«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретное преобразование Фурье. Введение

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (1)

Цель: изучить дискретное преобразование Фурье (ДПФ) **периодических последовательностей** и последовательностей **конечной длины** и овладеть программными средствами его вычисления в MATLAB с использованием алгоритмов БПФ.

ДПФ: пара взаимно однозначных преобразований – **прямое дискретное преобразование Фурье** (прямое ДПФ) и **обратное дискретное преобразование Фурье** (обратное ДПФ).

Англоязычная терминология:

1) **direct Fourier transform (DFT) – прямое ДПФ;**

2) **inverse discrete Fourier transform (IDFT) – обратное ДПФ.**

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (2)

Прямое ДПФ

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk},\quad k=0,1,\dots,N-1$$

Обратное ДПФ

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk},\quad n=0,1,\dots,N-1$$

$x(n)$ – исходный сигнал (исходная последовательность)

$X(k)$ – результат вычисления ДПФ; N – длина последовательности

n – дискретное нормированное время (номер отсчета); $n = {nT}/{T}$

T – период дискретизации; k – дискретная нормированная частота;

$k = {k\Delta\omega}/{\Delta\omega}$; $\Delta\omega$ – период дискретизации (разрешение) по частоте

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (3)

$\Delta\omega = \omega_{д} / N = 2\pi / NT$

$x(n)$ – N-точечная последовательность (содержит N отсчетов), т.е. периодическая последовательность во временной области длины N

$X(k)$ – N-точечное ДПФ, т.е. периодическая последовательность в частотной области с периодом N

$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ – поворачивающий множитель

$X(k)W_N^{-nk} = X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ – k-ая дискретная гармоника

$f = k\, f_{д} / N$ – значения абсолютных частот дискретных гармоник

ДПФ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ДПФ $X(k)$ представляет собой ее **спектр** с точностью до постоянного множителя $(1/N)$.

Модуль ДПФ – **амплитудный спектр периодической последовательности.**

Аргумент ДПФ – **фазовый спектр периодической последовательности.**

Амплитудный спектр вещественной периодической последовательности

Амплитудный спектр равен модулю ДПФ $|X(k)|$ с точностью до постоянного множителя:

$$\begin{cases} 1/N, & k = 0; \\ 2/N, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ДПФ *X(k)* представляет собой *N* дискретных равноотстоящих значений ее спектральной плотности на периоде.

Модуль ДПФ – четная функция частоты.

Аргумент ДПФ – нечетная функция частоты.

Точное выделение гармоник

$$\Delta f = f_{\text{д}} / N$$

$$f_i = q\Delta f, \; q = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$P_i = \frac{NT}{T_i} = \frac{N f_i}{f_{\text{д}}} \in Z$$

Иначе возникает эффект растекания спектра (spectrum leakage).

ЭФФЕКТ РАСТЕКАНИЯ СПЕКТРА

Эффект растекания спектра **принципиально неустраним**, однако:

1) во многих случаях данным эффектом можно пренебречь;
2) могут быть применены **оконные функции** (весовые функции) путем умножения оконной функции на сигнал.

