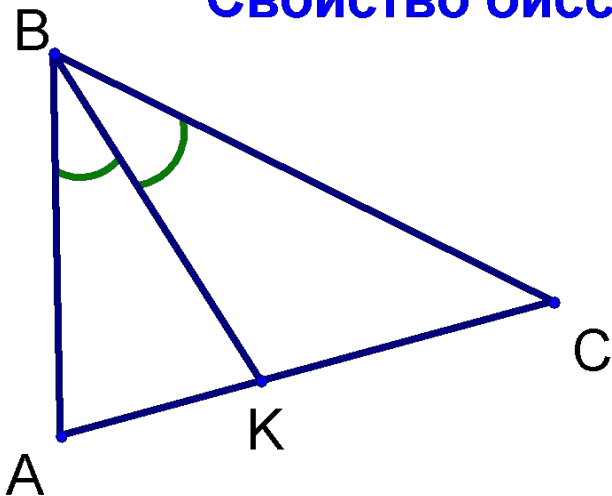


Теорема Менелая

**ГБОУ лицей №1828 «Сабурово»,
учитель математики Яровикова Н.В., 9 класс.**

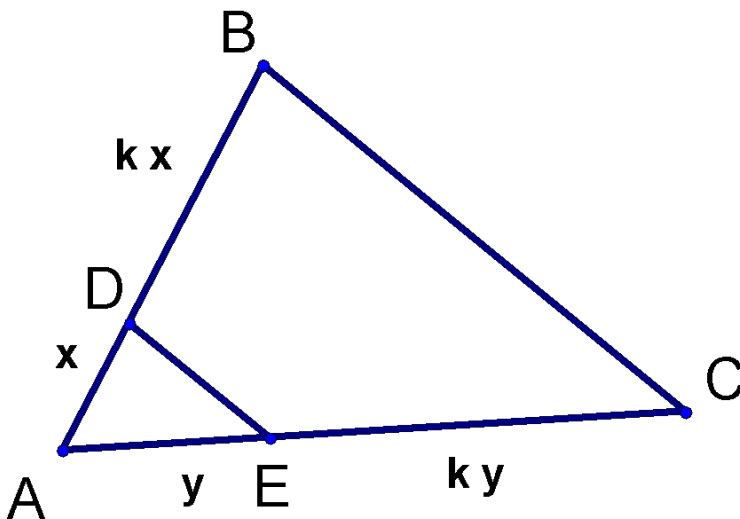
Теорема Менелая

Свойство биссектрисы треугольника



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}$$

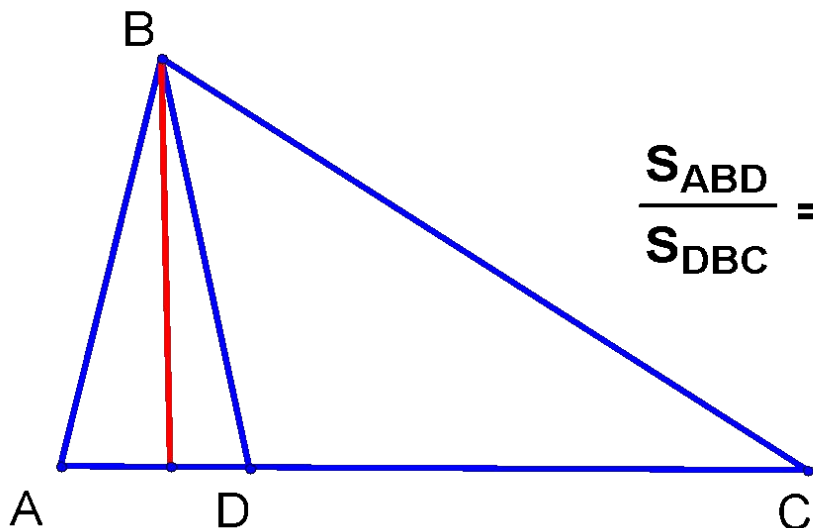
Обобщенная теорема Фалеса



$$\begin{aligned} DE &\parallel BC \\ \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned}$$

