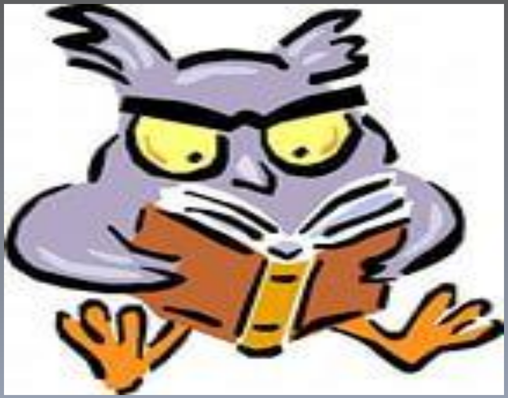
# Гиперкомплексн ые числа

Выполнили:
Король Екатерина,
Крылова Кристина,
Лескина Наталья
Панкратова Инесса.

Многообразное и успешное применение комплексных чисел побудило математиков уже в первые десятилетия XIX в. задуматься над вопросом, нельзя ли подобно тому, как комплексные числа строятся в виде пар действительных чисел, построить высшие комплексные числа, изображающиеся тройками, четверками и т. д. действительных чисел. Начиная с середины прошлого века было исследовано много различных частных систем таких высших комплексных или гиперкомплексных чисел, а в конце прошлого и первой половине текущего столетия была разработана общая теория гиперкомплексных чисел, нашедшая ряд важных приложений в смежных областях математики и физики

# История гиперкомплексного числа

В 1843 году ирландский математик Уильям Гамильтон предложил упомянутую выше систему кватернионов, которая стала исторически первой собственно гиперкомплексных системой. Поиски такой системы были обусловлены тем, что умножение комплексных чисел описывает повороты на плоскости, и возникало желание найти нечто аналогичное для поворотов в трехмерном пространстве. Этого какой-то мере удалось достичь с помощью кватернионов. Теория кватернионов вскоре стала одним из источников развития таких понятий, как векторный и скалярный произведения векторов.



Сначала изобретение кватернионов и других гиперкомплексных чисел было воспринято как событие, сравнимое по значимости с изобретением комплексных чисел, что побудило математиков к весьма активных исследований в этой области. Особенно ощутимый вклад сделал немецкий математик Ф. Г. Фробениус.

Однако довольно быстро интерес к этой тематике спал, потому что роль собственно гиперкомплексных чисел оказалась не столь важной, как роль комплексных чисел. Так что дальнейшее развитие в этой области происходило достаточно медленно и эпизодически. Однако в последнее время наблюдается активизация исследований, связанных с гиперкомплексными числами.

# Понятие гиперкомплексного числа

Гиперкомплексные числа — конечномерные алгебры над полем вещественных чисел (то есть числа, над которыми есть пара операций [типа сложения и умножения], также ещё «умножение на вещественное число»).В элементарной алгебре наряду с действительными числами рассматривается и более широкая система комплексных чисел. Причина, заставляющая рассматривать, комплексные числа, связана с решением квадратных уравнений. Дело в том, что некоторые квадратные уравнения, например, нельзя решить, ограничиваясь только действительными числами (не существует такого действительного числа , чтобы а2 было равно --1).

Итак, назовем гиперкомплексным числом ранга n число, изображающееся совокупностью действительных чисел **$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$** и **$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$** которые пока условно будем называть координатами этого гиперкомплексного числа. Гиперкомплексные числа будем называть равными, если равны их соответствующие координаты, т. е. если

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2, \ldots, a_n=b_n.$$

Действие сложения определим естественной формулой:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n),$$

аналогичной формуле сложения для комплексных чисел. Так же естественно вводится операция умножения гиперкомплексного числа на действительное: по определению считается, что

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(aa_1, aa_2, \ldots, aa_n)$$

Сверх того, должно быть определено действие умножения двух гиперкомплексных чисел друг на друга, причем результат этого действия должен являться гиперкомплексным числом. Распространить на общий случай определение умножения обыкновенных комплексных чисел трудно. Оно может быть осуществлено различными путями, и при этом будут получаться различные системы гиперкомплексных чисел. Поэтому прежде всего следует уяснить, что должно быть достигнуто таким определением.

# Операции над гиперкомплексными числами

Сложение и вычитание определяются формулами, а умножение вводится следующим образом. Задается «таблица умножения», т. е. указывается, чему равны всевозможные произведения где и - любые номера от 1 до n (всего таких произведений имеется, очевидно, ). Каждое произведение должно представлять собой  выражение вида, т. е. где - некоторые действительные числа.  Набор чисел и задает собой таблицу умножения (всего этих чисел должно быть числу для каждой комбинации). Например, в случае комплексных чисел таблица умножения состоит из единственного равенства.