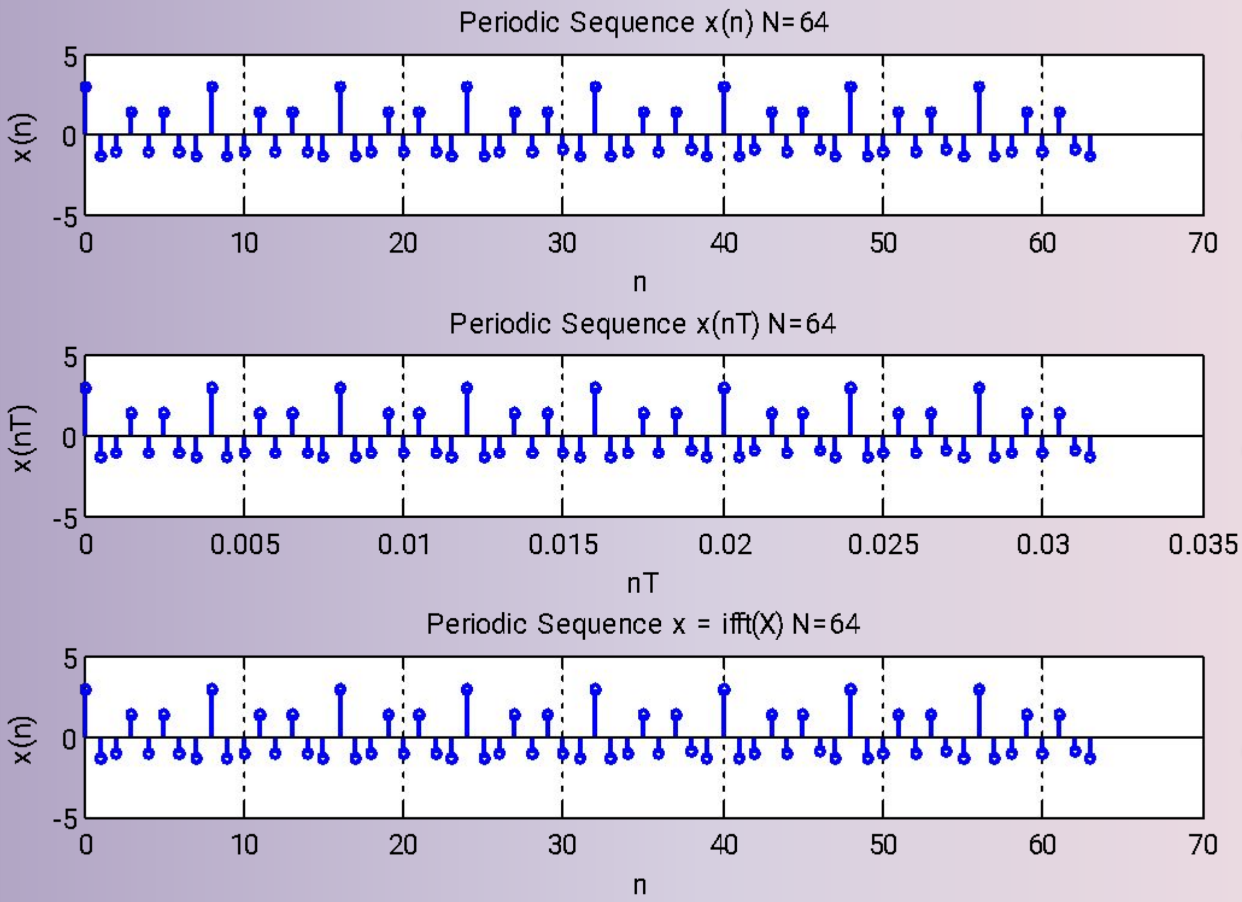
При этом на границах анализируемого фрагмента **значения становятся близкими к нулю**, и при периодическом продолжении **уменьшается величина разрыва**, что позволяет частично справиться с эффектом растекания спектра.

Необходимо **искать компромисс**:

1) **Уменьшение** эффекта растекания спектра (**уменьшается** количество побочных составляющих в спектре);
2) **Ухудшение** разрешения по частоте.

