

Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
Рубцовский аграрно-промышленный техникум

# Интеграл и его применение

Подготовила студентка группы ПК-16-2  
Фролова Виктория

# Определение

**Интеграл** — одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной.

Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых.

# Применение интеграла

## В физике

Работа силы ( $A = FScos\alpha$ ,  $cos\alpha \neq 1$ )

Если на частицу действует сила  $F$ , кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно

$$d(\mu v^2/2) = Fds$$

приращение кинетической энергии частицы за время  $dt$  равно скалярному произведению  $Fds$ , где  $ds$  – перемещение частицы за время  $dt$ . Величина  $dA = Fds$  называется работой, совершаемой силой  $F$ .

Пусть точка движется по оси  $Ox$  под действием силы, проекция которой на ось  $Ox$  есть функция  $f(x)$  ( $f$  – непрерывная функция). Под действием силы точка переместилась из точки  $S_1(a)$  в  $S_2(b)$ . Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков, одинаковой длины  $\Delta x = (b - a)/n$ . Работа силы будет равна сумме работ силы на полученных отрезках. Т.к.  $f(x)$  – непрерывна, то при малом  $[a; x_1]$  работа силы на этом отрезке равна  $f(a)(x_1 - a)$ .

Аналогично на втором отрезке  $f(x_1)(x_2 - x_1)$ , на  $n$ -ом отрезке —  $f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ . Следовательно работа на  $[a; b]$  равна:  $A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = ((b-a)/n)(f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$

## 2. В геометрии

Объём — количественная характеристика пространственного тела. За единицу измерения объёма принимают куб с ребром 1 мм (1 дм, 1 м и т.д.). Количество кубов единичного объёма размещённых в данном теле — объём тела. Аксиомы объёма:

А) Объём — это неотрицательная величина.

Б) Объём тела равен сумме объёмов тел, его составляющих.

1. Найдем формулу для вычисления объёма:

Выберем ось  $Ox$  по направлению расположения этого тела;

2. Определим границы расположения тела относительно  $Ox$ ; 3. введем вспомогательную функцию  $S(x)$  задающую следующее соответствие: каждому  $x$  из отрезка  $[a;b]$  поставим в соответствие площадь сечения данной фигуры плоскостью, проходящей через заданную точку  $x$  перпендикулярно оси  $Ox$ .

4. разобьем отрезок  $[a;b]$  на  $n$  равных частей и через каждую точку разбиения проведем плоскость перпендикулярную оси  $OX$ , при этом наше тело разобьется на части. По аксиоме  $V=V_1+V_2+\dots+V_n=\lim(S(x_1)Dx+S(x_2)Dx+\dots+S(x_n)Dx)$   $n \rightarrow \infty, Dx \rightarrow 0$ , а  $S_k \rightarrow S_{k+1}$ , а объем части, заключенной между двумя соседними плоскостями равен объему цилиндра  $V_{ц}=S_{осн}H$ . Имеем сумму произведений значений функций в точках разбиения на шаг разбиения, т.е. интегральную сумму. По определению определенного интеграла, предел этой суммы при  $n \rightarrow \infty$  называется интегралом  $\int_a^b S(x)dx$  а  $V= \int_a^b S(x)dx$ , где  $S(x)$  – сечение плоскости, проходящей через  $b$  выбранную точку перпендикулярно оси  $OX$ .