Дисциплина: Синергетика для инженеров
Преподаватель: профессор каф. общей физики Н.Н. Никитенков

Фракталы и синергетика

- Фракталы (под другими названиями) открыты математиками более ста лет назад, но их долго относили к причудам математиков, исследовавших функции и множества, для которых применимы классические методы вычислений.
- Функции и множества, которые не являются гладкими или регулярными (множество Кантора, кривые Пеано, функции Вейерштрасса и другие) долго игнорировали как патологические и не заслуживающие изучения. Известный математик Шарль Эрмит назвал их «монстрами».
- Эти объекты вновь стал исследовать американский математик Бенуа Мандельброт в 1975 году. Он же и придумал для них термин «фрактал». В своих первых работах он рассматривал их как чисто математические объекты, а в 1982 году вышла его знаменитая книга «Фрактальная геометрия природы», в которой Мандельброт показал фрактальный характер геометрии окружающего мира.

(Федер Е. Фракталы. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.)

Фракталоподобной структурой обладают такие разные явления как:

- береговые линии островов и материков,
- ландшафты гор, границы облаков, ветви деревьев, русла рек,
- турбулентные вихри,
- сосудистая система человека,
- зерна в скалистых породах, металлах и композитных материалах,
- геометрическая структура кристаллов, молекул химических веществ, в частности, протеинов,
- и многие другие объекты.
- Используются в изобразительном искусстве, музыке, литературных текстах

Об определении понятия «фрактал»

- Все фракталы, которые исследованы, обладают двумя основными свойствами – изломанностью и самоподобием.
- Изломанность понятна и визуально и математически (как отсутствие производной в каждой точке излома).
- Самоподобие в классическом смысле: часть есть уменьшенная копия целого, в неклассическом: часть является деформированной копией целого.
- Строгого и полного определения фракталов пока нет. Е. Федер в работе «Фракталы» (1991) приводит два определения фрактала:
- 1. Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности. (определение Мандельброта).
- 2. Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Наиболее полное на сегодня определение фрактала:

- фракталом называют функциональное отображение или множество, получаемое бесконечным рекурсивным процессом и обладающее тремя следующими свойствами: дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича, самоподобием и недифференцируемостью.
- Следует различать фракталы как математические объекты и фракталоподобные объекты реального мира. Последние обладают свойством самоподобия в ограниченном масштабе (они моделируются с помощью конечного, а не бесконечного рекурсивного процесса).
- Фракталы используют для сжатия изображений путем нахождении в изображении подобных областей и сохранении в файле только коэффициентов преобразований подобия. Сжатие произойдет в том случае, когда коэффициенты преобразований займут меньше места, чем исходное изображение.

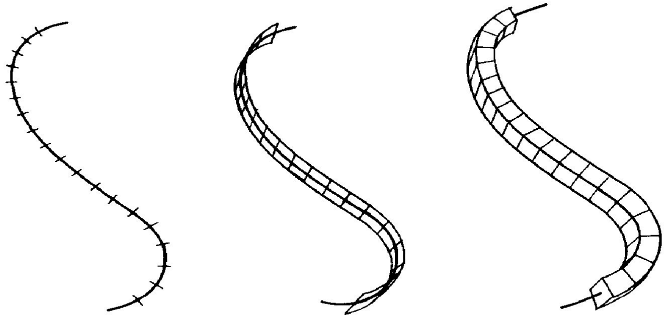
- Поскольку многие природные объекты, которые появились в результате самоорганизации и «странные аттракторы» обладают фрактальной размерностью, то для синергетики исследование фракталов является одной из основных задач.

