Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 6

СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Сравнение функций

Определение 1:

Пусть в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 определены три функции $f(x)$, $g(x)$, $\alpha(x)$.

Если выполняется равенство $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой функцией по сравнению с** $g(x)$ при $x\to x_0$.

Это записывают так: $f(x)=o\big(g(x)\big),\quad x\to x_0.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Сравнение функций

Если $g(x) \neq 0$ для $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o\big(g(x)\big)}{g(x)} = 0$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Сравнение функций

Определение 2:

Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x \to x_0$ и при этом $f(x) = o\big(g(x)\big)$, то говорят, что $g(x)$ есть **бесконечно большая функция более высокого порядка** чем $f(x)$ при $x \to x_0$.

Определение 3:

Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и при этом $f(x) = o\big(g(x)\big)$, то говорят, что $f(x)$ есть **бесконечно малая функция более высокого порядка** чем $g(x)$ при $x \to x_0$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Сравнение функций

Пример 1:

Функции $f(x)=x^3$ и $g(x)=x^5$

$x^3=o(x^5)$ при $x\to+\infty$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Сравнение функций

Пример 2:

Функции $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ и $g(x) = x$

$f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to 0$

так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot \sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x \cdot \sin x) = 0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные функции

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые в некоторой окрестности точки x_0, **эквивалентны** или **равны асимптотически** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Этот факт обозначают следующим образом:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные функции

Пример:

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Следовательно,

$$\sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные функции

Теорема 1:

Для того чтобы две функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

либо

$$g(x) = f(x) + o\big(f(x)\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства эквивалентных функций

1. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$,
то $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.

2. Если при $x \to x_0$ $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim h(x)$,
то $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$.

3. Если $f_1(x) \sim g_1(x)$ и $f_2(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$,
то $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ при $x \to x_0$.

4. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$,
то $f(x) - g(x) = o\big(f(x)\big)$ и $f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big)$
при $x \to x_0$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные функции

Теорема 2:

Если функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, то

1) $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot h(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot h(x)\right);$$

2) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

Если существуют пределы левых частей этих равенств, то существуют равные им пределы правых частей.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)-$ б.м.ф. при $x \to x_0$.

Тогда:

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

2) $\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

3) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

4) $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

5) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x) -$ б.м.ф. при $x \to x_0$.

Тогда:

6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$

7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$ при $x \to x_0$

8) $\left(1 + \alpha(x)\right)^{\beta} - 1 \sim \beta \cdot \alpha(x)$ при $x \to x_0$, $\beta \in \mathbf{R}$

9) $1 - \cos\left(\alpha(x)\right) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$ при $x \to x_0$

10) $\ln\cos\left(\alpha(x)\right) \sim -\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$ при $x \to x_0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(\cos x-1)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\left(1-e^{\sin x}\right)}{\sqrt[4]{1+2x^2-x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}(-\sin x)}{\dfrac{1}{4}(2x^2-x^3)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(2-x)}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2-x)}=-1$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 3:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos(2x)}{\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} y=x-\pi \\ x=y+\pi \\ y\to 0,\ x\to\pi \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\cos(2y+2\pi)\right)}{\left(1-\frac{\pi}{y+\pi}\right)^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\cos(2y)}{\left(\frac{y}{y+\pi}\right)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{(2y)^2}{2}}{\frac{y^2}{(y+\pi)^2}}=-\lim_{y\to 0}\frac{4y^2(y+\pi)^2}{2y^2}=$$

$$=-2\lim_{y\to 0}(y+\pi)^2=-2\pi^2$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org