В случае кватернионов таблица содержит девять равенств и может быть записана следующим образом:

ijk

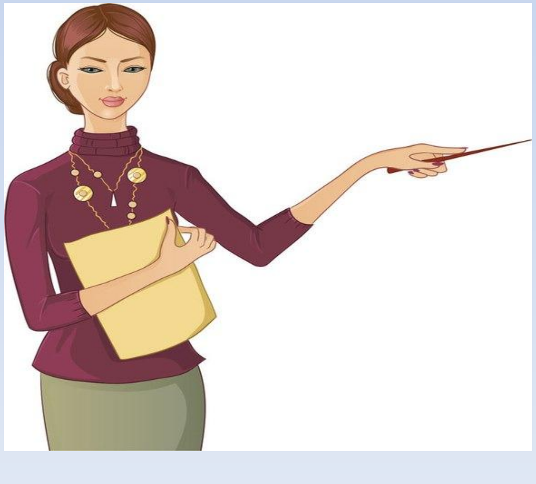
i-1k-j

j-k-1i

kj-i-1

Понятно, что каждая клетка заменяет одно из равенств таблицы умножения: например, после того как задана таблица умножения, мы определяем произведение по  обычному правилу умножения суммы на сумму (каждое слагаемое первой суммы умножаем на каждое слагаемое второй и результаты суммируем), причем произведения вида переписываем как и заменяем по формуле; затем приводим подобные члены. В итоге получается снова некоторое выражение.

Множество всех выражений , в котором операции сложения и умножения введены как указано выше, называется гиперкомплексной системой размерности, а сами выражения называются гиперкомплексными числами. Как следует из приведенного выше описания, гиперкомплексная система данной размерности полностью определяется своей таблицей умножения.



## Отметим некоторые свойства операции умножения, справедливые в любой гиперкомплексной системе:

1) Умножение действительного числа, рассматриваемого как гиперкомплексное число на произвольное число сводится к умножению всех коэффициентов на a: и В частности, где -- любое гиперкомплексное число.

2) Если и -- гиперкомплексные числа, то, где a и b -- произвольные действительные числа.

3) Справедливы оба варианта (левый и правый) распределительного закона: Свойства 1), 2), 3) очевидным образом следуют из самой процедуры умножения

# Свойства над гиперкомплексными числами

- 1. Для любых двух чисел однозначно определена их сумма.
- 2. Для любых двух чисел однозначно определено их произведение.
- 3. Существует число нуль со свойством; $a+0=a$ для любого а.
- 4. Для каждого числа а существует противоположное число х, удовлетворяющее равенству $a+x=0$
- 5. Сложение переместительно (коммутативно)
- $a+b=b+a$

- 6. Сложение обладает сочетательным (ассоциативным) свойством
- $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 7. Умножение переместительно
- $ab=ba$
- 8. Умножение сочетательно
- $(ab)*c=a*(bc)$
- 9. Умножение распределительно (дистрибутивно)
- $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$
- 10. Для каждого a и каждого $b \neq 0$ существует единственное число x, удовлетворяющее равенству $bx=a$.

# Применение гиперкомплексных чисел

- Применение гиперкомплексных  чисел в обработке цветных изображений

Данное применение связано с задачей выделения краев изображений, которая в свою очередь прямым образом пересекается с задачей повышения резкости цифровых изображений

- Вычисление градиента на основе стандартной матрицы Собела и гиперкомплексных чисел

Как известно, для того, чтобы вычислить проекции дискретного градиента цифрового изображения, достаточно свернуть последнее с матрицей градиента. В данном случае будет рассмотрена матрица, получившая название - градиентной матрицы Собела

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

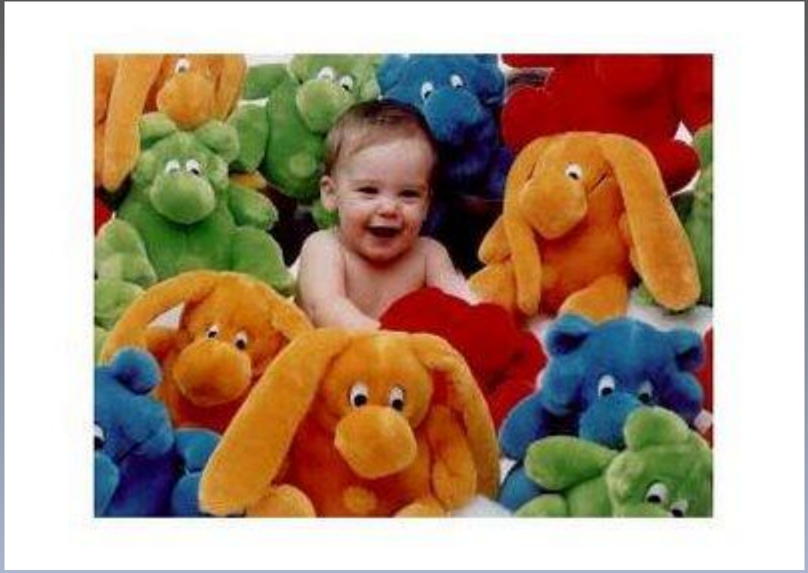


рис.1. Исходное изображение

рис.2. Изображение, полученное при использовании матриц Собела, при последовательном применении их к Red, Green и Blue каналам

рис.3. Результат сложения Red, Green и Blue каналов изображения, представленного на рис.2