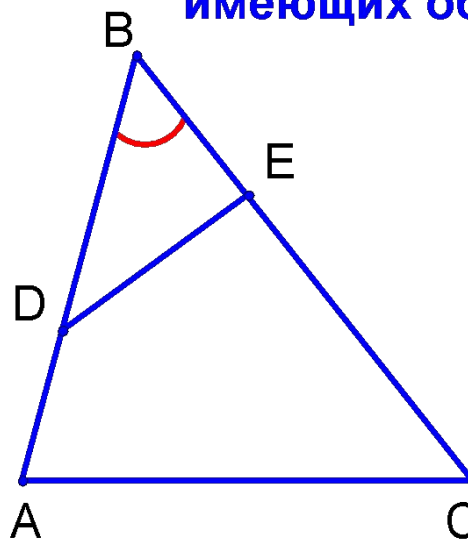
Теорема Менелая

Отношение площадей треугольников, имеющих общую высоту



$$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DC}$$

Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол



$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = \frac{AB \cdot BC}{DB \cdot BE}$$

Теорема Менелая

Задача 1. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N , причем $AC = 2 CN$. Точка M находится на стороне BC , причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

Решение.

1. Проведем прямую $BT \parallel AN$.

2. Пусть $CN = a$, $AC = 2a$.

$\triangle TBM$ подобен $\triangle NCM$ по двум углам.

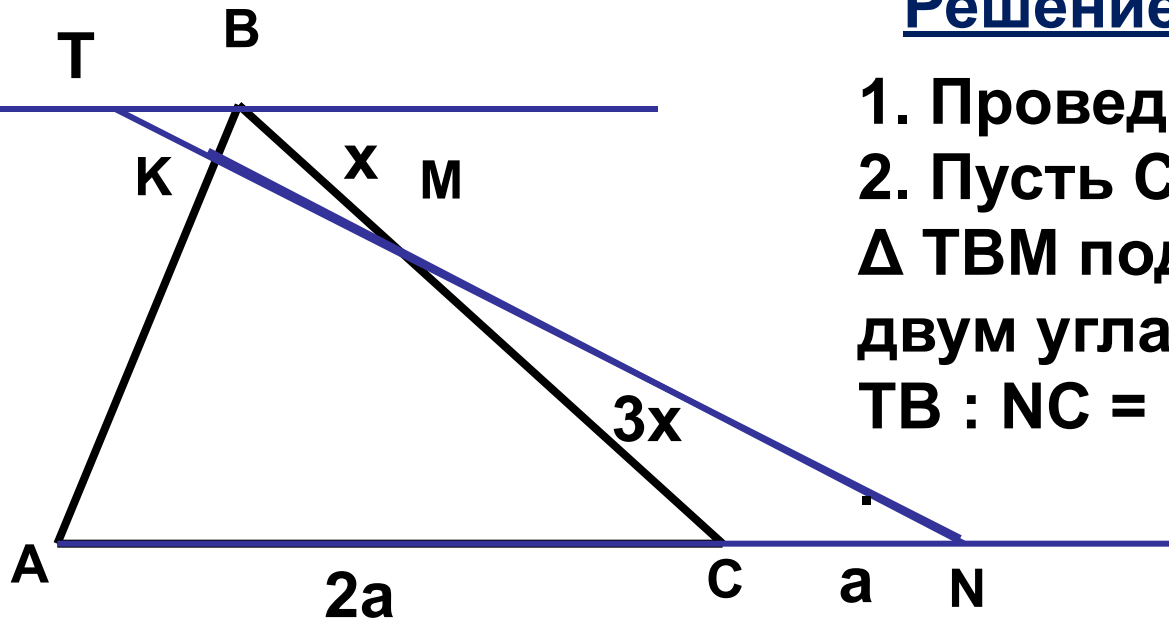
$TB : NC = BM : MC = 1 : 3$,

$$TB = \frac{1}{3}a.$$

3. $\triangle TBK$ подобен $\triangle NAK$ по двум углам.