Фрактальная размерность

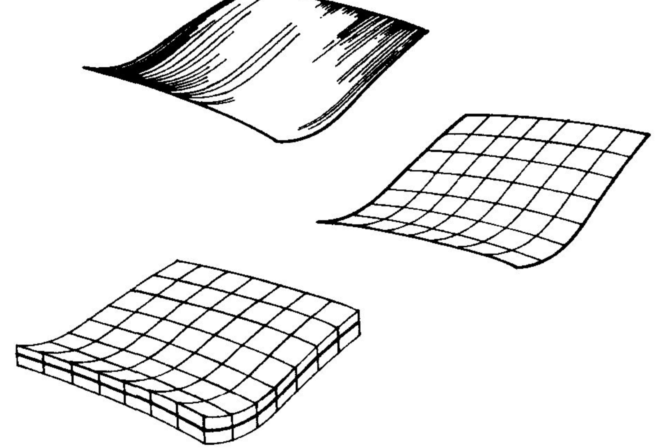
- Термины «размерность Хаусдорфа-Безиковича» и «фрактальная размерность» являются синонимами.
- Немецкий математик Ф. Хаусдорф ввел способ измерения дробной размерности пространства еще в начале XX века,
- русский математик А.С. Безикович развил идеи Хаусдорфа.
- Определение понятия «фрактальная» размерность дается через понятие «топологическая размерность».

- Под *топологической размерностью* (для простоты) будем понимать обычную евклидову размерность, которая для точки равна 0, для линии – 1, для плоскости – 2, для куба – 3.
- Фракталы будем рассматривать как некое *особое множество* точек в пространстве. Центральное место в определении размерности Хаусдорфа-Безиковича D занимает *измерение множества* Ξ *точек в пространстве.*

- Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей или объем тела состоит в том, чтобы разделить их соответственно на очень малые отрезки длиной δ, квадраты со стороной δ, кубы с ребром δ или сферы диаметром δ. Если поместить центр малой сферы диаметром δ в какой-нибудь точке множества, то все точки, находящиеся от центра на расстоянии $r<(1/2)\delta$, окажутся покрытыми этой сферой. *Подсчитывая число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, получим* ***меру величины множества.***
- Кривую можно измерить, определяя *число $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ*, необходимых для того, чтобы покрыть ее. Ясно, что для обычной кривой $N(\delta)=L_0/\delta$. Длина кривой определяется предельным переходом: при $\delta\to 0$ $L = N(\delta)\delta \to L_0\delta^0$
- То есть пределе при $\delta\to 0$ мера L становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от δ.



Измерение «величины» кривой.



Измерение «величины» поверхности.

•Т.о., определить меру величины множества точек Ξ в пространстве, можно выбирав некоторую пробную функцию $h(\delta)=\gamma(d)\delta^{d}$ (отрезок прямой, квадрат или круг, шар или куб), и ею покрыть множество, образуя *меру* $M_d=\Sigma h(\delta)$. Для прямолинейных отрезков геометрический коэффициент $\gamma(d)=1$, для кругов $\gamma=\pi/4$ и для сфер $\gamma=\pi/6$.

