Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 1

ВВОДНАЯ ЛЕКЦИЯ: ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Множества

Определение:

Множество – совокупность объектов (элементов), объединённых по некоторому общему признаку, причём все элементы можно отличить друг от друга и от объектов, не входящих в эту совокупность.

Примеры:

– множество автомобилей на улице;
– множество букв алфавита;
– множество чисел.

Множество может быть **пустым**, то есть не содержать никаких элементов.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Множества

Обозначение множеств: A, B, C

Пустое множество: $\varnothing$

Обозначение элементов множеств: a, b, c

Чтобы задать множество, необходимо перечислить его элементы или указать общее свойство объектов, принадлежащих множеству.

Основное понятие:

Принадлежность – является ли некоторый объект элементом множества.

Элемент a принадлежит множеству A: $a \in A$

Элемент b не принадлежит множеству A: $b \notin A$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Операции над множествами

Сравнение множеств:

Множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множества можно сравнивать только на «равно» или «неравно», сравнение на «больше» или «меньше» недопустимо.

Объединение множеств:

Объединением множеств A и B называется такое множество $A \cup B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Операции над множествами

Пересечение множеств:

Пересечением множеств A и B называется такое множество $A \cap B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих обоим множествам A и B одновременно.

Вычитание множеств:

Разностью множеств A и B называется такое множество $A \setminus B$, которое состоит из только из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Операции над множествами

Подмножество:

Пусть E – некоторое основное множество.

Если любой элемент множества A принадлежит множеству E, то множество A называется **подмножеством** $\boldsymbol{E}$.

Обозначается: $A \subset E$

Читается: множество A содержится во множестве E,
или множество E содержит в себе множество A.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Действительные числа

Определение:

Под **действительным числом** будем понимать такое число, которое мы можем записать и сопоставить некоторому реальному объекту или величине.

Множество действительных чисел обозначается **R**.

Пусть задана **числовая ось** – некоторая прямая, на которой выбраны начало (точка отсчёта), масштаб и направление.

Тогда каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой оси, и наоборот, каждой точке на числовой оси соответствует единственное действительное число.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Действительные числа

Свойство упорядоченности:

Если a и b – произвольные действительные числа, то:

либо $a = \mathrm{b}$,
либо $a > b$,
либо $a < b$.

Точки, изображающие действительные числа, располагаются на числовой оси в порядке возрастания:

если $a > b$, то точка a располагается правее точки b.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Модуль действительного числа

Определение:

Модулем или **абсолютной величиной** действительного числа называется неотрицательное число, определяемое так:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следует, что $-|x| \leq x \leq |x|$.

Пусть a и b – произвольные действительные числа. Тогда:

1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

2) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$

4) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Окрестность точки

Определение 1:

Окрестностью точки $x = a$ радиусом $\varepsilon > 0$ (или **ε-окрестностью**) называется множество действительных чисел $U_{\varepsilon}(a)$, удалённых от точки a на расстояние, меньшее ε.

То есть, $U_{\varepsilon}(a) = \left\{ \forall x \in \mathbf{R}, \, |x - a| < \varepsilon \right\}$

Определение 2:

Проколотой ε-окрестностью точки $x = a$ называется окрестность $U_{\varepsilon}(a)$, из которой исключена точка a.

Обозначается: $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a)$

Действительные числа обладают свойством **отделимости**: если a и b – два различных действительных числа, то их всегда можно отделить друг от друга непересекающимися окрестностями.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Бесконечность

Множество действительных чисел может быть дополнено двумя элементами:

$-\infty$ – **минус бесконечность**;

$+\infty$ – **плюс бесконечность**.

При этом по определению выполняются соотношения:

1) $-\infty < x < +\infty; \quad x + \infty = +\infty; \quad x - \infty = -\infty; \quad \forall x \in \mathbf{R}$

2) $x \cdot (+\infty) = +\infty; \quad x \cdot (-\infty) = -\infty; \quad \forall x > 0$

3) $x \cdot (+\infty) = -\infty; \quad x \cdot (-\infty) = +\infty; \quad \forall x < 0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Бесконечность

Множество действительных чисел может быть дополнено двумя элементами:

$-\infty$ – **минус бесконечность**;

$+\infty$ – **плюс бесконечность**.

При этом также выполняются соотношения:

4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty; \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$

5) $(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

6) $(+\infty)\cdot(-\infty)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

Операции $\boxed{(+\infty)+(-\infty), \quad \dfrac{+\infty}{+\infty}, \quad \dfrac{-\infty}{-\infty}}$ не определены.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Числовые подмножества

Натуральные числа:

Натуральными называются числа, употребляемые для счёта.

Множество натуральных чисел обозначается $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \,\}$$

Целые числа:

Если к множеству натуральных чисел добавить противоположные по знаку числа и число «нуль», то получится множество **целых чисел**.

Множество целых чисел обозначается $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z} = \{\, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \,\}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Числовые множества

Рациональные числа:

Рациональными называются числа, которые могут быть представлены в виде $r = \dfrac{m}{n}$

где m – целое число, а n – натуральное число.

Множество рациональных чисел обозначается $\mathbf{Q}$.

Иррациональные числа:

Дробные числа, которые не могут быть представлены в виде $r = \dfrac{m}{n}$, называются **иррациональными**.

Множество иррациональных чисел обозначается $\mathbf{J}$.

Примеры: $\pi = 3{,}141592654\ldots$; $e = 2{,}718281828459\ldots$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Математические символы: Кванторы

Квантор существования:

Обозначение: $\exists$

Значение: «существует», «найдётся».

Квантор всеобщности:

Обозначение: $\forall$

Значение: «всякий», «каждый», «любой».

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Высказывания

Высказывание – повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Если из истинности высказывания A следует истинность высказывания B, то этот факт записывают так: $A \Rightarrow B$

Читается так:
1) из A следует B;
2) A – достаточное условие для B;
3) B – необходимое условие для A.

Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то говорят, что высказывания A и B равносильны, или эквивалентны. Другое обозначение: $A \Leftrightarrow B$

Читается так:
1) A необходимо и достаточно для B;
2) A тогда и только тогда, когда B.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Аксиомы и теоремы

Аксиома – математическое утверждение, истинность которого принимается без доказательств.

Теорема – математическое утверждение, истинность которого установлена путём доказательства.

Теорема может быть обозначена как $A \Rightarrow B$,
где A – посылка, B – заключение.

Доказательство теоремы:

Построение цепочки следствий

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B,$$

каждое из которых является либо аксиомой, либо уже доказанным утверждением.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org