$$BK : KA = TB : NA = 1 : 9.$$

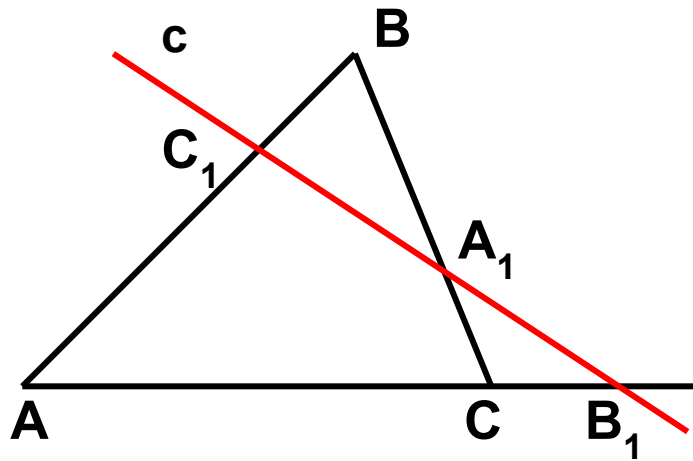
Ответ: $\frac{1}{9}$.



Теорема Менелая

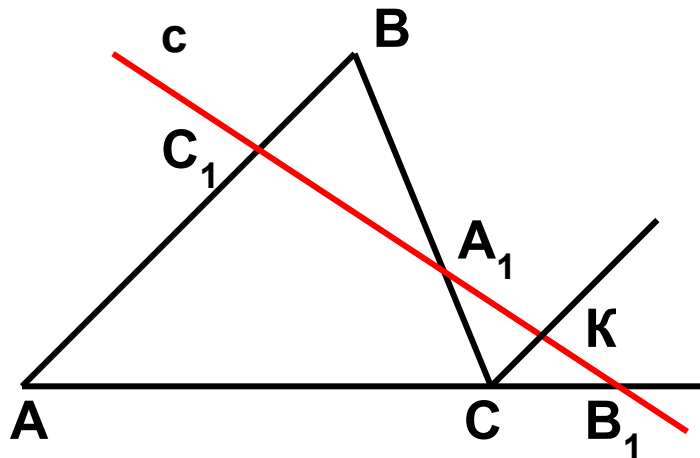
Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает стороны BC , CA , AB треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1 , B_1 , C_1 , то справедливо соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 .$$



Теорема Менелая

Доказательство.



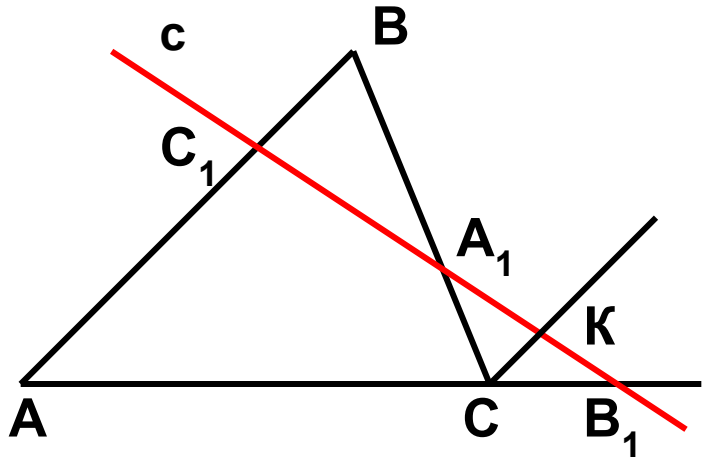
1. Проведем через точку C , прямую параллельно AB .
2. K – точка её пересечения с прямой B_1C_1 .