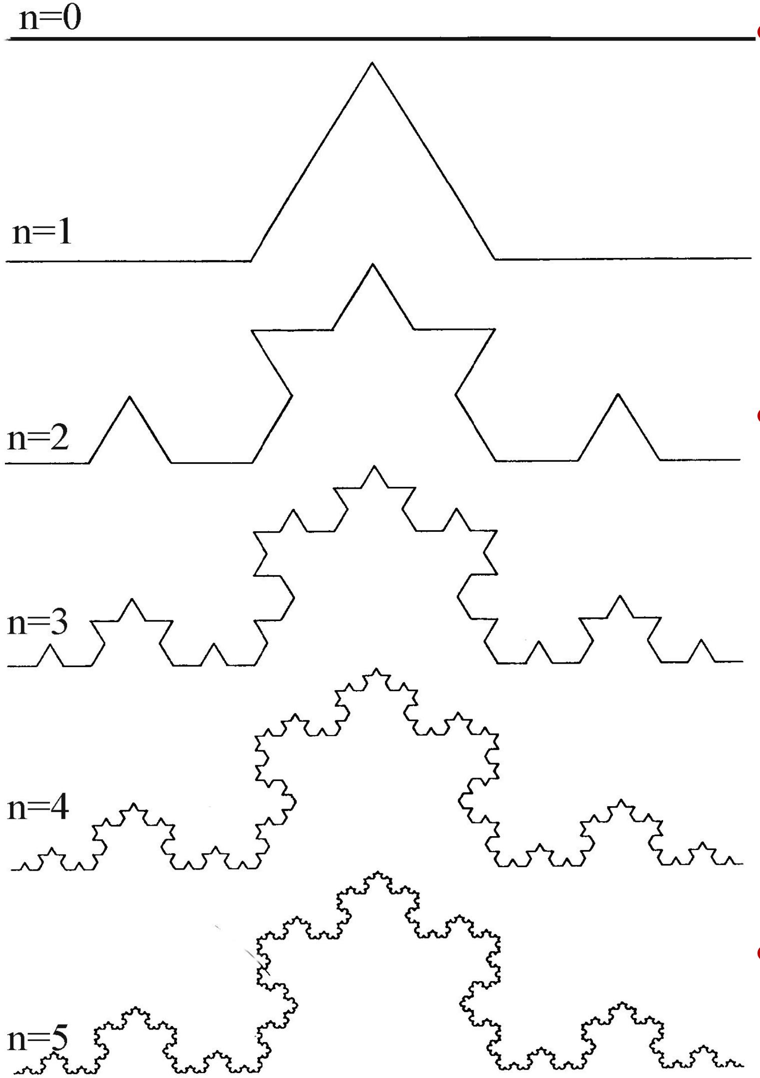
•В общем случае при $\delta\rightarrow0$ мера M_d равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора d-размерности меры. *Размерность Хаусдорфа-Безиковича D множества Ξ есть критическая размерность, при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля*

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \to \begin{cases} 0 & \text{при } d>D \\ \infty & \text{при } d<D \end{cases}$$

- M_d *называют d-мерой множества*. Значение M_d при $d=D$ обычно конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; *существенно, при каком именно значении d величина* M_d *изменяется скачком.*
- В соответствии с определением размерность Хаусдорфа-Безиковича есть *локальное* свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающе малом размере δ пробной функции, используемой для покрытия множества.
- Следовательно, фрактальная размерность *D* может также быть локальной характеристикой множества.
- Определение размерности Хаусдорфа-Безиковича позволяет покрывать множество «шарами» не обязательно одного и того же размера при условии, что диаметры всех шаров меньше δ. В этом случае *d*-мера есть *нижняя грань,* то есть, минимальное значение, получаемое при всех возможных покрытиях.

Триадная кривая Кох и ее размерность

- По способу построения фракталы делят на *линейные* и *нелинейные.*
- Алгоритмы построения *линейных фракталов* определяются линейными функциями. В них самоподобие присутствует в самом простом варианте: любая часть повторяет целое.
- *Нелинейные фракталы* задаются нелинейной функцией роста, то есть уравнениями в степени выше первой. В них самоподобие будет выглядеть более сложным: любая часть является уже не точной, а деформированной копией целого.
- Один из простейших примеров линейного фрактала – кривая Кох, (1904 год, немецкий математик Хельга фон Кох).



Построение триадной кривой Кох

•начинается с прямолинейного отрезка единичной длины $L(0)=1$ (*затравка* (или нулевым поколением кривой Кох), может быть заменена стороной какого-нибудь многоугольника), $n=0$.

• каждое звено затравки заменяется *образующим элементом* ($n=1$) – получаем первое поколение – кривую из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по 1/3. Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину $L(1)=4/3$ от затравки.

•Следующее поколение ($n=2$): замена каждого прямолинейного звена уменьшенным образующим элементом. В результате: звеньев второго поколения $N=4^2=16$, каждое длиной $\delta=3^{-2}=1/9$. Длина $L(2)=(4/3)^2=16/9$. И так далее.

