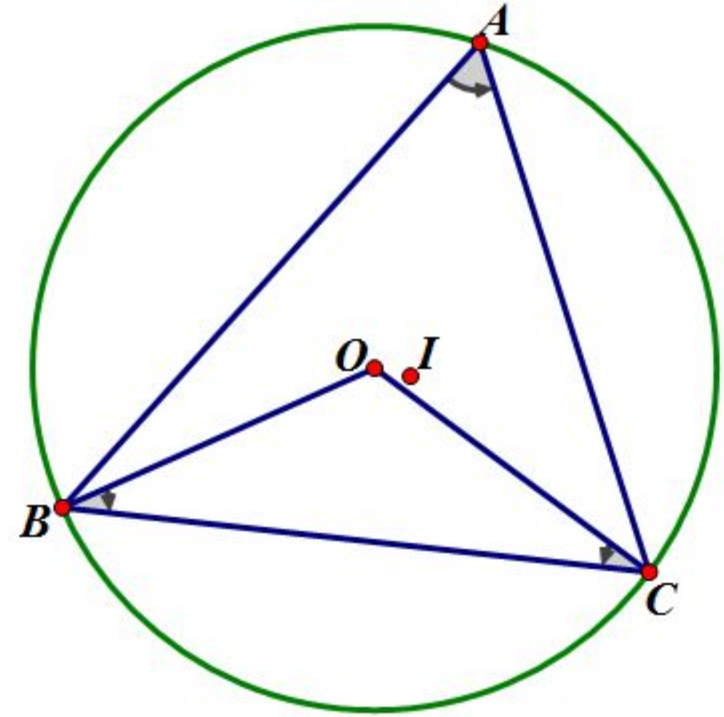
$\angle A= 60°$, $\angle BOC = 120°$

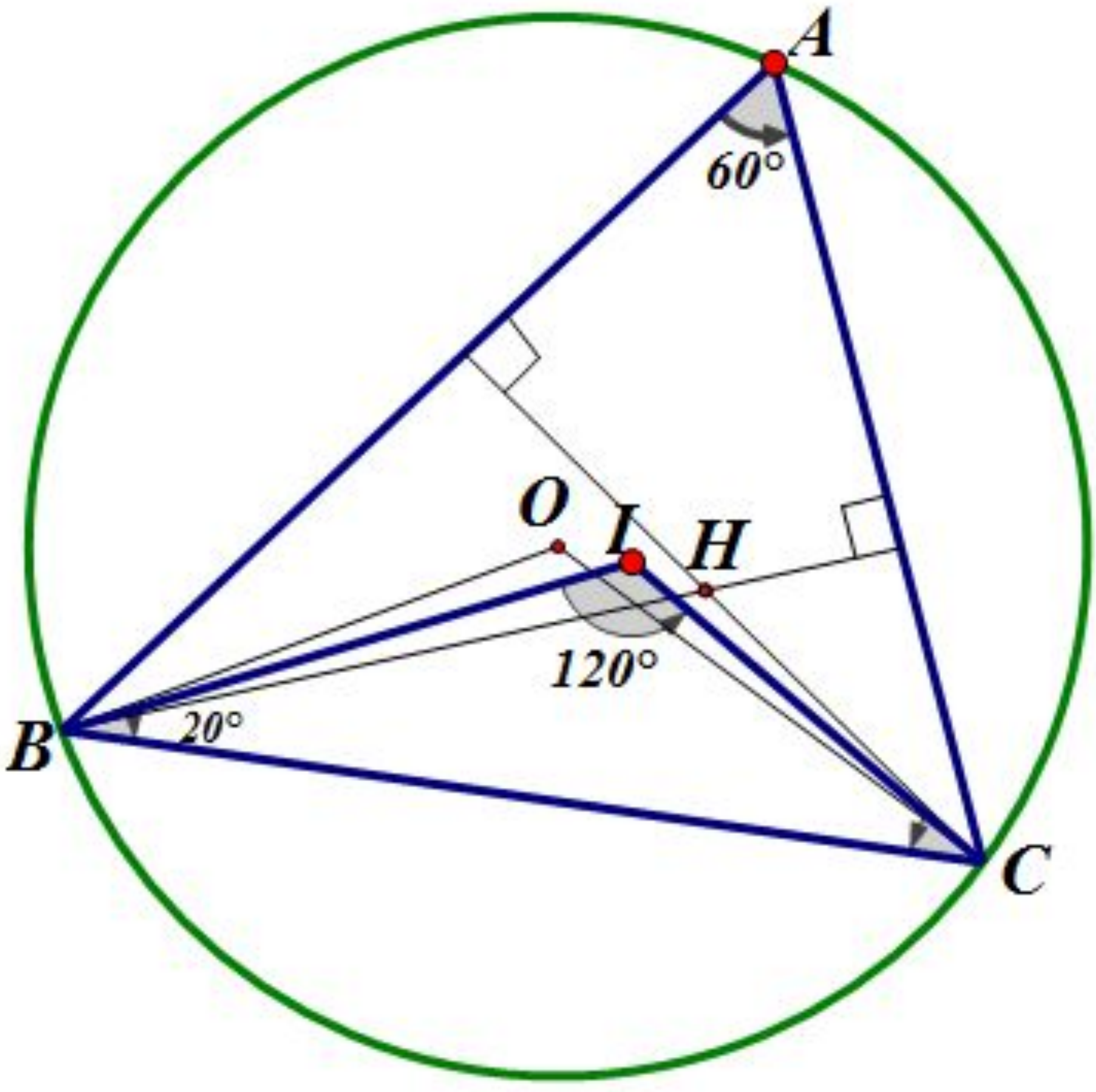
<u>$\angle A= 60°$, $\angle B= 50° \Rightarrow \angle C=70°$.</u>

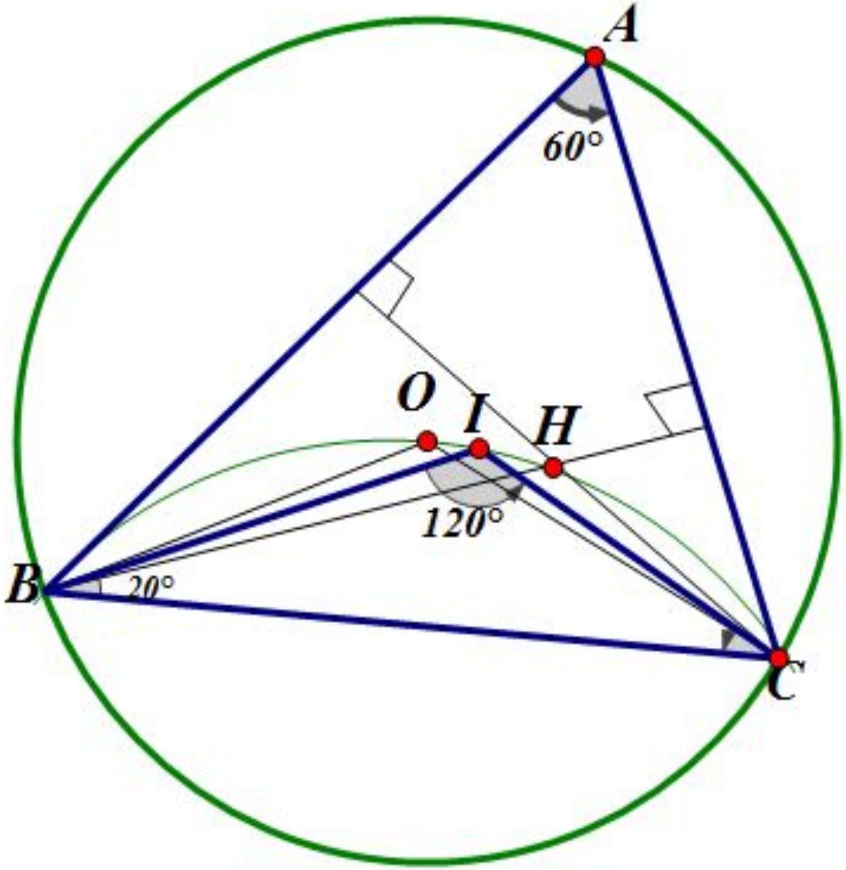
2. ΔBOC: $\angle OBC=OCB=30° \Rightarrow$

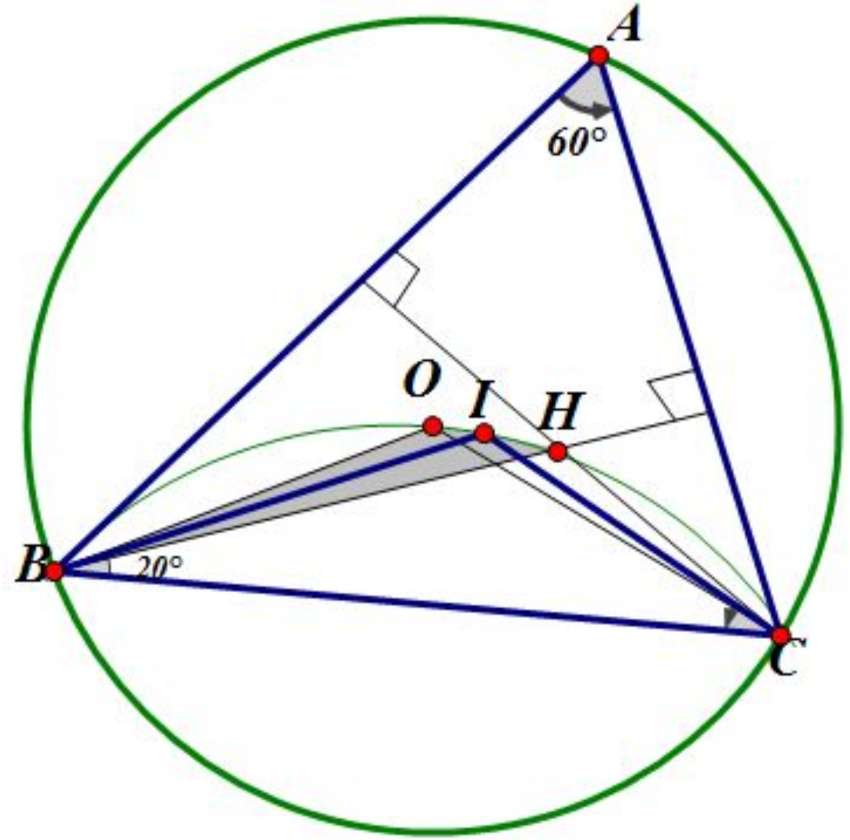
$\angle ABO= 50°-30°=20°$

$\angle ACO= 70°-30°=40°$




A
60°
O
I
H
120°
B
20°
C





$\angle$ OIH+ $\angle$ OBH=180°, $\angle$ OBH=10° $\Rightarrow$ $\angle$ OIH=170°

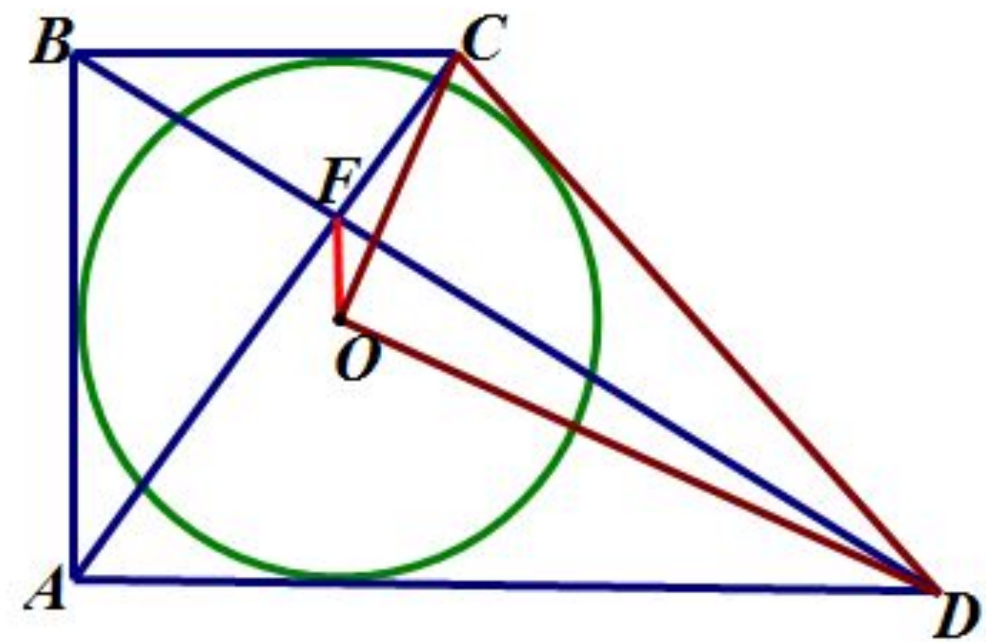
Задача 8

В прямоугольную трапецию ABCD с большим основанием AD и прямыми углами A и B вписана окружность с центром в точке O.

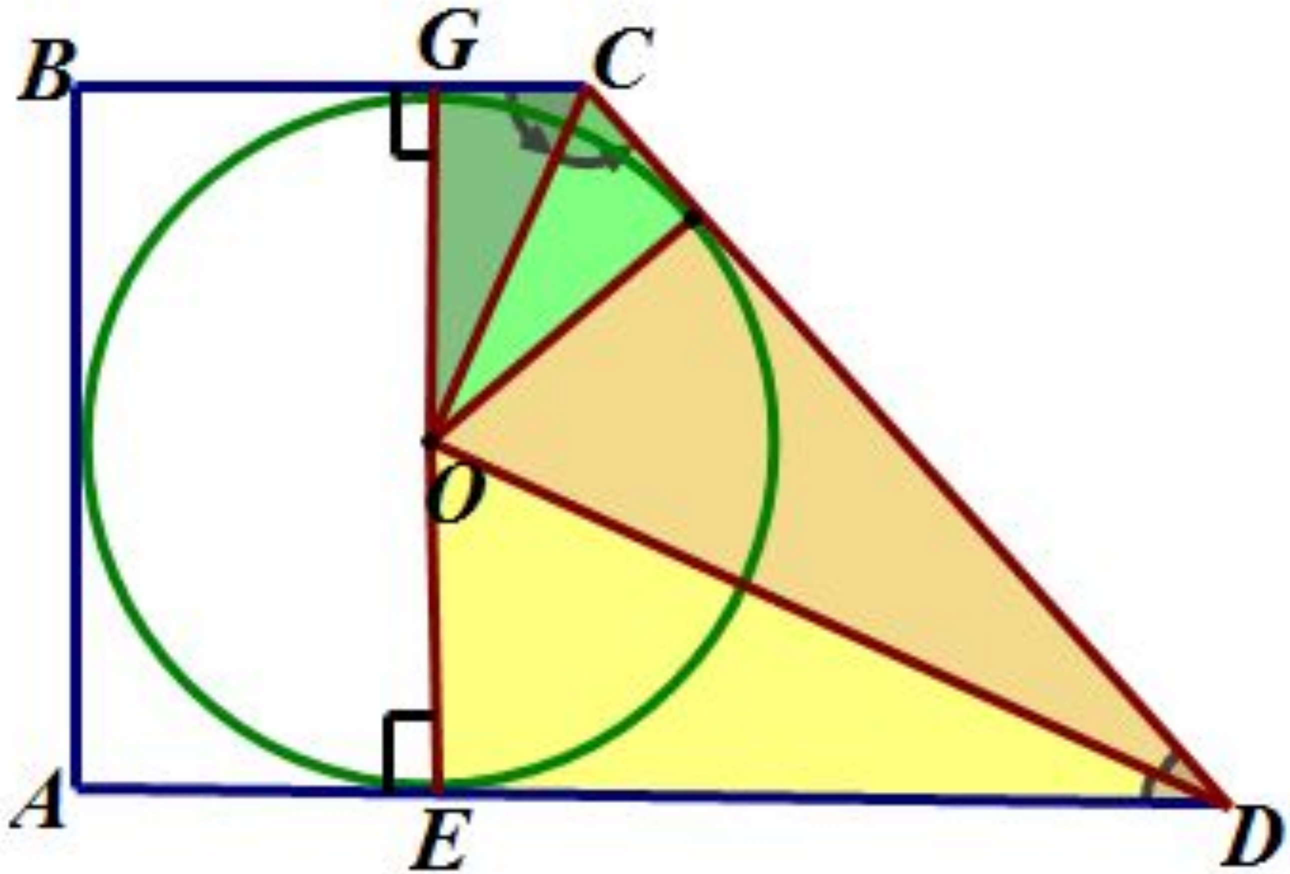
а) Доказите, что

$CO^2 + OD^2 = CD^2$.

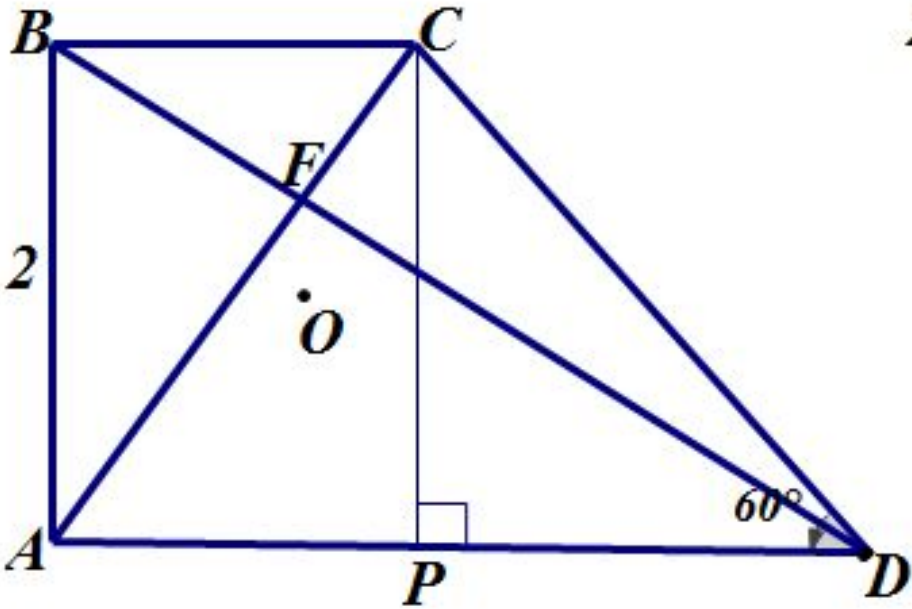
б) Найдите расстояние от точки O до точки пересечения диагоналей трапеции, если высота трапеции равна 2 и ∠ ADC=60^0 .