3. $\triangle AC_1B_1$ и $\triangle CKB_1$ подобны т.к.
 $\angle C_1AB_1 = \angle KCB_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle CKB_1$

внешние односторонние углы при параллельных
прямых AC_1 , CK и секущих AB_1 и C_1B . 4. Значит $\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}$.

5. $\triangle BC_1A_1$ и $\triangle CKA_1$ подобны, т.к. $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1K$ –
вертикальные, $\angle C_1BA_1 = \angle KCA_1$ - внутренние накрест
лежащие углы при параллельных прямых AB и CK и
секущей BC .

Теорема Менелая



Доказательство.

6. Значит $\frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}$.

7. Из равенства находим, что

$$CK = \frac{A_1C \cdot BC_1}{BA_1} \quad CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$$

8. Получаем, что

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Leftrightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

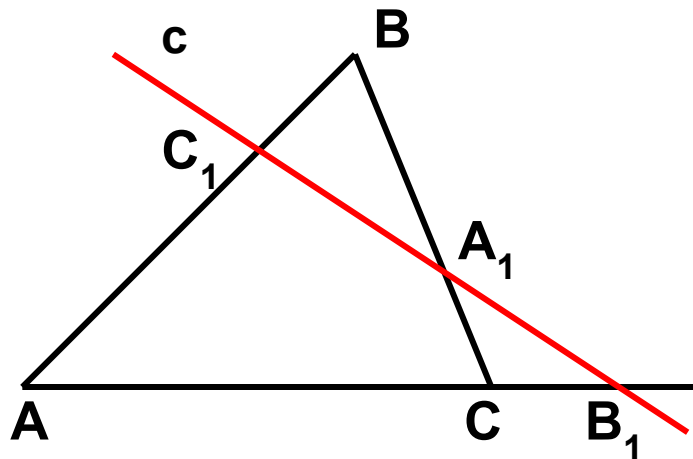
Теорема доказана.

Теорема Менелая

Теорема (Менелая обратная). Пусть дан треугольник ABC . Предположим, что точка C_1 лежит на стороне AB , точка A_1 лежит на стороне BC , а точка B_1 лежит на продолжении стороны AC , причём про эти точки известно, что

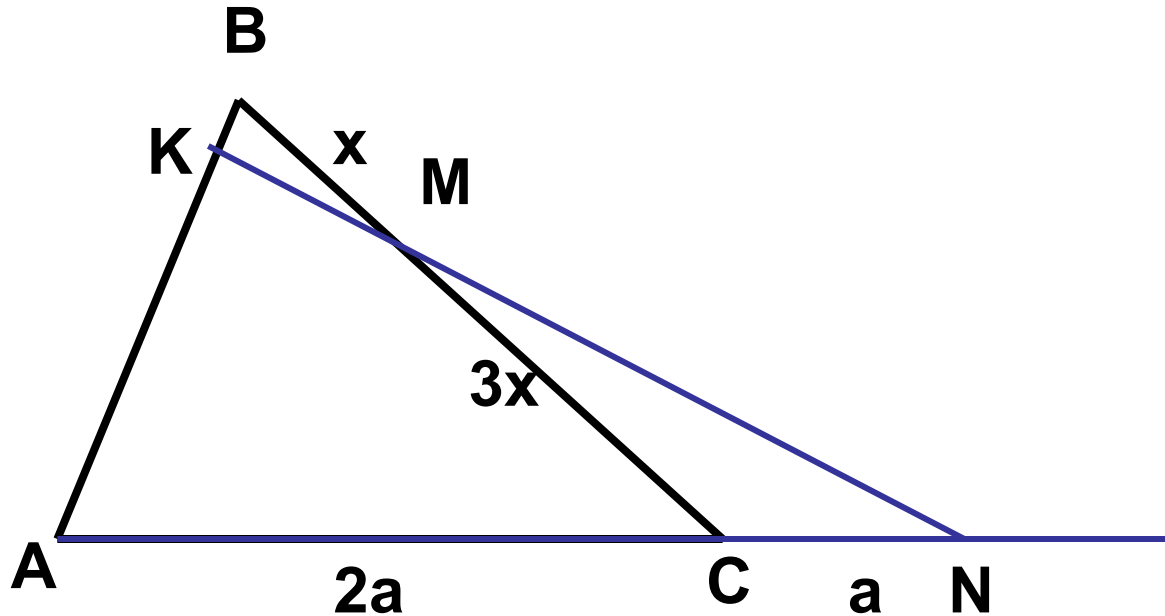
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда эти точки лежат на одной прямой.