- *Кривая n-го поколения при любом конечном n* называется *предфракталом.* Проследим за тем, как получается выражение для *D*.
- Длина предфрактала *n*-го поколения равна *n* длин 1-го поколения, то есть, определяется формулой:

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

- Длина каждого звена составляет $\delta=3^{-n}$. Замечая, что число поколений *n* представимо в виде $n=-\ln\delta/\ln 3$, запишем длину предфрактала в виде:

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n = \exp\left(-\frac{\ln\delta[\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D}$$

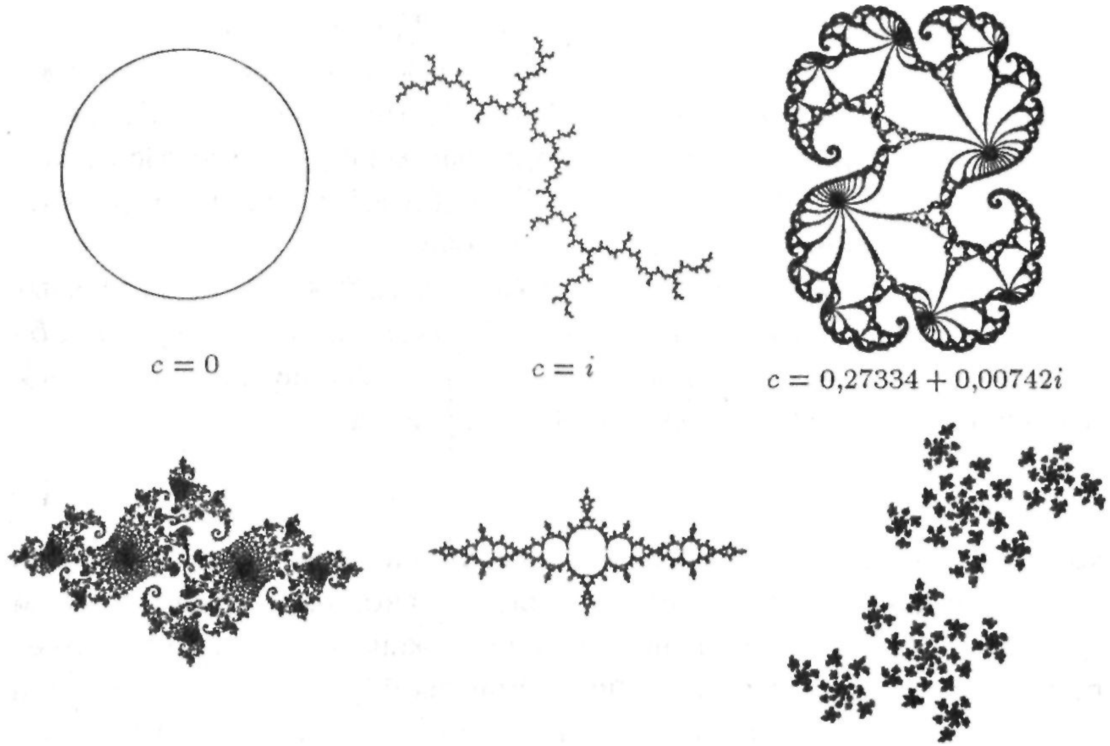
- Используя далее аппарат определения фрактальной размерности (см. пособие) получим что *критическая размерность* и, следовательно, *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для триадной кривой Кох равна $D=\ln 4/\ln 3\approx 1{,}2628$.

Нелинейные фракталы

- Одним из первых описал нелинейные фракталы французский математик Гастон Жюлиа еще в 1918 году. Но в его работе отсутствовали изображения исследованных им множеств и термин фрактал.
- В наше время компьютеры позволили получить изображения *множеств Жюлиа*, которые вместе с *множествами Мандельброта* являются ныне наиболее известными квадратичными фрактальными структурами.
- Оба типа фракталов возникают в результате реализации на комплексной плоскости самого простого нелинейного алгоритма:
- $$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad (*)$$

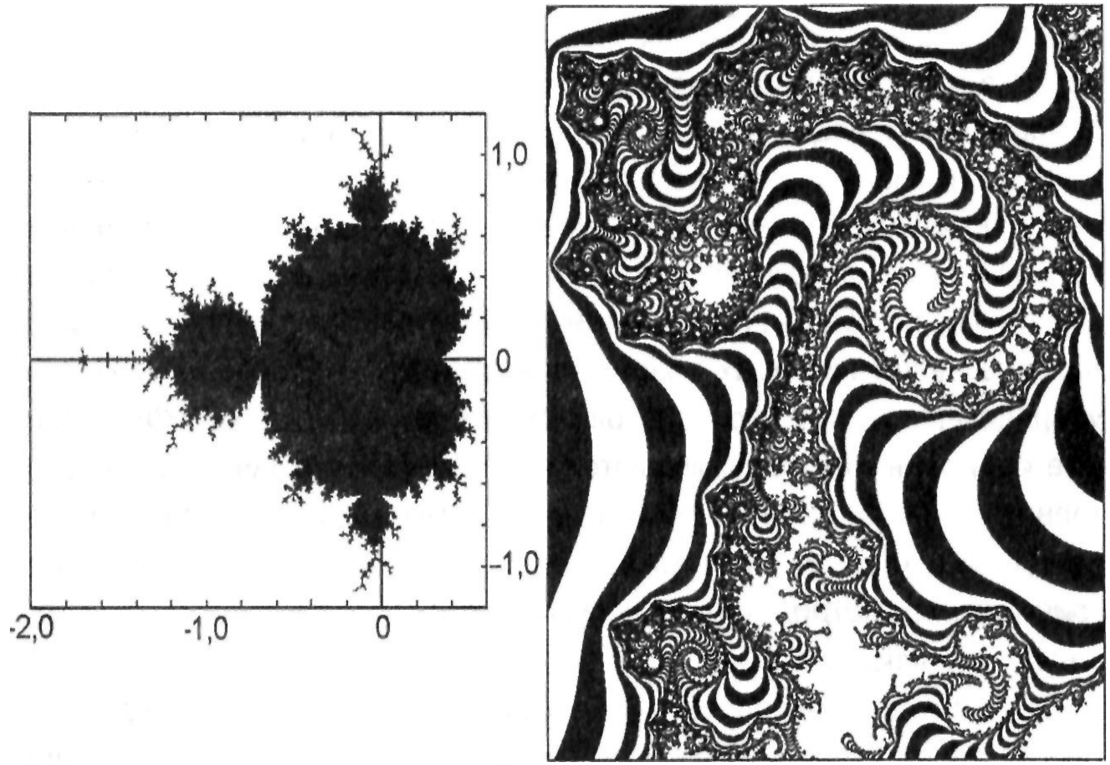
который разбивает комплексную плоскость на «зоны влияния».

- Любая точка z_0 фазового пространства в данном динамическом процессе либо притягивается *аттрактором* (конечным или бесконечным), либо не может принять определенного решения и остается блуждать на границе зон влияния аттракторов.
- Если в итерационном процессе (*) фиксировать c и изменять z_0, ТО получается набор множеств Жюлиа. Если фиксировать $z_0 = 0$ и изменять c, то множество Мандельброта.
- Вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра c. В силу нелинейности (малым изменениям параметра c соответствуют большие изменения формы множества Жюлиа) зависимость эта очень сильна.



c = 0, 74543 + 0,11301i   c = -0,125   c = 0,11301 - 0,67037i

Шесть примеров множеств Жюлиа: от простой окружности (c = 0) до самых причудливых нелинейных фракталов



Множество Мандельброта (слева)
и сильно увеличенный фрагмент области его границ (справа).

Таким образом, множество Мандельброта является бесконечно эффективным хранилищем информации для бесконечного разнообразия множеств Жюлиа.

Некоторые практические приложения фракталов.