Нужно учитывать то, что операции вычисления модуля и умножения являются отличными от тех, которые приводятся в пространстве действительного переменного. В качестве примера, приведем пару матриц, на основе которых происходило вычисление горизонтальных и вертикальных деталей соответственно (сверху вниз)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\varepsilon & -\varepsilon^2 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 & -\varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

- Результат действия этих матриц, при использовании второго выражения для градиента, дает три изображения в градациях серого. Три, потому что, каждое гиперкомплексное число имеет три модуля, а в градациях серого в силу самой операции вычисления модуля, т.к. в результате ее действия красная, зеленая и синяя компоненты изображения, полученного после действия гиперкомплексного градиента, складываются между собой. Таким образом, в результате действия гиперкомплексного градиента на изображение, пиксели которого суть гиперкомплексных чисел, получается то, что представлено на рис.4, рис.5 и рис.6.

рис.4. Гиперкомплексный градиент, вычисленный при использовании выражения для первого модуля гиперкомплексного числа

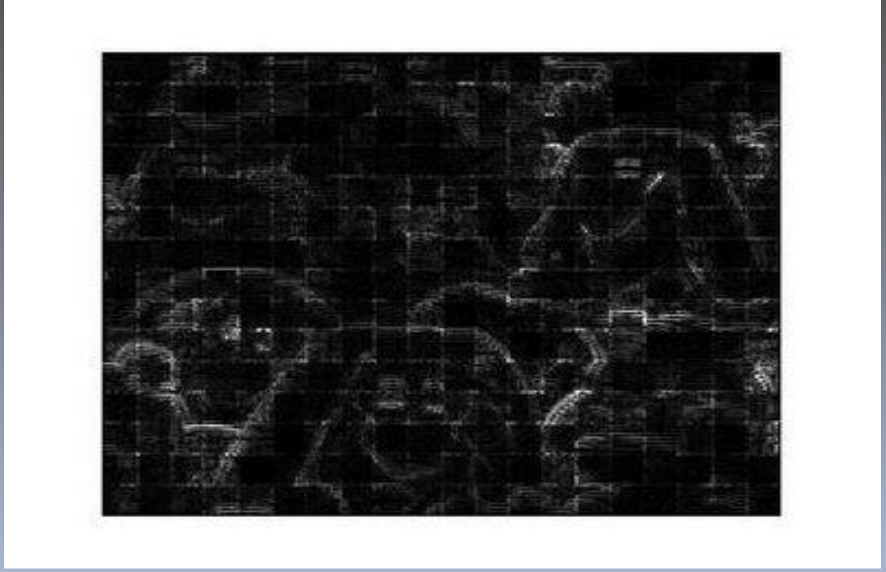


рис.5. Гиперкомплексный градиент, вычисленный при использовании выражения для второго модуля гиперкомплексного числа

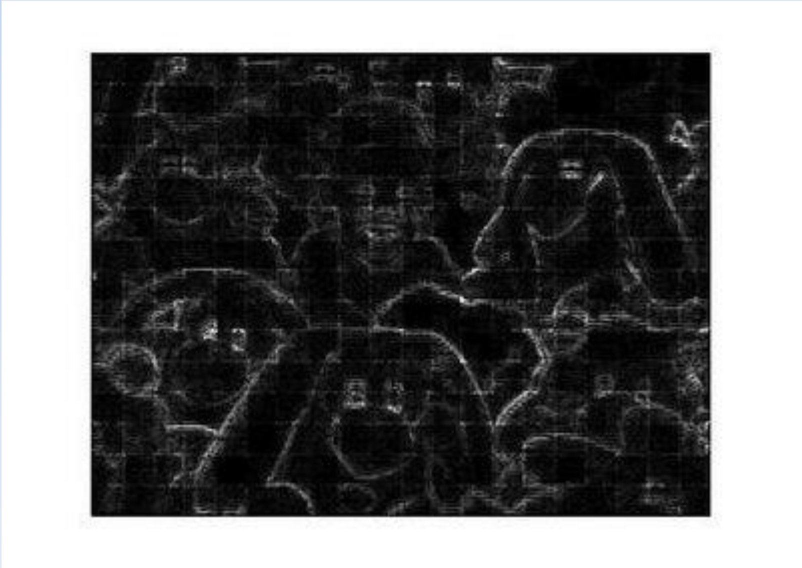


рис.6. Гиперкомплексный градиент, вычисленный при использовании выражения для третьего модуля гиперкомплексного числа

Как видно из полученных результатов, вычисленный гиперкомплексный градиент на рис.4 очень схож с рис.3 и несет в себе основную информацию о контурах изображения. На рис.5 и рис.6 так же видны основные контуры, но менее четко, однако, на них хорошо видны шумы, присутствующие на изображении, в частности артефакты облачности, характерные для формата JPEG, т.к. исходное изображение имеет этот формат.

На данный момент не совсем понятно, как находить цветной гиперкомплексный градиент. Однако, вероятнее всего, его можно вычислить за счет использования первого выражения для градиента, т.к. оно сохраняет аргумент изображения. Но для осуществления данной операции нужно знать, как правильно вычислять корень из гиперкомплексного числа.