Теорема Менелая

Задача 1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причем $AC = 2 CN$. Точка M находится на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?



Решение.

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1;$$

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

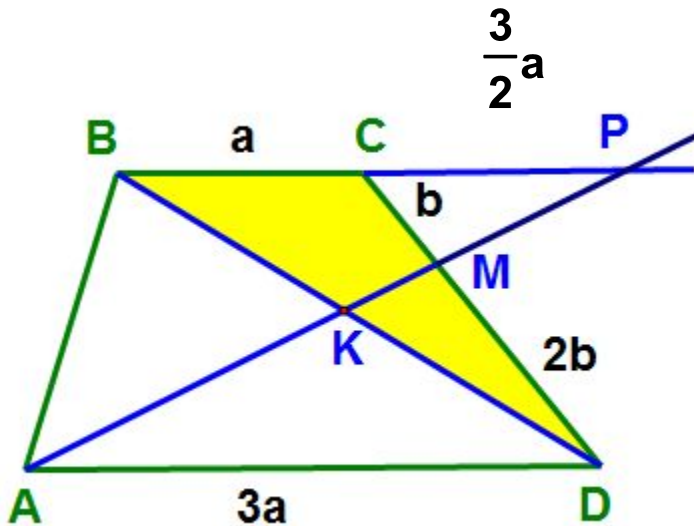
$$\frac{AK}{KB} = \frac{9}{1}, \quad \frac{KB}{AK} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Теорема Менелая

Задача 2. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше, чем BC . Точка M делит сторону CD в отношении $CM : MD = 1 : 2$. Определите в каком отношении отрезки AM и BD делятся точкой их пересечения.

Решение.



1) $\triangle AMD$ подобен $\triangle PMC$,

$$k = \frac{1}{2}, \quad CP = \frac{3}{2}a.$$

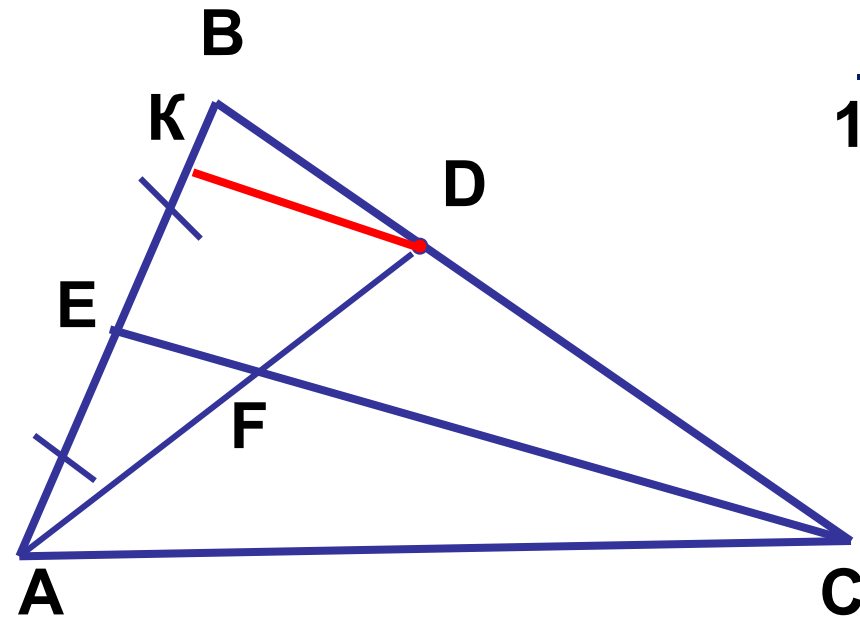
2) Применим теорему Менелая к треугольнику BKD и прямой AP :