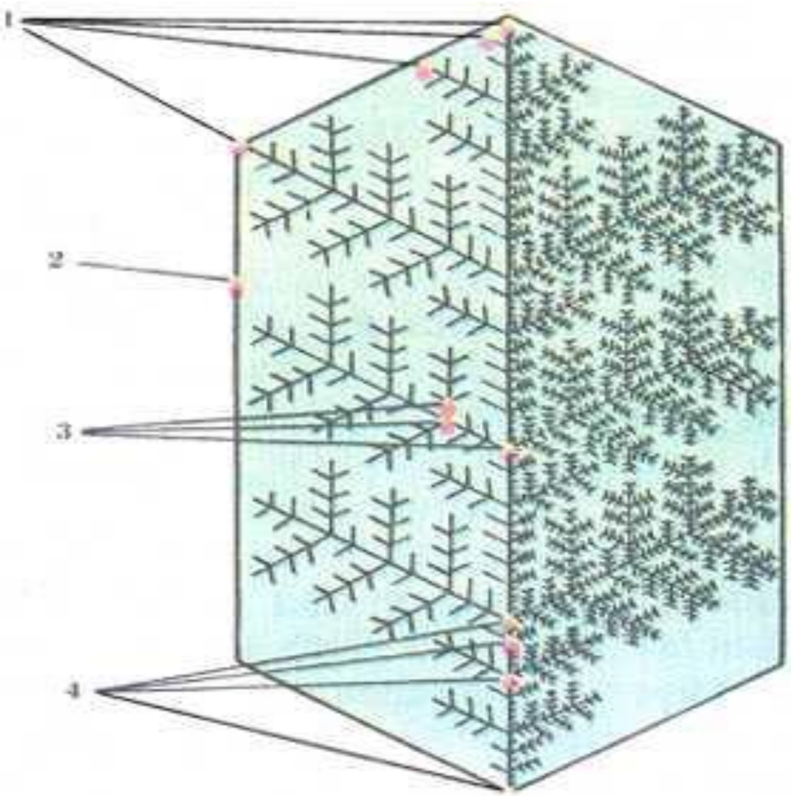
*Ёлка-фрактал, закон ветвления речных систем и мелиоративная сеть***.**

- В природе ветвящиеся фракталоподобные структуры встречаются всюду, где необходимо наилучшим образом собрать с некоторой поверхности или тела вещество и энергию в одну точку при минимальной общей площади структуры или, наоборот, равномерно распределить их.

Примеры:

- русла рек, и молнии,
- кровеносная, нервная, дыхательная системы человека,
- корни и кроны деревьев и многое другое.

- Инженер Л.П. Корохов в 1981 году придумал интересный фрактал для моделирования структуры речной сети. Поскольку внешне он напоминает елку, то и назван был елкой-фракталом или топологическим деревом. Ёлка-фрактал позволила ему теоретически вывести закон ветвления речных систем.



Ёлка-фрактал равномерно заполняет поверхность шестиугольника.

- Цифрами обозначены:

1 – точка роста;

2 – фигура, в которой развивается структура фрактала;

3 – внутренняя точка;

4 – корень ёлки-фрактала.

Ёлка-фрактал представляет собой ветвящуюся по плоскости кривую, состоящую из одномерных и двухмерных симплексов.

- Симплекс (от лат. *simplex* – простой) – простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n. Трехмерный симплекс (n=3) представляет собой тетраэдр, двумерный симплекс – треугольник, одномерный – отрезок, нульмерный – точку). Кривая бесконечна, но вписывается в конечную площадь. Она непрерывна, но вся состоит из углов. Это недифференцируемая кривая (нет касательных ни в одной точке) и это – линейный фрактал так как у него даже самая малая часть в точности повторяет саму елку. Размерность его дробная и равна 1.77178...
- Используя ёлку-фрактал Л.П. Корохов получил функциональную зависимость между площадью абстрактного водосборного бассейна и длиной его главного водотока:

$$F=kL^f,$$

где F – площадь абстрактного водосборного бассейна; L – длина главного водотока; f – размерность структуры елки, равная 1.77178; k – коэффициент, отражающий плотность покрытия поверхности абстрактного водосбора «речной сетью».