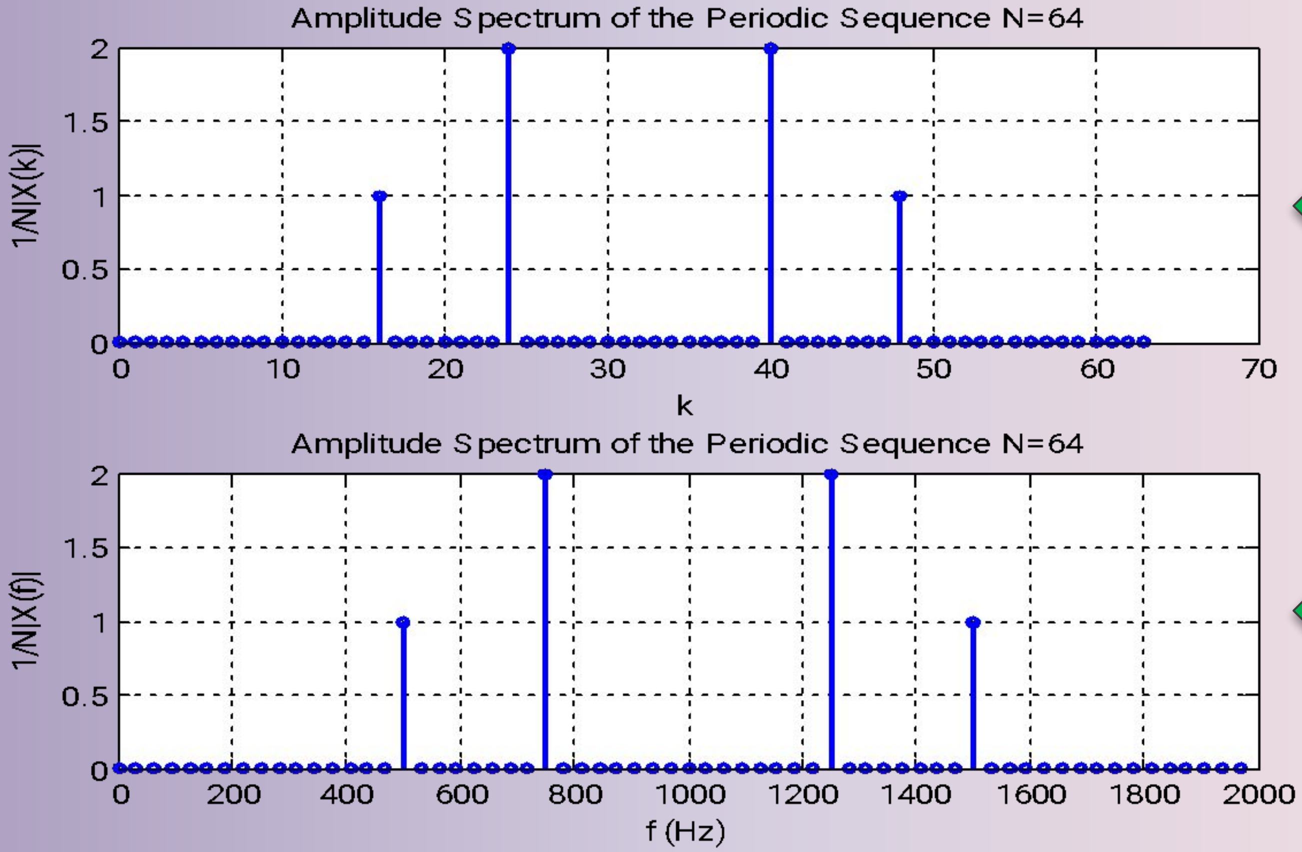
ПРИМЕР (1)


СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
Институт непрерывного образования
1886


Periodic Sequence x(n) N=64
x(n)
n
0 10 20 30 40 50 60 70
5 0 -5
Periodic Sequence x(nT) N=64
x(nT)
nT
0 0.005 0.01 0.015 0.02 0.025 0.03 0.035
5 0 -5
Periodic Sequence x = ifft(X) N=64
x(n)
n
0 10 20 30 40 50 60 70
5 0 -5

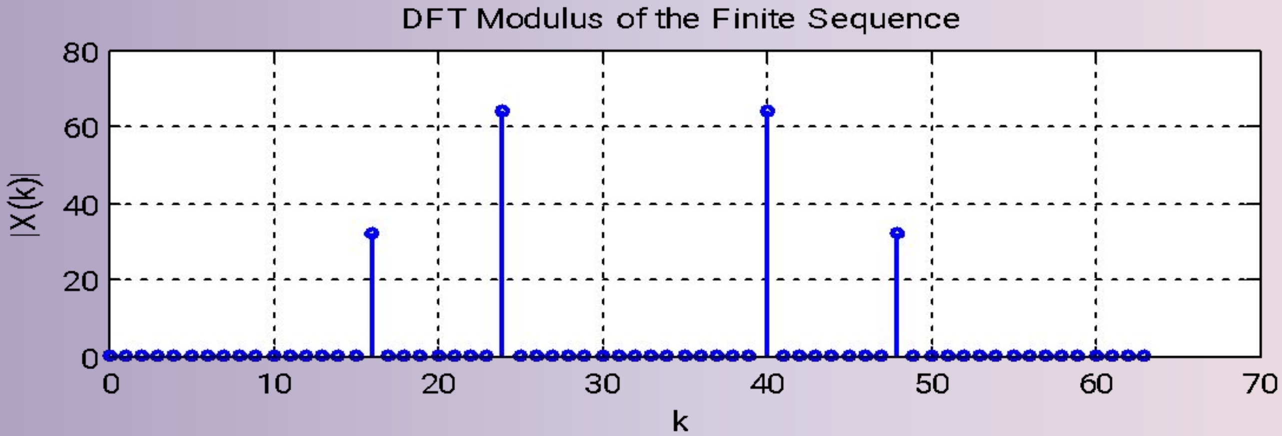
ПРИМЕР (2)

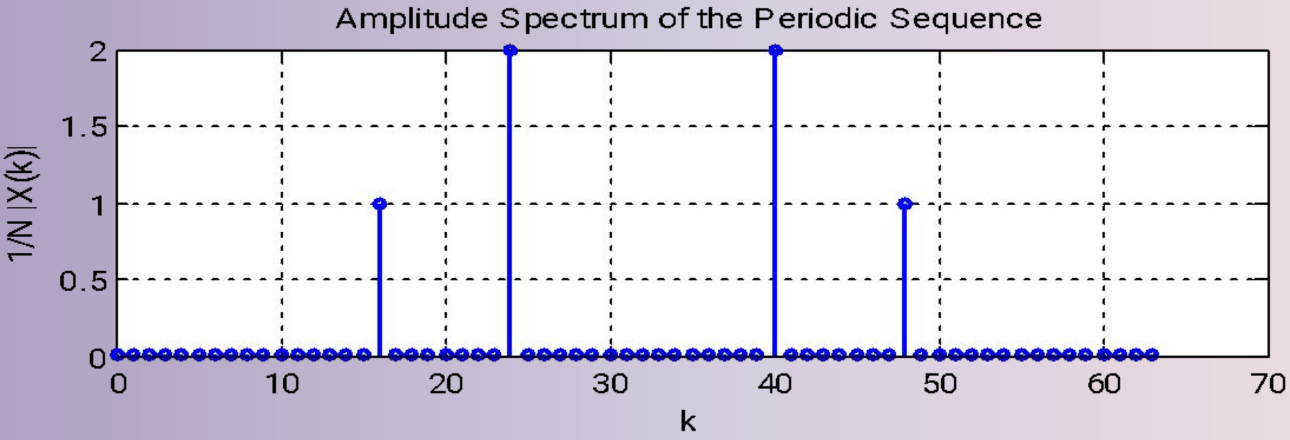

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»


Amplitude Spectrum of the Periodic Sequence N=64
1/N|X(k)|
k
0
10
20
30
40
50
60
70
0
0.5
1
1.5
2
Amplitude Spectrum of the Periodic Sequence N=64
1/N|X(f)|
f (Hz)
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

ПРИМЕР (3)


Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»


DFT Modulus of the Finite Sequence
|X(k)|
0
20
40
60
80
0
10
20
30
40
50
60
70
k


Amplitude Spectrum of the Periodic Sequence
1/N |X(k)|
0
0.5
1
1.5
2
0
10
20
30
40
50
60
70
k

«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретное преобразование Фурье. Введение

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»