$$\frac{DK}{KB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{CD} = 1, \quad \text{отсюда} \quad \frac{DK}{KB} = \frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Теорема Менелая

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.



Решение.

1) Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$.

$\triangle CEB$ подобен $\triangle DKB$ по двум углам.

$$CB : DB = EB : BK = 3 : 1.$$

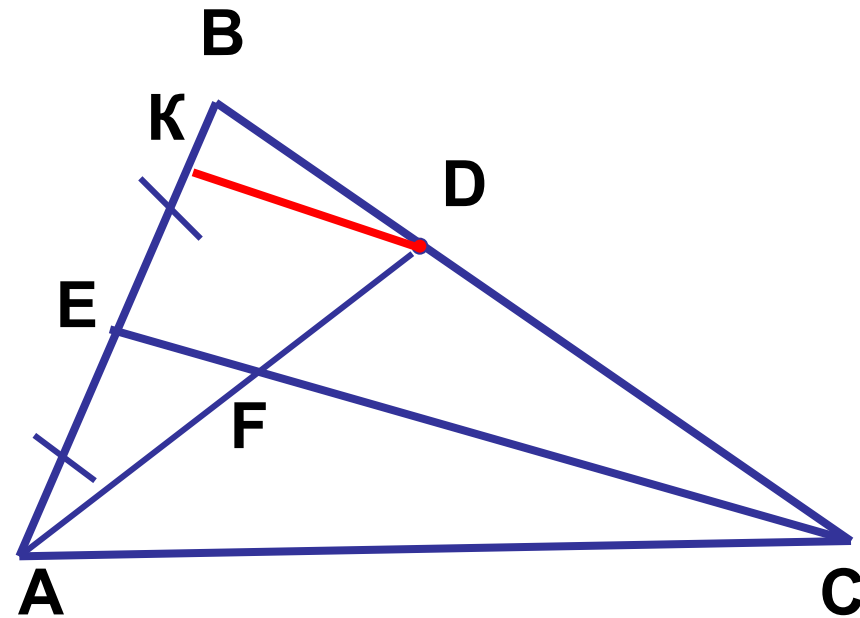
Тогда $BK = x$, $AE = BE = 3x$.

2) $S_{ABD} : S_{ABC} = BD : CB = 1 : 3$ (общая высота, проведенная из точки A).

3) $S_{AKD} : S_{ABD} = AK : AB = 5 : 6$
(общая высота, проведенная из точки D).

Теорема Менелая

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.



Решение.

4) $\triangle AEF$ подобен $\triangle ADK$
по двум углам.

$$S_{AEF} : S_{AKD} = 9 : 25;$$

$$S_{AEF} = \frac{9}{25} \cdot S_{AKD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}.$$

Ответ: 0,1.

Теорема Менелая

Задача 4. В треугольнике ABC , описанном около окружности, $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 4$. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA . P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 . Точка P лежит на биссектрисе BB_1 . Найти отношение $AP : PA_1$.

Решение.

1) Пусть $BC_1 = BA_1 = x$, $A_1C = 5 - x$, $C_1A = 8 - x$.