а)



б) $AB+CD=BC+AD$



$$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=2BC+PD$$

$$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=2BC+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

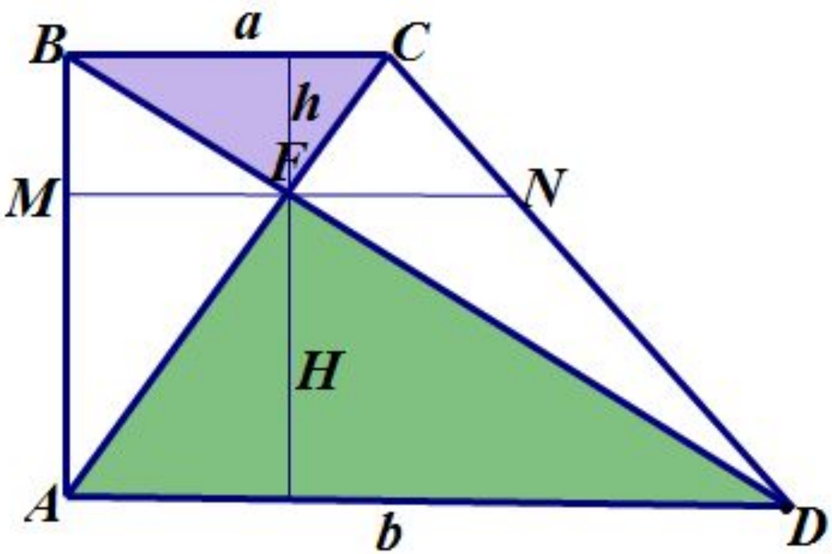
$$BC=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Рассмотрим ΔCDP:

$$AD=AP+PD=BC+PD=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{CP}{CD}=\cos 30° \qquad \frac{2}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CD=\frac{4}{\sqrt{3}} \qquad PD=\frac{2}{\sqrt{3}}$$



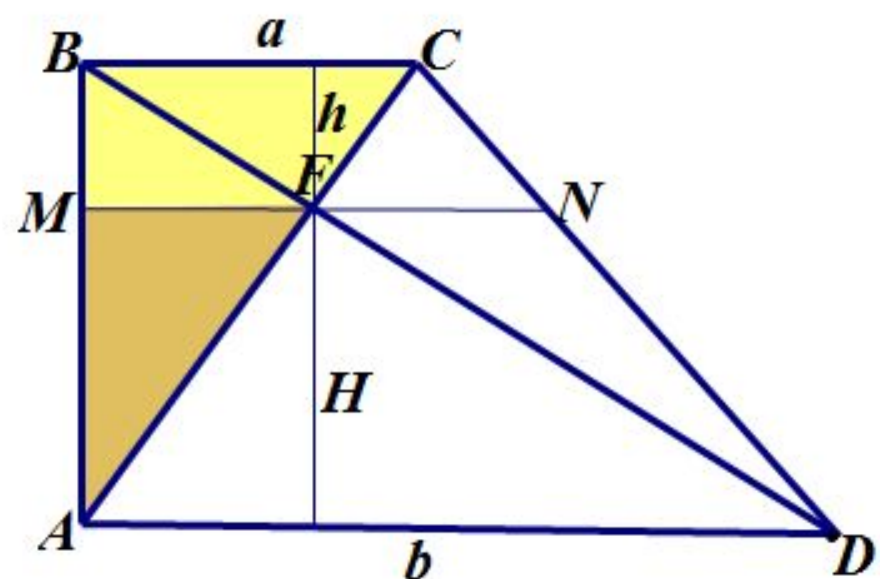
$$\Delta AFD \sim \Delta BFC$$

$$\frac{AF}{FC}=\frac{FD}{BF}=\frac{AD}{BC}=\frac{b}{a}=\frac{H}{h}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AFM$$

$$\frac{BC}{FM}=\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{AM}=\frac{H+h}{H}$$

$$\frac{H+h}{H}=\frac{1+\frac{h}{H}}{1}=1+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$$



$$\frac{BC}{FM}=\frac{b+a}{b} \qquad FM=\frac{ab}{b+a}$$

$$FM=\frac{ab}{b+a}$$

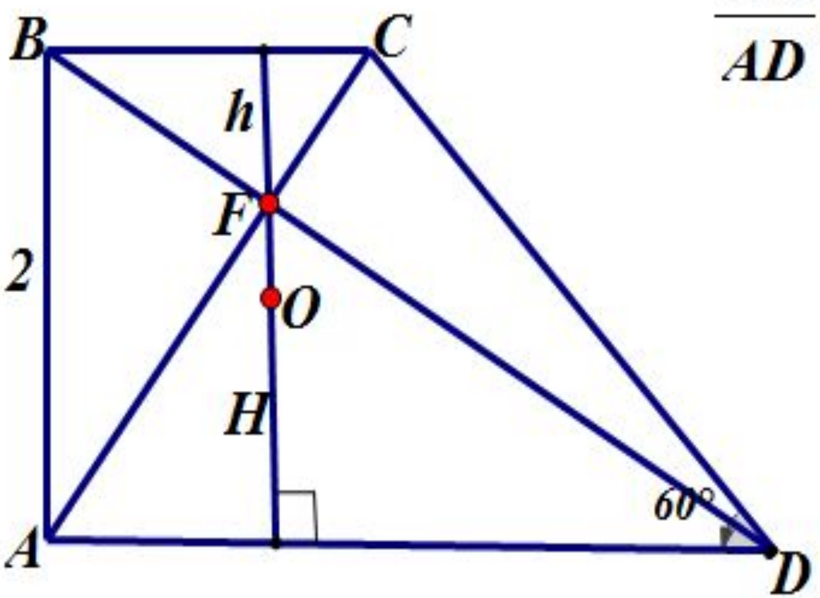
$$FM=\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})+(1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(2+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3})}=1$$

$$BC=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AD=1+\sqrt{3}$$

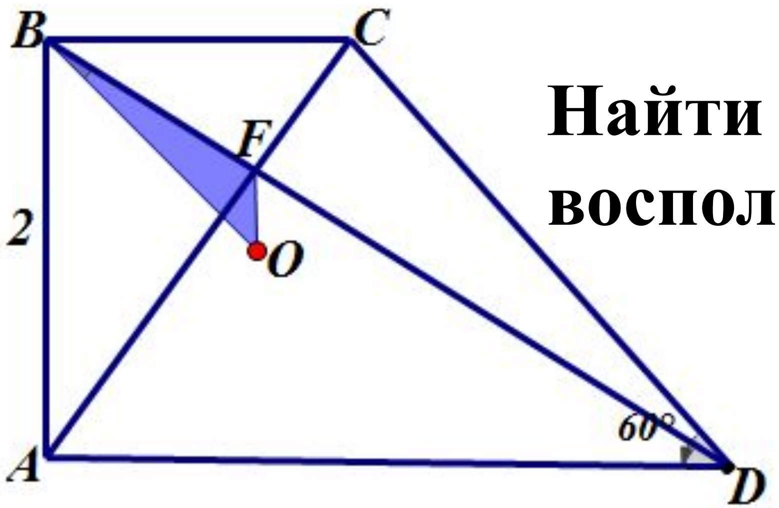
$$FO=H-R \qquad R=1$$

$$\frac{BC}{AD}=\frac{2-H}{H} \qquad H=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

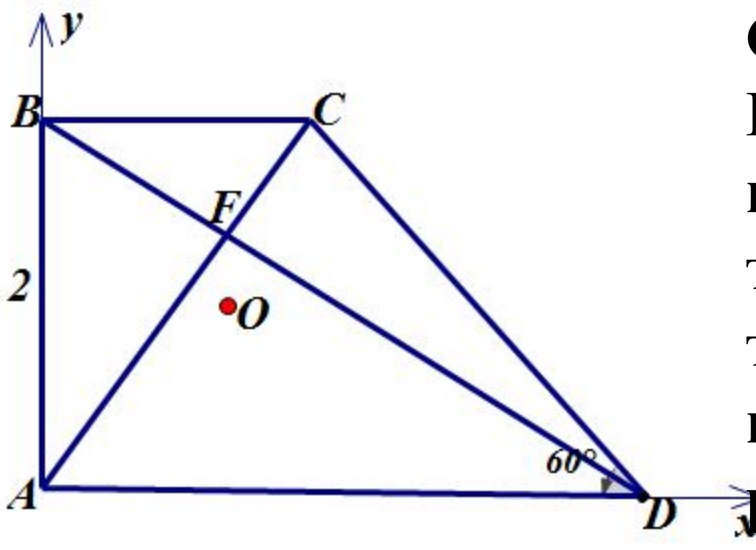


$$FO=H-1=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-1=2-\sqrt{3}$$

Идеи других способов



Найти BF, BO, cos ∠FBO и воспользоваться теоремой косинусов.



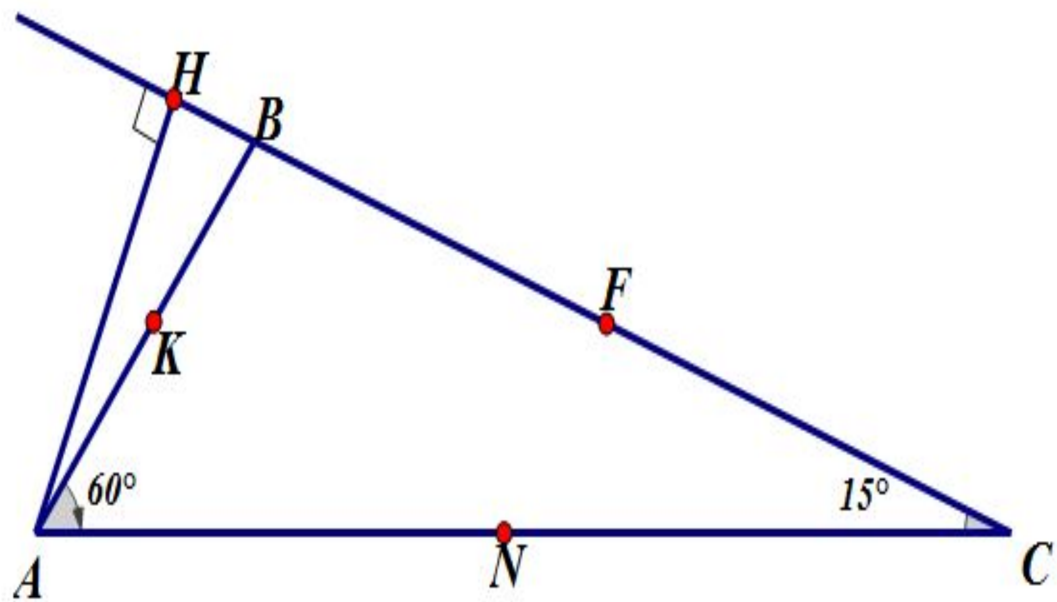
Составить уравнения прямых AC и BD, найти координаты их точки пересечения, убедиться в том, что точки O и F лежат на высоте трапеции, проходящей через центр вписанной окружности, а затем найти разность ординат точек F и O.

Задача

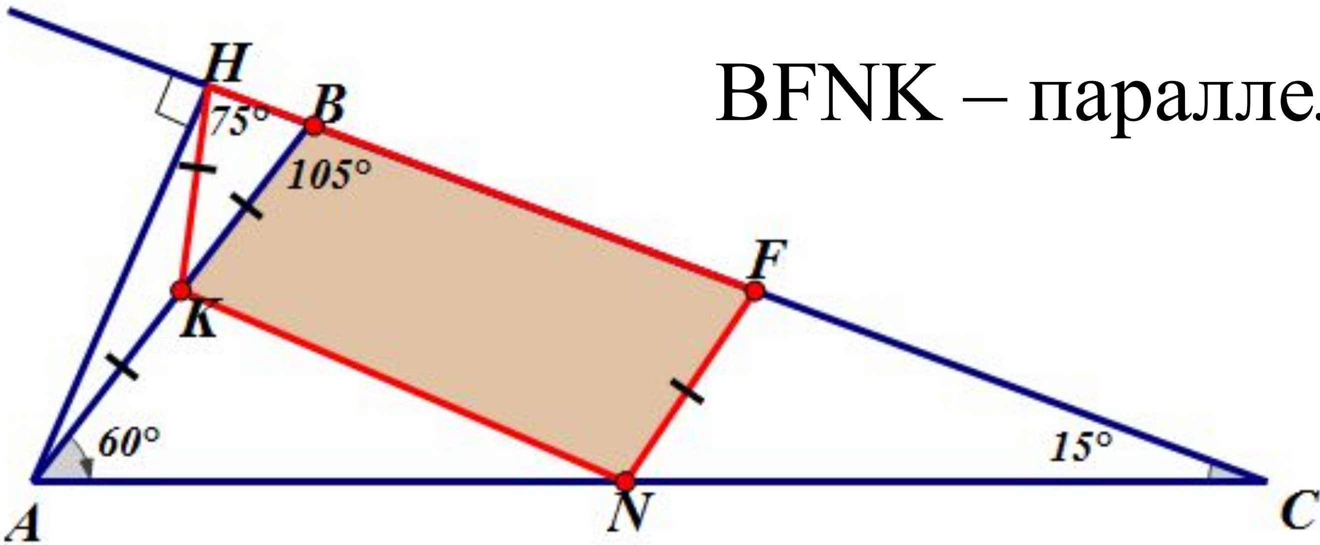
В треугольнике ABC точки K, F, N - середины сторон AC, AB и BC соответственно. AH высота треугольника ABC, $\angle CAB = 60°$, $\angle ACB = 15°$.

а) Докажите, что точки K, F, N и H лежат на одной окружности.

б) Найдите FH, если BC= $4\sqrt{3}$.



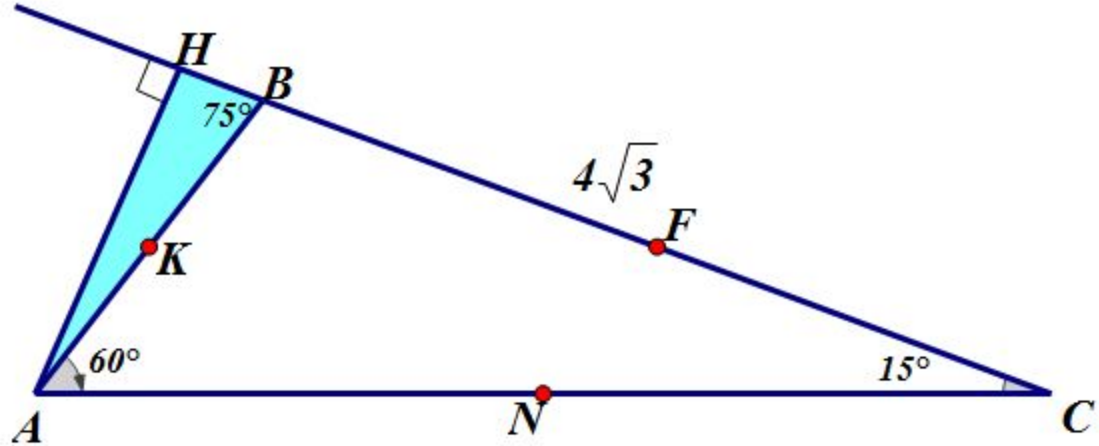
Решение. а) $\angle ABC=105°$



BFNK – параллелограмм.

$\angle KHB=\angle KBH=75°$,
HFNK – равнобедренная трапеция,$\Rightarrow$
$\angle HKN=\angle KNF=105°$, $\angle KHF=\angle NFH=75°$,
тогда $\angle KHF+\angle KNF=\angle HKN+\angle NFH=180°$,
это означает, что **точки**
K, F, N и H лежат на одной окружности.

б) $\dfrac{AB}{\sin 15^0} = \dfrac{BC}{\sin 60^0}$



$$\frac{AB}{\sin(45^0 - 30^0)} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$AB = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$BH = AB\cos 75^0 \qquad BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\cos(45^0 + 30^0)$$

$$BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$FH = FB + BH = \frac{1}{2}BC + BH$$

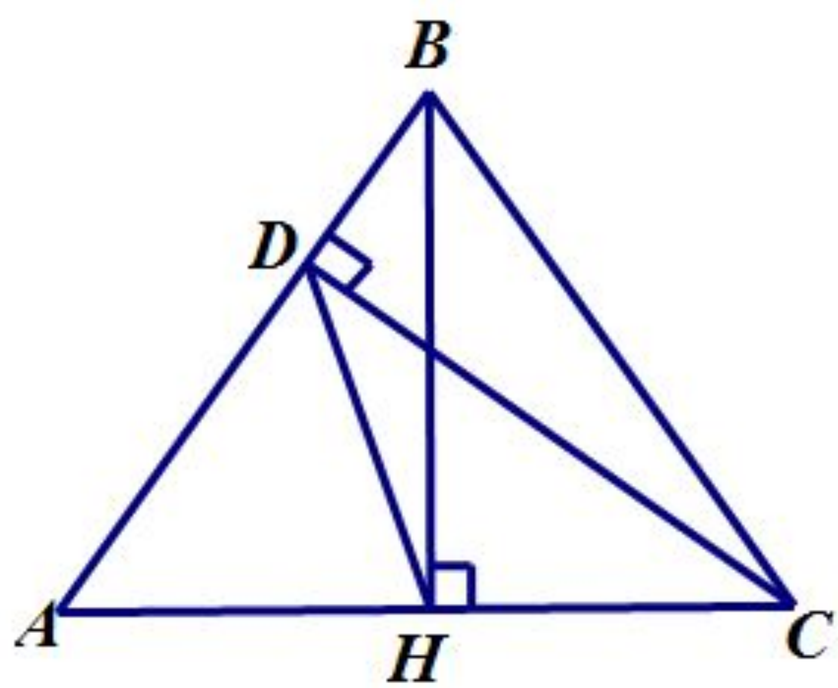
$$FH = 4$$

Ответ. 4

Задача 9

Доказать, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.

Найдите коэффициент подобия этих треугольников.



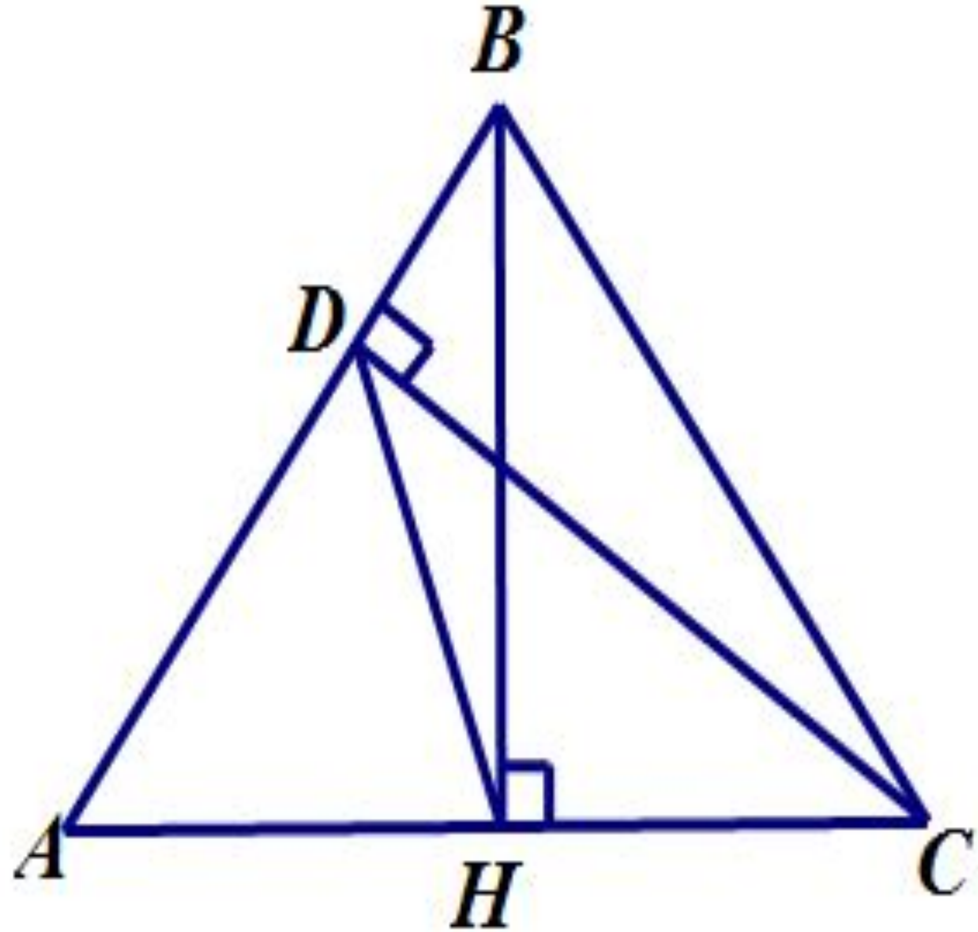
Решение.

Дано: ΔABC – остроугольный,

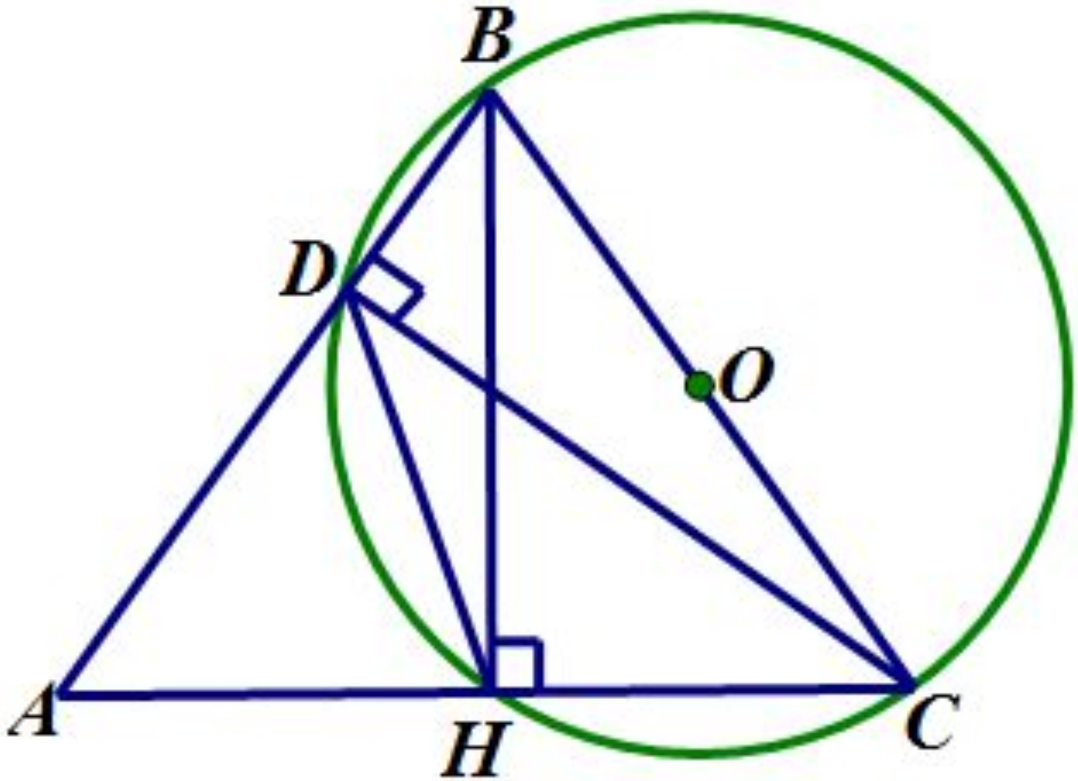
BH, CD – высоты.

Доказать:

ΔABC ~ ΔADH.



Построим вспомогательную окружность, с центром в точке О (середина ВС), которая пройдет через точки Н и D.



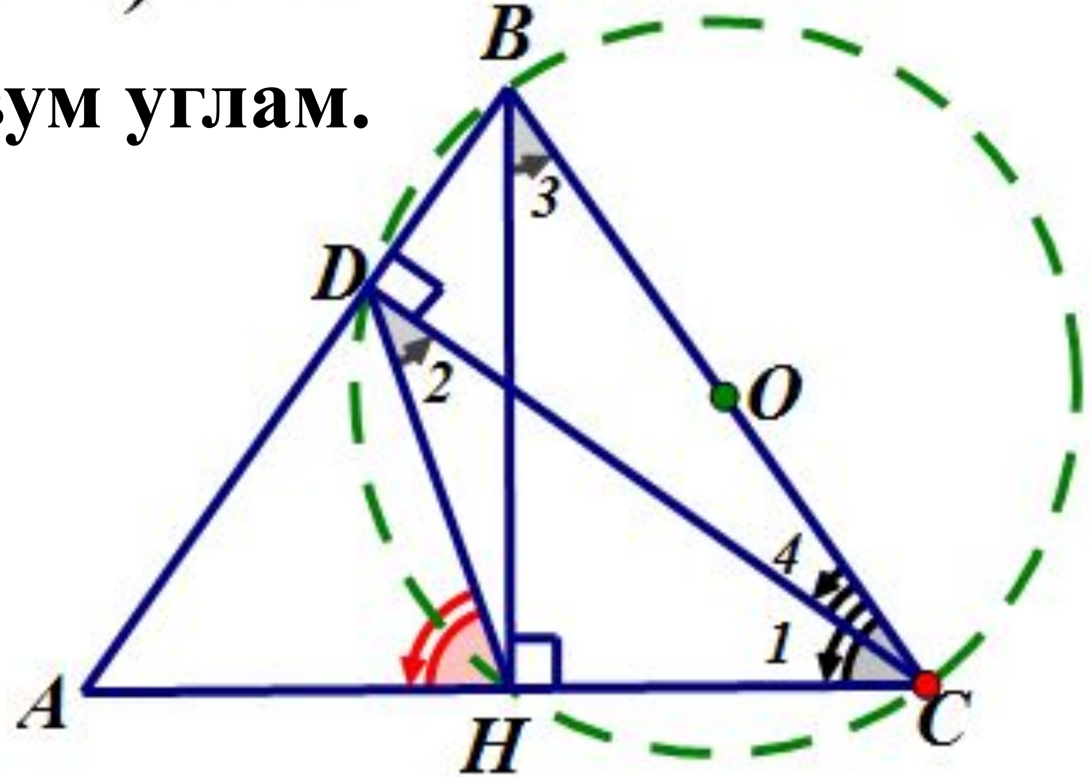
$\angle 1 = \angle C - \angle 4 = \angle C - (90° - \angle B)$

$\angle AHD = \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 =$

$= \angle C - (90° - \angle B) + (90° - \angle C) = \angle B$

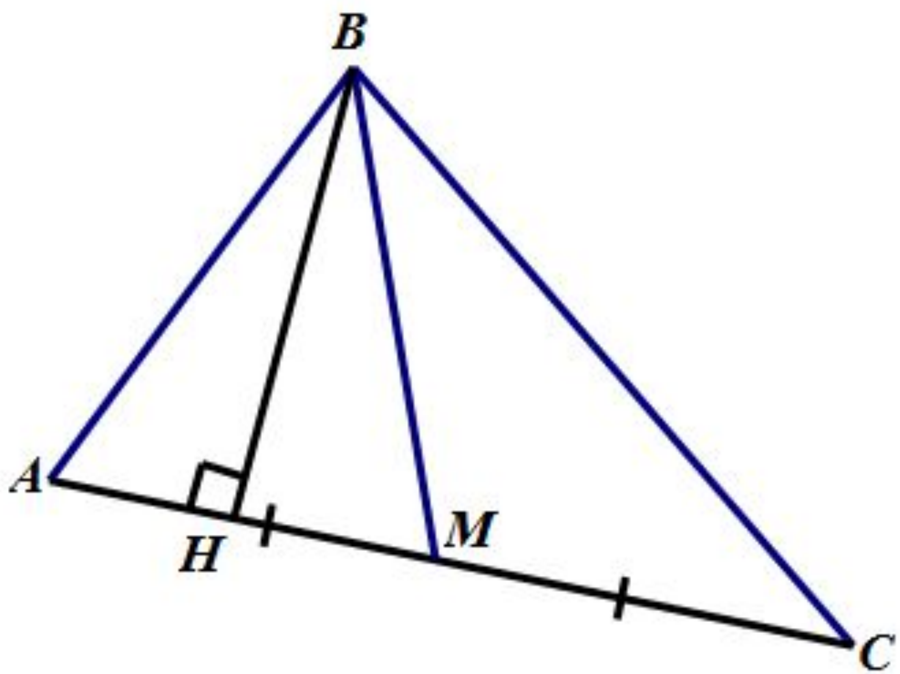
ΔABC~ΔADH по двум углам.

$$k = \frac{AD}{AC} = \cos A$$



Задача 10

Доказать, что биссектриса угла разностороннего треугольника лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

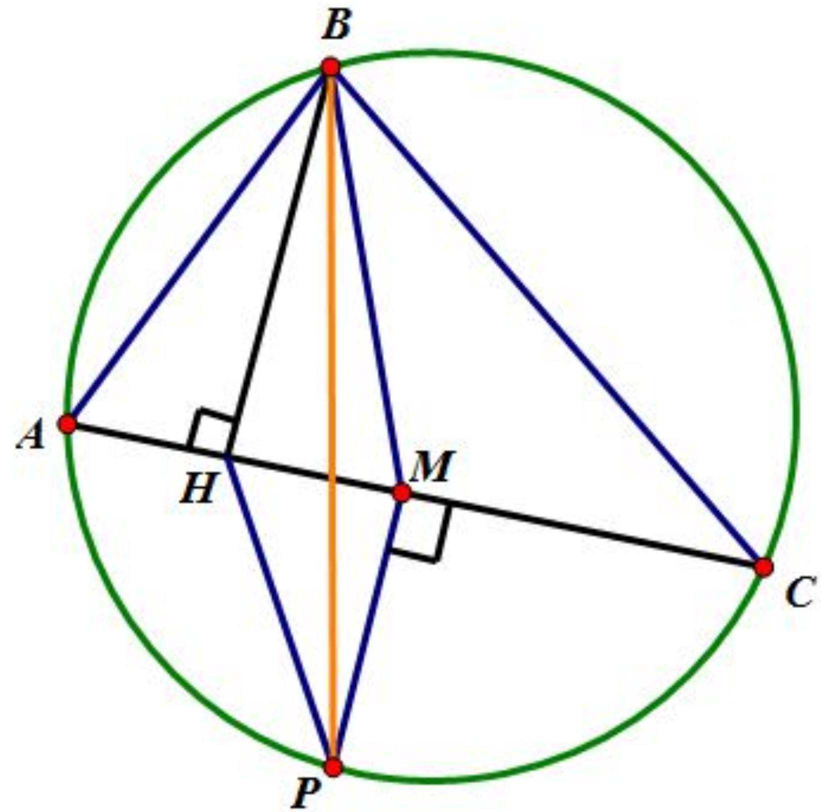


Решение.

Построим описанную окружность.

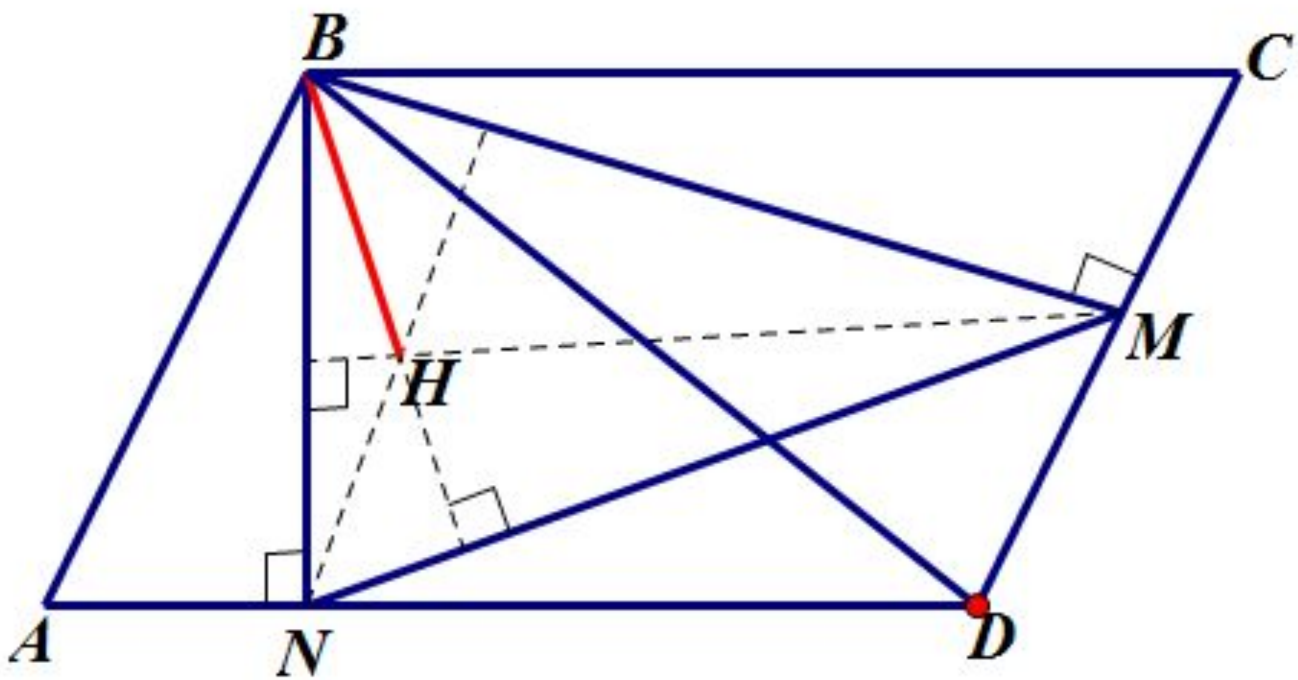
AM=MC, дуги AP и PC равны,

BP – диагональ трапеции BHPM.

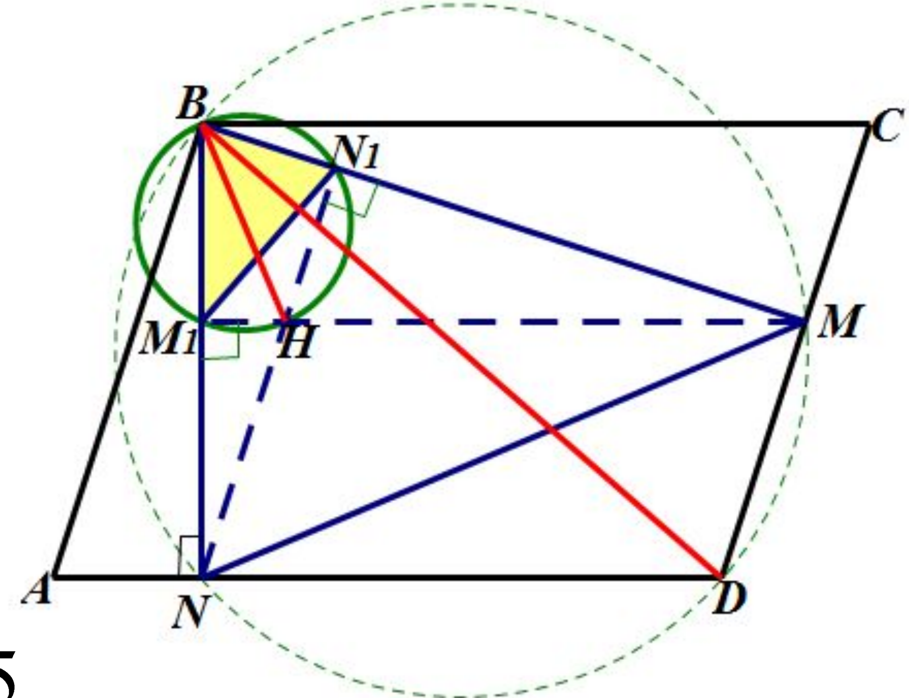


Задача 11

В параллелограмме ABCD проведены высоты BN и BM. Известно, что MN=15, BD=17. Найти расстояние от точки B до точки H – точки пересечения высот треугольника BMN.



Решение.



$$\Delta BMN \sim \Delta BM_1N_1$$

$$\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{BH}{BD} = \cos B$$

$$\frac{M_1N_1}{15} = \frac{BH}{17} \quad \Rightarrow M_1N_1 = \frac{15}{17}BH$$

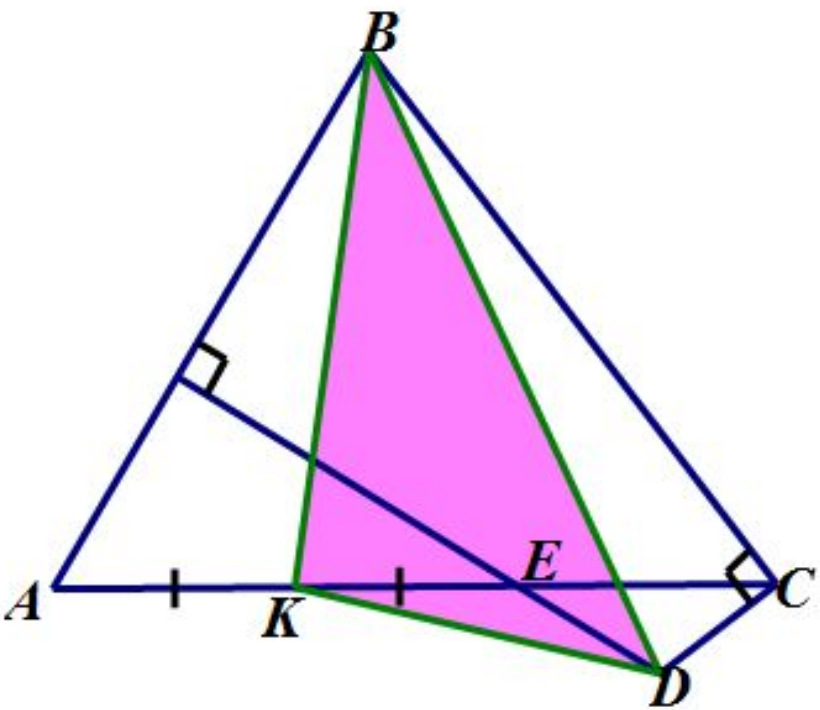
$$BH = \frac{M_1N_1}{\sin B} \qquad \sin B = \frac{15}{17} \qquad \cos B = \frac{8}{17}$$

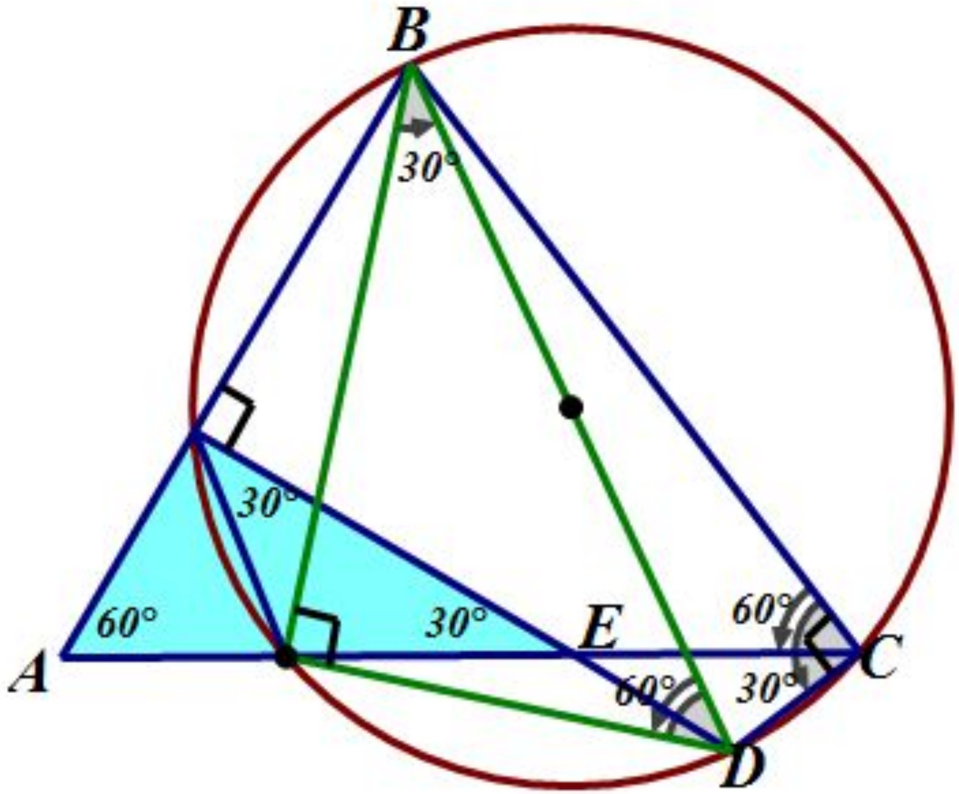
$$BH = 8$$

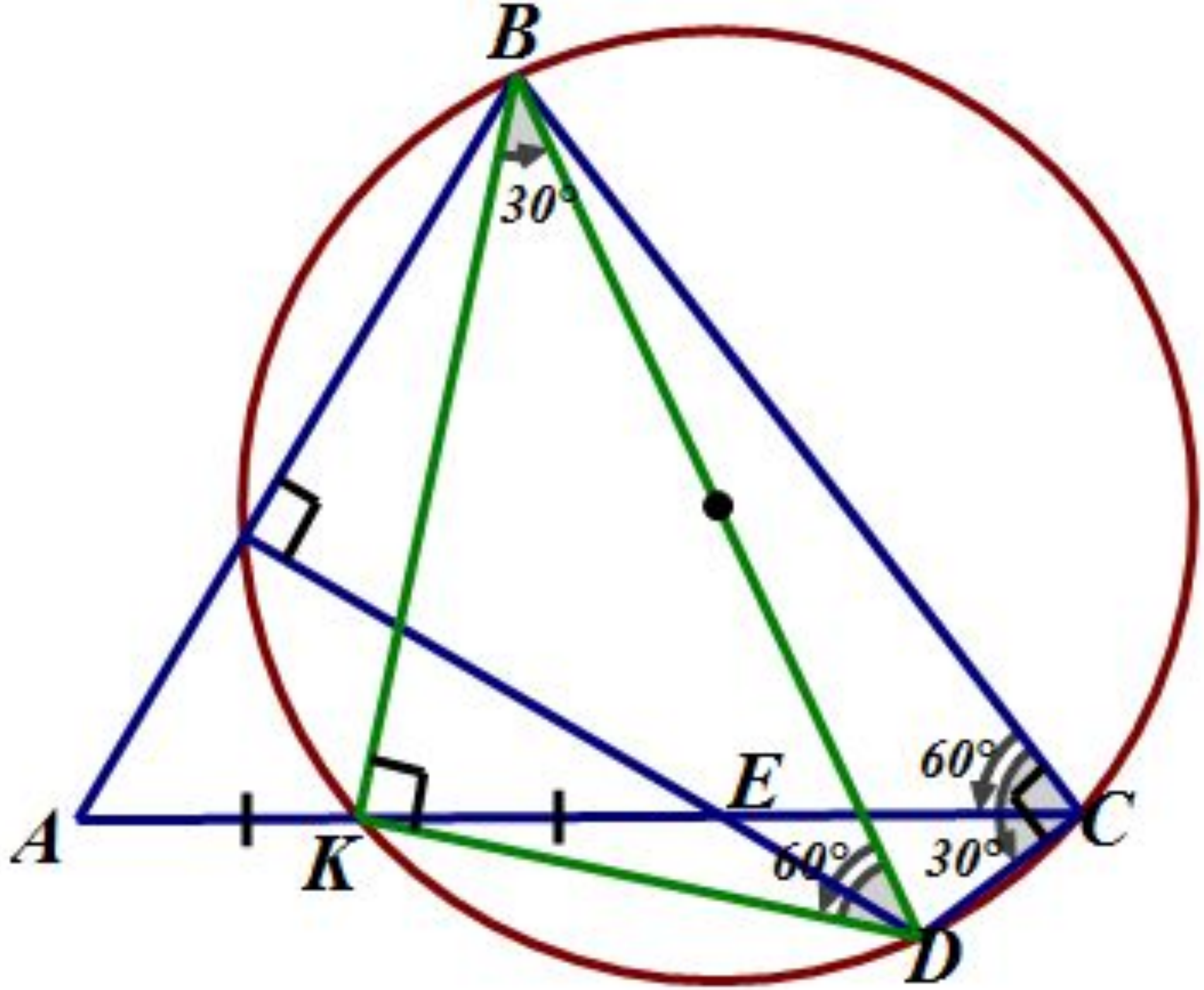
Ответ. 8

Задача 12.

Точка Е лежит на стороне АС правильного треугольника АВС, К – середина отрезка АЕ. Прямая, проходящая через точку Е перпендикулярно АВ, и прямая, проходящая через точку С, перпендикулярно ВС, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.



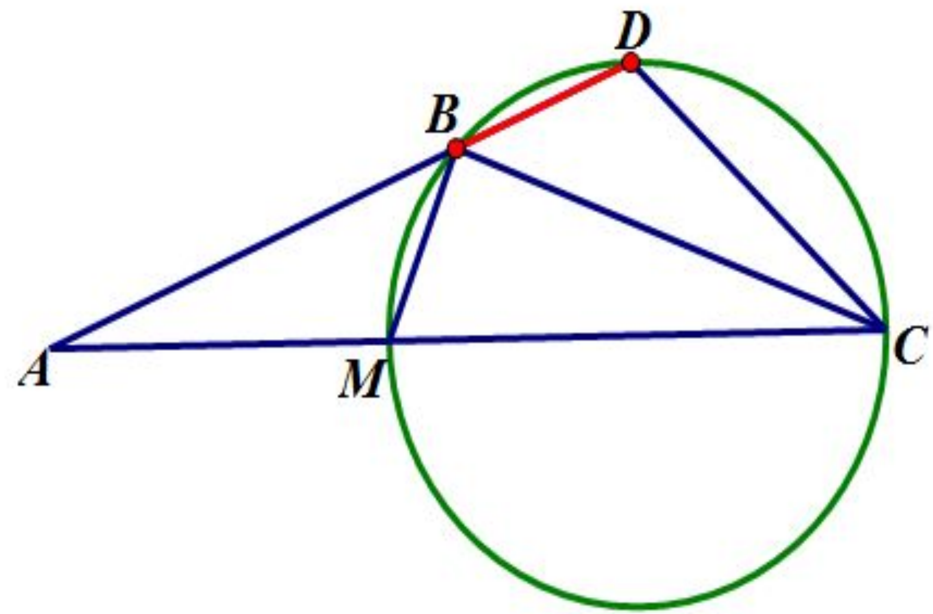

B
30°
30°
60°
30°
E
60°
C
A
60°
30°
D


B
30°
60°
E
C
A
K
60°
30°
D

Задача 13

В треугольнике АВС точка М – середина АС.

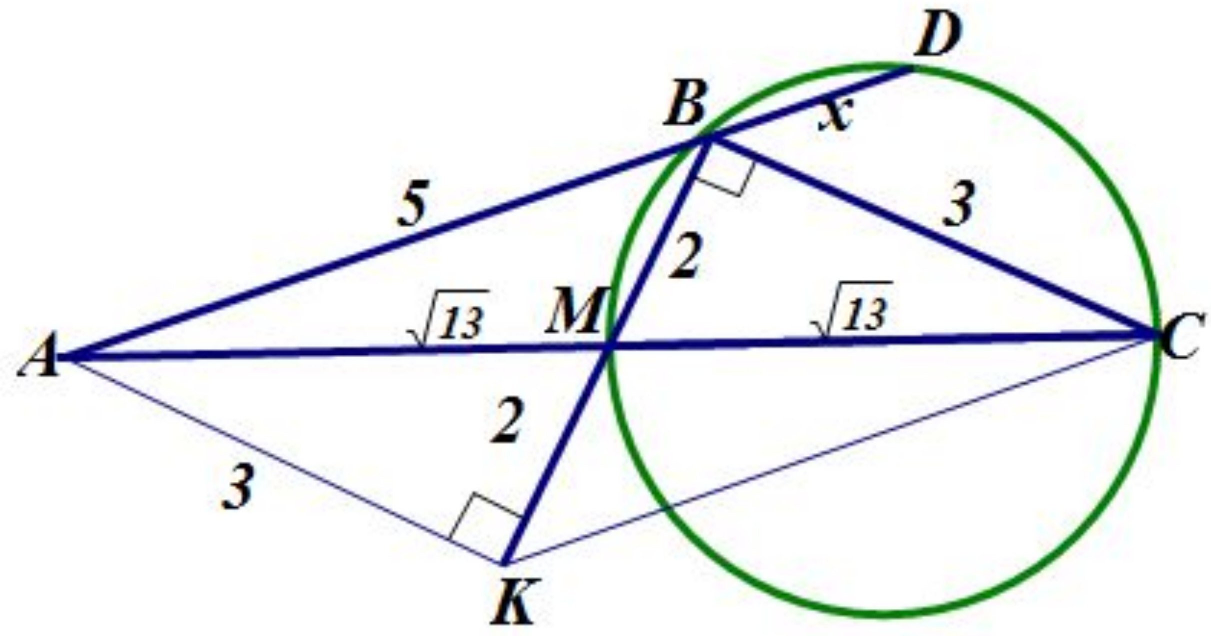
а) Докажите, что длина отрезка ВМ больше полуразности, но меньше полусуммы длин сторон АВ и ВС.



б) Окружность проходит через точки В, С, М. Найдите длину хорды этой окружности, лежащей на прямой АВ, если известно, что

АВ=5, ВС=3, ВМ=2.

б)



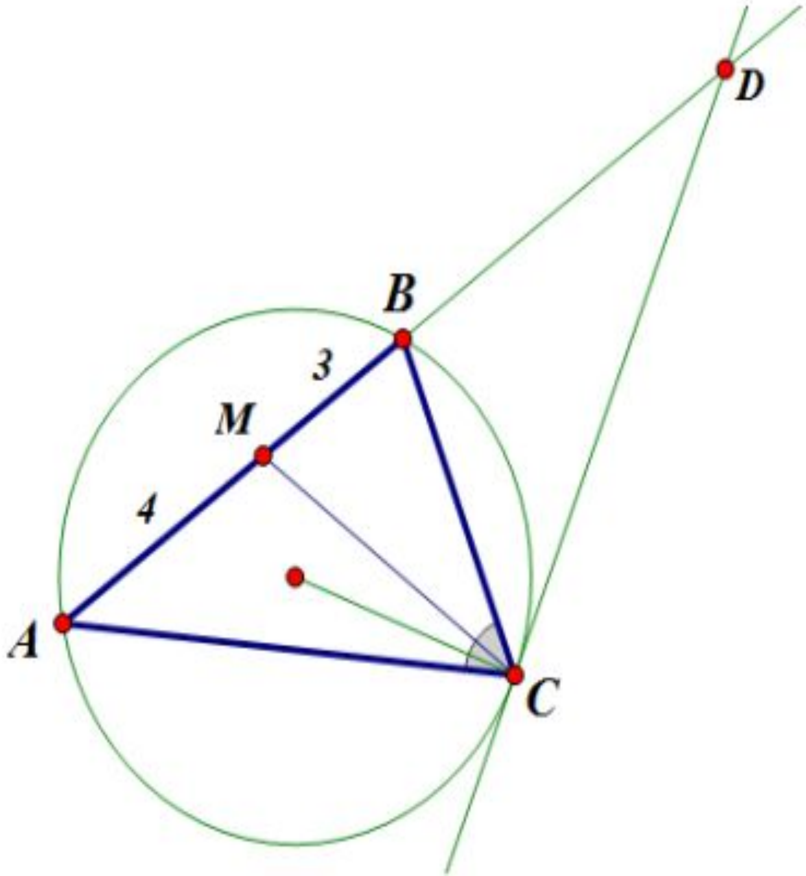
$$AB \cdot AD = AC \cdot AM$$

$$5 \cdot (5 + x) = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$x = 0,2$

Задача.

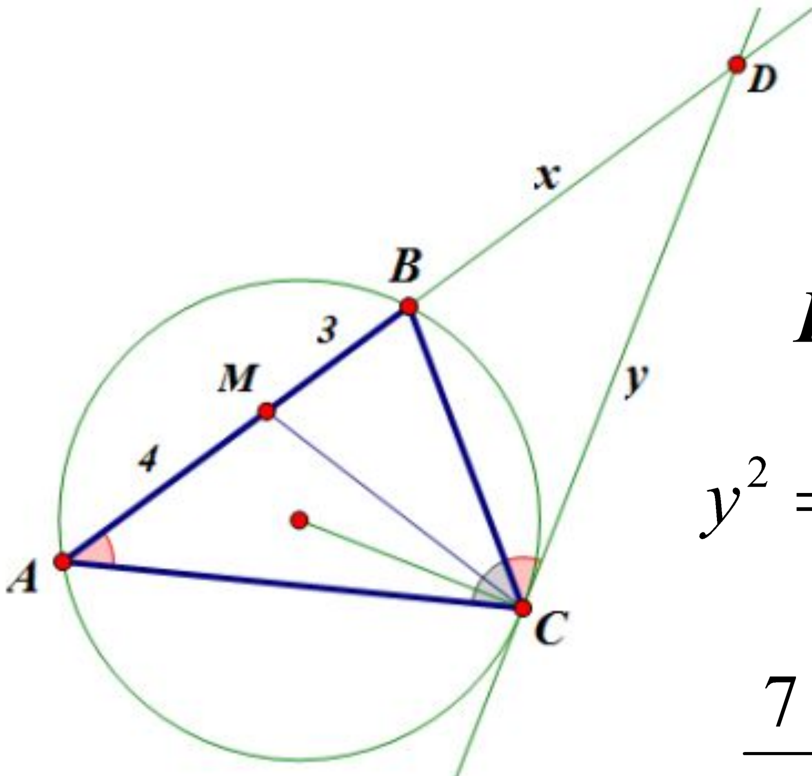
Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM=4 и MB=3. Касательная к описанной окружности Δ ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD .



Решение.

$$\Delta ACD \sim \Delta BCD: \ \frac{BC}{AC} = \frac{x}{y}$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$



$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \qquad x = \frac{3}{4}y$$

По свойству касательной

$$y^2 = (\frac{3}{4}y + 7)\frac{3}{4}y \qquad y^2 = \frac{9}{16}y^2 + \frac{21}{4}y$$

$$\frac{7}{16}y^2 - \frac{21}{4}y = 0 \qquad \frac{y}{4} = 3$$

$$y = 12$$

Ответ. 12

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте:
www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами. По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты. Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

Спасибо за внимание