Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 1

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 1:

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, обозначаемое $f'(x_0)$, равное пределу отношения

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{при} \quad x \to x_0$$

если этот предел существует.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Определение 2:

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть предел отношения её приращения $\Delta f(x_0)$ к соответствующему приращению её аргумента Δx при $\Delta x \to 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначения:

Производную функции $y = f(x)$ принято обозначать так:

$$y'(x_0); \quad y'_x(x_0); \quad f'_x(x_0); \quad \frac{df(x_0)}{dx}; \quad \frac{dy(x_0)}{dx}.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Односторонние производные функции в точке

Правая производная:

Если функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки x_0, то её **правой производной** называется предел

$$f'(x_0+0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Левая производная:

Если функция $f(x)$ определена в некоторой левой полуокрестности точки x_0, то её **левой производной** называется предел

$$f'(x_0-0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Пример 1:

Найти производную функции $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin 5x}-1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

в точке $x_0 = 0.$

Пример 2:

Найти производную функции $f(x)=|x-1|$

в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Теорема:

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.

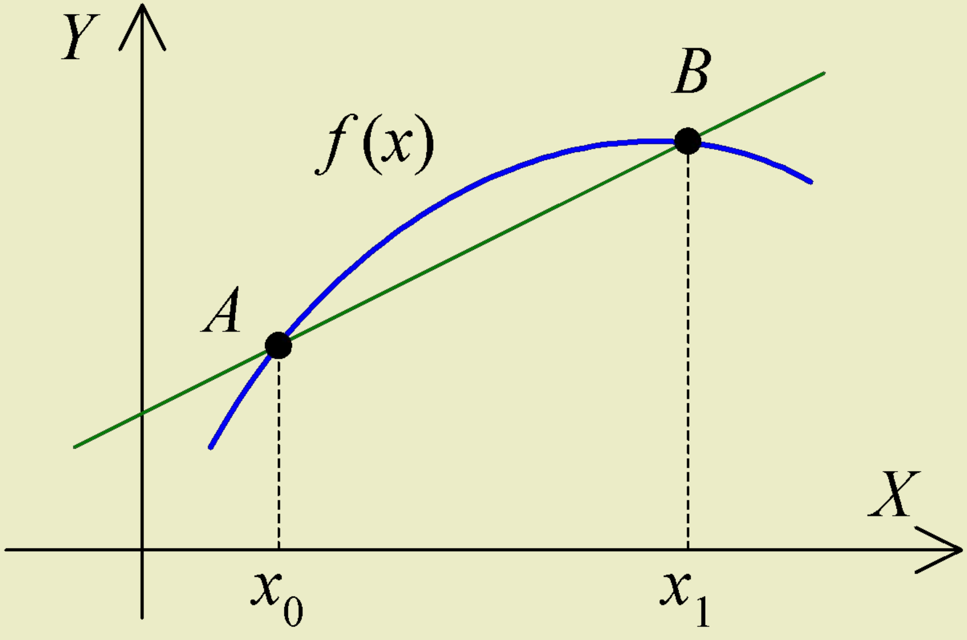
Обратное утверждение неверно.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0.

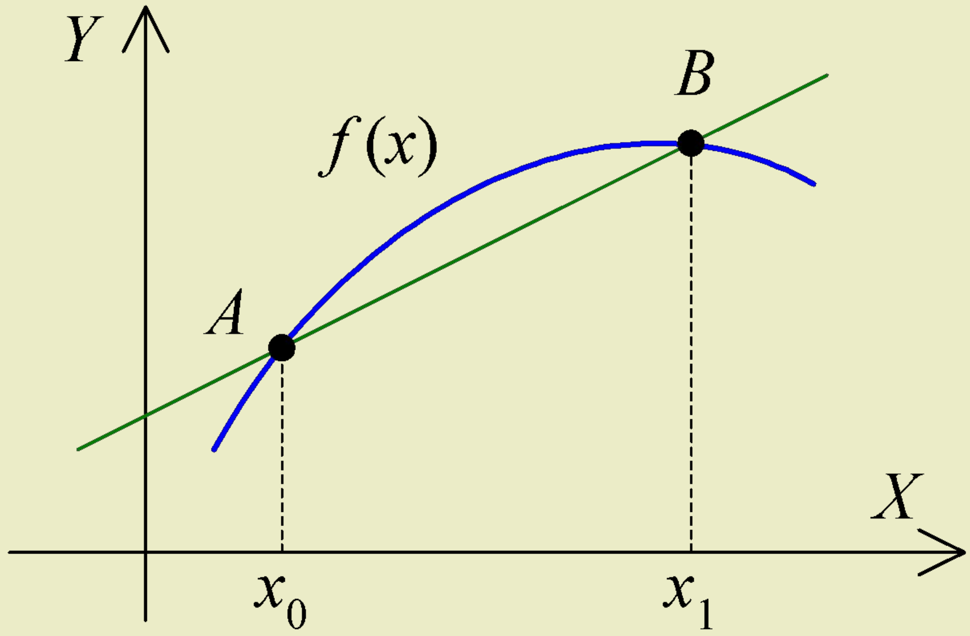
Рассмотрим две точки: $A(x_0, f(x_0))$ $B(x_1, f(x_1))$



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

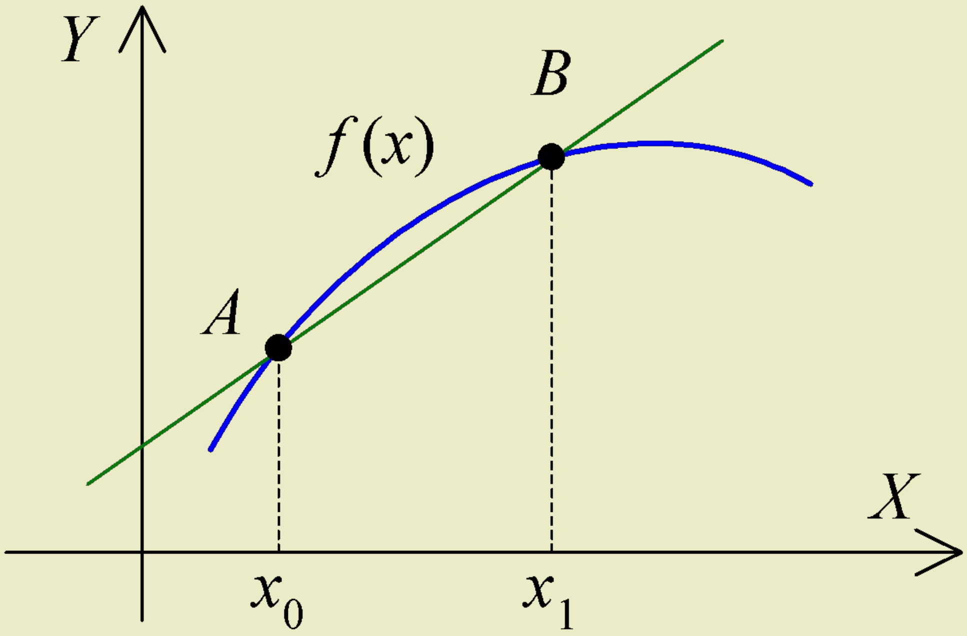
Приблизим точку B к точке A:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

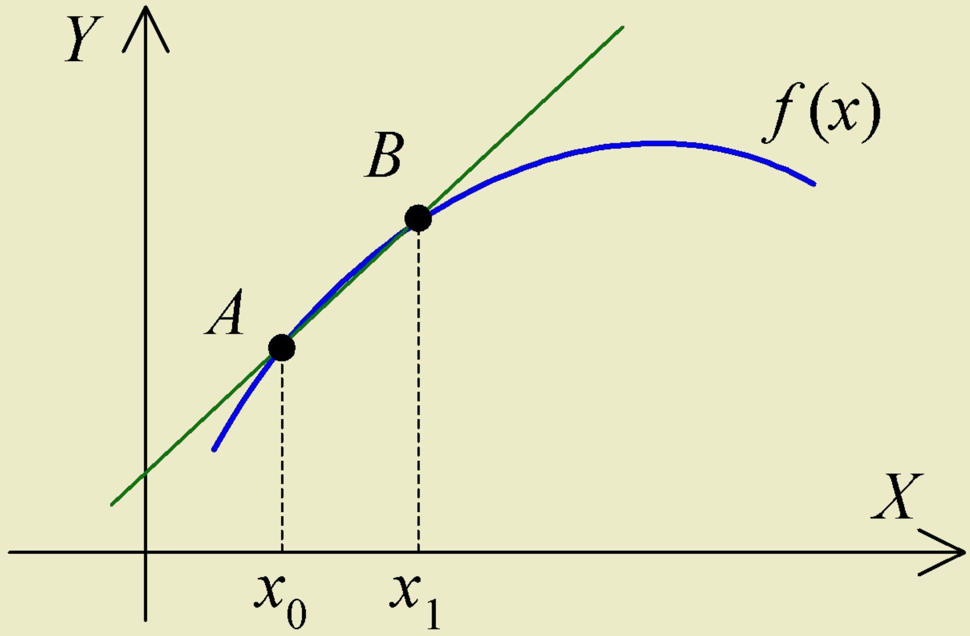
Приближим точку B к точке A:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

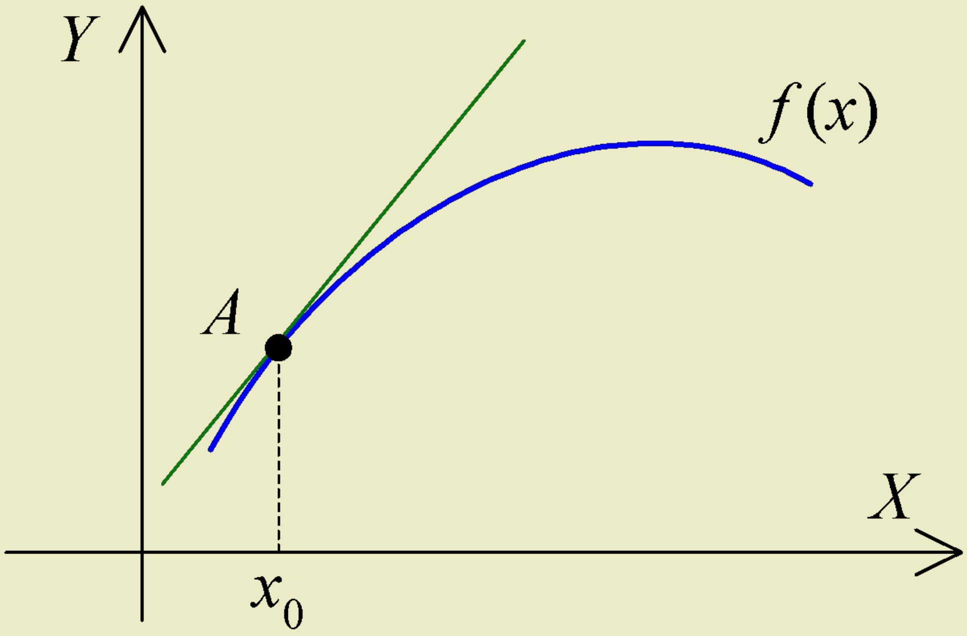
Приблизим точку B к точке A:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

Приблизим точку B к точке A:

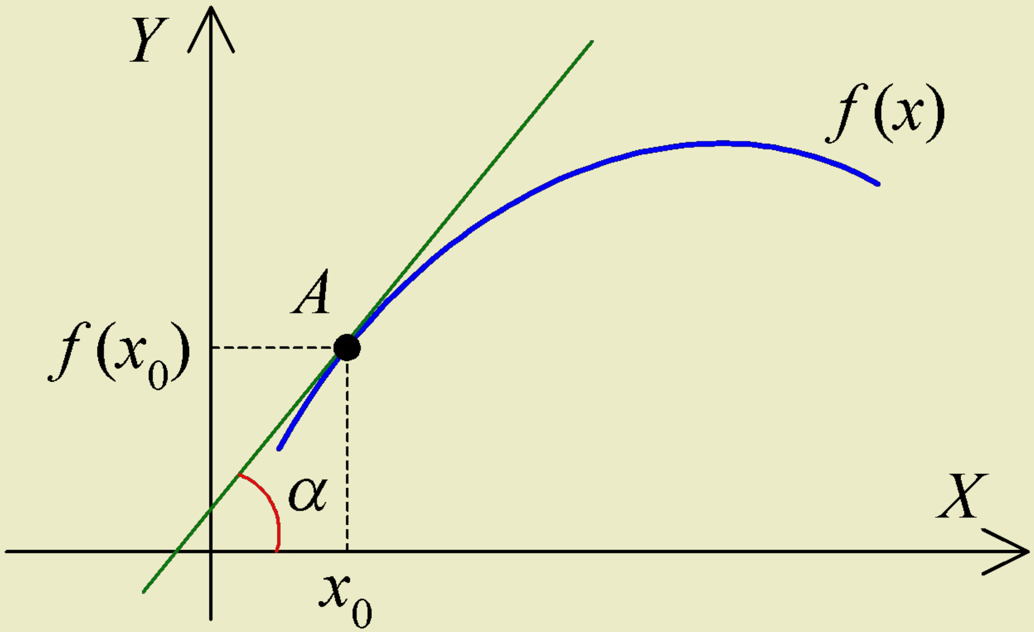


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Геометрический смысл производной функции в точке

Геометрический смысл производной функции в точке: **угловой коэффициент касательной** к графику функции, проведенной в точке касания:

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$$



Уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Уравнение нормали:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Физический смысл производной функции в точке

1. Пусть материальная точка M движется прямолинейно, и функция $s(t)$ есть пройденный ею путь за время t.

Пусть t_0 – момент начала движения.

Тогда отношение $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ – **средняя скорость** движения.

Предел $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=s'(t_0)$ – **мгновенная скорость** точки в момент t_0.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Физический смысл производной функции в точке

2. Пусть $q\,(t_0)$ – количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в момент времени t_0.

Пусть Δt – промежуток времени.

Тогда $\Delta q = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$.

Отношение $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ – **средняя сила тока** за время Δt.

Предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t_0)$ – **мгновенный ток**.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Теорема 1: Основные формулы дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производную в точке $x = x_0$. Тогда функции

$$c \cdot u, \quad u + v, \quad u \cdot v, \quad {}^{u}\!/\!{}_{v}$$

тоже имеют производные в точке $x = x_0$, вычисляемые по формулам:

1) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

константу можно выносить за знак производной

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Теорема 1: Основные формулы дифференцирования

2) формула производной суммы

$$(u+v)' = u' + v'$$

3) формула производной произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4) формула производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (v(x) \neq 0)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции в точке

Теорема 2: Дифференцирование сложной функции

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, вычисляемую по формуле

$$f'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0),\ y = g(x)$$

или $$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'_g \cdot g'_x$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производная функции на отрезке

Если функция $f(x)$ имеет производную **в любой точке** некоторого интервала $[a, b]$, то её производная на этом интервале может быть выражена **в виде некоторой функции** $g(x) = f'(x)$, которая находится по основным формулам дифференцирования (теорема 1) и правилу нахождения производной сложной функции (теорема 2).

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

1. Постоянная функция

$f(x) = c$, где c – константа.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

2. Показательная функция

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

Отсюда заключаем: $(e^x)' = e^x$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

3. Степенная функция

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

$$(x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} =$$

$$= x^{\alpha} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем: $\left(x^{1/2}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

4. Логарифмическая функция

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Отсюда следует, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$ Кроме того, $\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

5. Тригонометрические функции

Синус: $\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left({\Delta x}/{2}\right)\cos\left(x + {\Delta x}/{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + {\Delta x}/{2}\right) = \cos x$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

5. Тригонометрические функции

Косинус: $\cos x$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x + {}^{\Delta x}\!/_{2}\right)\sin\left({}^{\Delta x}\!/_{2}\right)}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + {}^{\Delta x}\!/_{2}\right)}{2} = -\sin x$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

5. Тригонометрические функции

Тангенс: $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Производная находится по формуле производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Производные элементарных функций

5. Тригонометрические функции

Тангенс: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Производная находится по формуле производной частного:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org