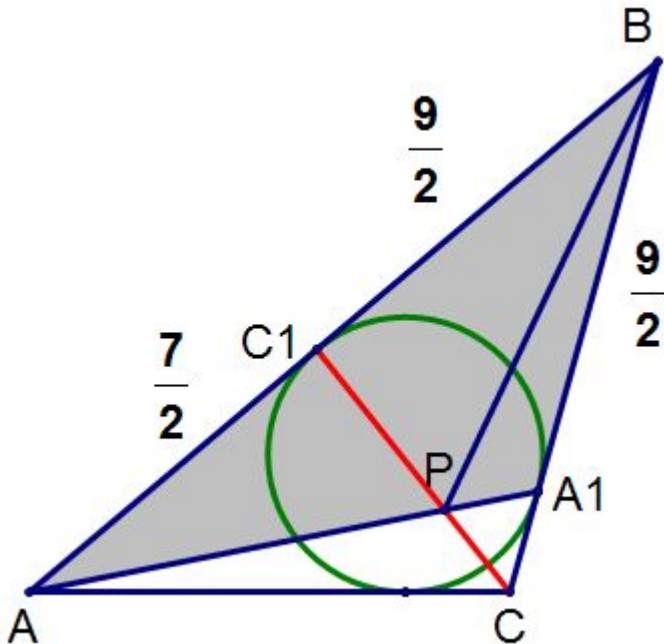
$$AC_1 + A_1C = 4$$

(отрезки касательных)

$$5 - x + 8 - x = 4, \quad x = \frac{9}{2}.$$

$$BA_1 = BC_1 = \frac{9}{2}, \quad C_1A = \frac{7}{2}.$$

2) Применим теорему Менелая к $\triangle ABA_1$ и прямой CC_1 :



Теорема Менелая

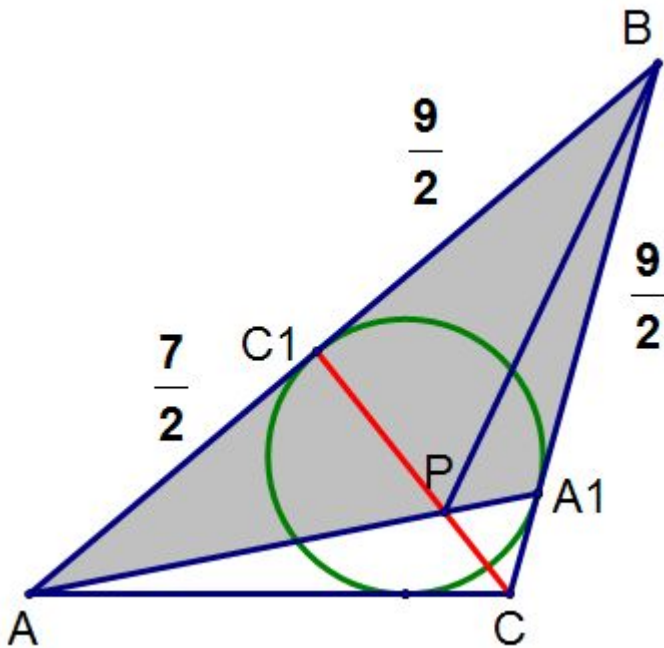
Задача 4. В треугольнике ABC , описанном около окружности, $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 4$. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA . P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 . Точка P лежит на биссектрисе BB_1 . Найти отношение $AP : PA_1$.

Решение.

2) Применим теорему Менелая к $\triangle ABA_1$ и прямой CC_1 :

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1P}{PA} = 1, \quad \frac{A_1P}{AP} = \frac{9}{70}.$$

Ответ: $\frac{70}{9}$.



Теорема Менелая

Домашнее задание.

1. Дан треугольник ABC , в котором BM – медиана. Точка P лежит на стороне AB , точка Q – на стороне BC , причем $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$, $\frac{BQ}{QC} = 6$.

Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R .

Найти $\frac{BR}{RM}$.

2. В треугольнике ABC угол C – прямой, $BC = 3$, $AC = 4$ и проведены биссектриса CD и медиана AM . Найти площадь треугольника CEM .
3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка пересечения делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины.