Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 2

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЁ ПРЕДЕЛ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Числовые последовательности

Определение:

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ поставлено в соответствие действительное число x_n.

Тогда множество пронумерованных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**, или **ч.п.**, и обозначается (x_n).

Примеры:

$$(2n) = 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots \qquad \left((-1)^n\right) = -1, \quad +1, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots \qquad \left(\frac{n^2+2}{n+1}\right) = \frac{3}{2}, \quad \frac{6}{3}, \quad \frac{11}{4}, \quad \frac{18}{5}, \quad \ldots$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Числовые последовательности

Определения:

Отдельные числа x_i называются **членами числовой последовательности**.

Выражение x_n называется **общим членом числовой последовательности**.

Если из некоторого бесконечного подмножества членов числовой последовательности образована новая последовательность, в которой порядок следования членов такой же, как и в исходной последовательности, то она называется **подпоследовательностью**.

Пример: $\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{16}, \ \ldots$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Постоянные и ограниченные ч.п.

Определение:

Числовая последовательность (x_n) называется **постоянной**, если все её члены равны одному и тому же числу c:

$$x_n = c, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Определение:

Числовая последовательность (x_n) называется **ограниченной**, если существует такое число $c > 0$ такое, что

$$|x_n| \le c, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Примеры:

$\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1, \quad \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{1}{4}, \quad \ldots$ – ограничена, т.к. $0 < \dfrac{1}{n} \le 1$

$(\operatorname{arctg} n) = \dfrac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 2, \operatorname{arctg} 3, \ldots$ – ограничена, т.к. $0 < \operatorname{arctg} n < \dfrac{\pi}{2}$

Аўтар: І. В. Дайняк, к.т.н., дацэнт
Кафедра вышэйшай матэматыкі БДУІР

Манатонная лікавая паслядоўнасць

Азначэнне 1:

Лікавая паслядоўнасць (x_n) **не змяншаецца**, калі

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \ , \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Азначэнне 2:

Лікавая паслядоўнасць (x_n) **строга ўзрастае**, калі

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1}, \ldots \ , \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Азначэнне 3:

Лікавая паслядоўнасць (x_n) **не ўзрастае**, калі

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \ , \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Азначэнне 4:

Лікавая паслядоўнасць (x_n) **строга не змяншаецца**, калі

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1}, \ldots \ , \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел числовой последовательности

Определение:

Число a называется **пределом числовой последовательности** (x_n) при $n \to \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство $|\, x_n - a \,| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Также пишут: $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Числовая последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Числовая последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел числовой последовательности

Пример 1:

Пределом числовой последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$ является число 0, так как

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

для любого номера N, большего целой части числа $1/\varepsilon$.

Пример 2:

Числовая последовательность $\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)$ расходящаяся,

так как $\frac{3}{2}>\frac{6}{3}>\frac{11}{4}>\frac{18}{5}>\ldots$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел числовой последовательности

Рассмотрим неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Раскрывая его, получим:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Значит, число a является пределом числовой последовательности (x_n), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки $x = a$.

Иначе говоря, числовая последовательность (x_n), сходится к числу a, если вне любой ε-окрестности точки a имеется конечное число членов этой последовательности.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел числовой последовательности

Определение:

Число b не является пределом числовой последовательности (x_n), если существует число $\varepsilon^* > 0$ такое, что для любого натурального числа N найдётся такое натуральное число $n^* > N$, что

$$|x_{n^*} - b| \geq \varepsilon^*.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Монотонная числовая последовательность

Теорема:
(*критерий сходимости монотонной последовательности*)

Если монотонная числовая последовательность (x_n) ограничена, то она сходится.

При этом:

1) если (x_n) неубывающая ч.п., то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n \{x_n\}$.

2) если (x_n) невозрастающая ч.п., то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n \{x_n\}$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Бесконечно большие числовые последовательности

Определение:

Числовая последовательность (x_n) называется **бесконечно большой числовой последовательностью**, или **б.б.ч.п.**, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует такой номер $N = N(M)$, начиная с которого для всех n выполнено неравенство:

$$|x_n| > M.$$

Случай 1. Если $M > 0$ и $x_n > M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

Случай 2. Если $M > 0$ и $x_n < -M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty.$

Примеры: (n^2); $\left(\dfrac{n^2+2}{n+1}\right)$; (q^n) при $q > 1.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Бесконечно малые числовые последовательности

Определение:

Числовая последовательность (α_n) называется **бесконечно малой числовой последовательностью**, или **б.м.ч.п.**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

или для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(M)$, начиная с которого для всех n выполнено неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Примеры: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$; (q^n) при $|q| < 1$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства бесконечно малых ч.п.

1. Сумма конечного числа б.м.ч.п. есть б.м.ч.п.

2. Произведение конечного числа б.м.ч.п. есть б.м.ч.п.

3. Произведение ограниченной числовой последовательности на б.м.ч.п. есть б.м.ч.п.

4. Связь числовой последовательности, её предела и б.м.ч.п.

Числовая последовательность (x_n) имеет своим пределом число a тогда и только, когда её можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n$$

где α_n – бесконечно малая числовая последовательность

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства сходящихся числовых последовательностей

1. Единственность предела

Сходящаяся числовая последовательность имеет единственный предел.

2. Предел подпоследовательности

Любая подпоследовательность сходящейся числовой последовательности сходится к такому же пределу.

Следствие:

Если из числовой последовательности можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, то исходная числовая последовательность предела не имеет.

3. Сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства сходящихся числовых последовательностей

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ то, начиная с некоторого номера N, все члены числовой последовательности имеют знак, совпадающий со знаком числа a.

5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство

$$x_n < y_n$$

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства сходящихся числовых последовательностей

7. Теорема о зажатой числовой последовательности

Пусть три числовых последовательности (x_n), (y_n), (z_n) удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n \le z_n$, причём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Свойства 6 и 7 позволяют переходить к пределу в неравенствах.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства сходящихся числовых последовательностей

8. Арифметические операции над пределами

Если числовые последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

то:

1) $$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$$

2) $$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot a, \quad c = \mathrm{const}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

5) $$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Нахождение пределов числовых последовательностей

Пример 1:

Найти предел числовой последовательности

$$x_n = \frac{a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0}{b_l \cdot n^l + b_{l-1} \cdot n^{l-1} + \ldots + b_2 \cdot n^2 + b_1 \cdot n + b_0}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

«Замечательные» пределы

1: $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \forall a > 0$$

2: $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

3: $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2{,}718281828459$$

Следствие:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e, \quad f(n) \to \infty \quad при \quad n \to \infty$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Нахождение пределов числовых последовательностей

Пример 2:

Найти предел числовой последовательности

$$x_n = \sqrt{n^2+3}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Нахождение пределов числовых последовательностей

Пример 3:

Найти предел числовой последовательности

$$x_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5} \right)^{2-7n}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org