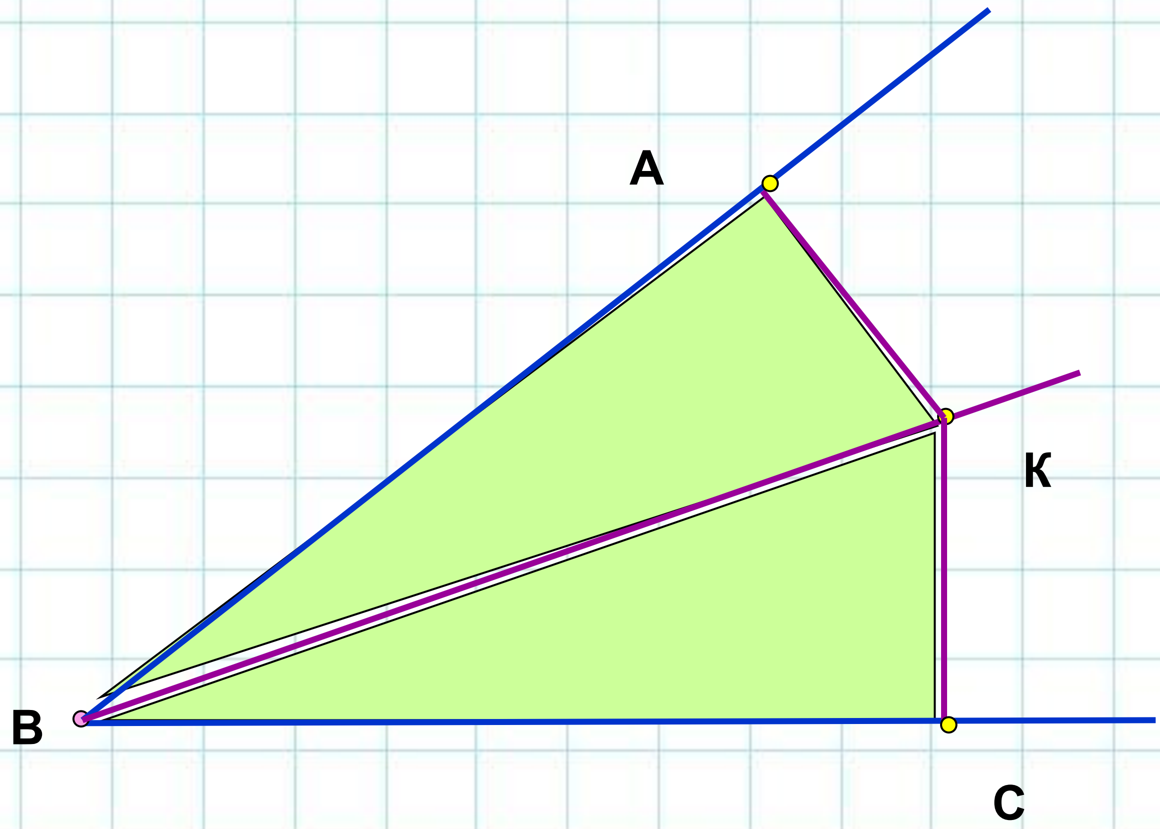
Геометричні місця точок

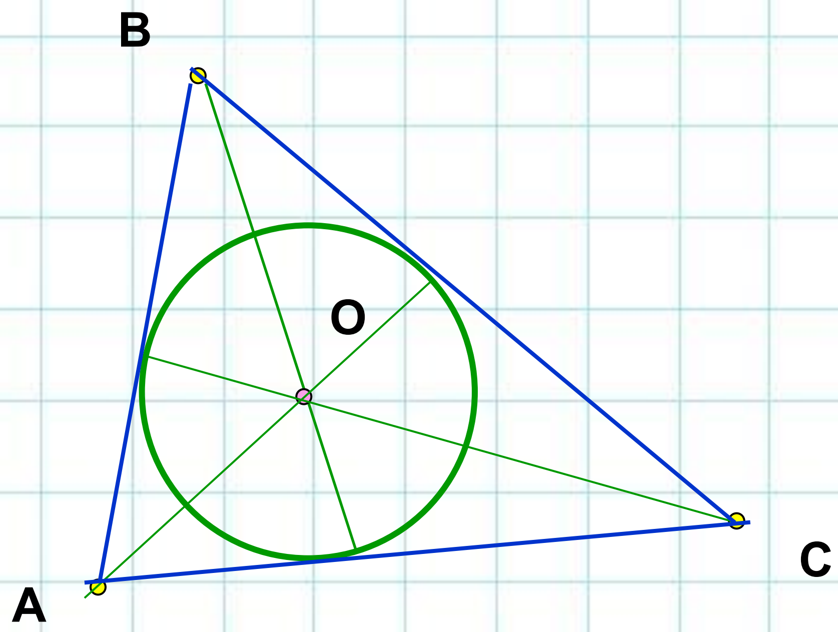
Властивість точки, рівновіддаленої від сторін многокутника

Творчий проект Новоренської Мар’яни

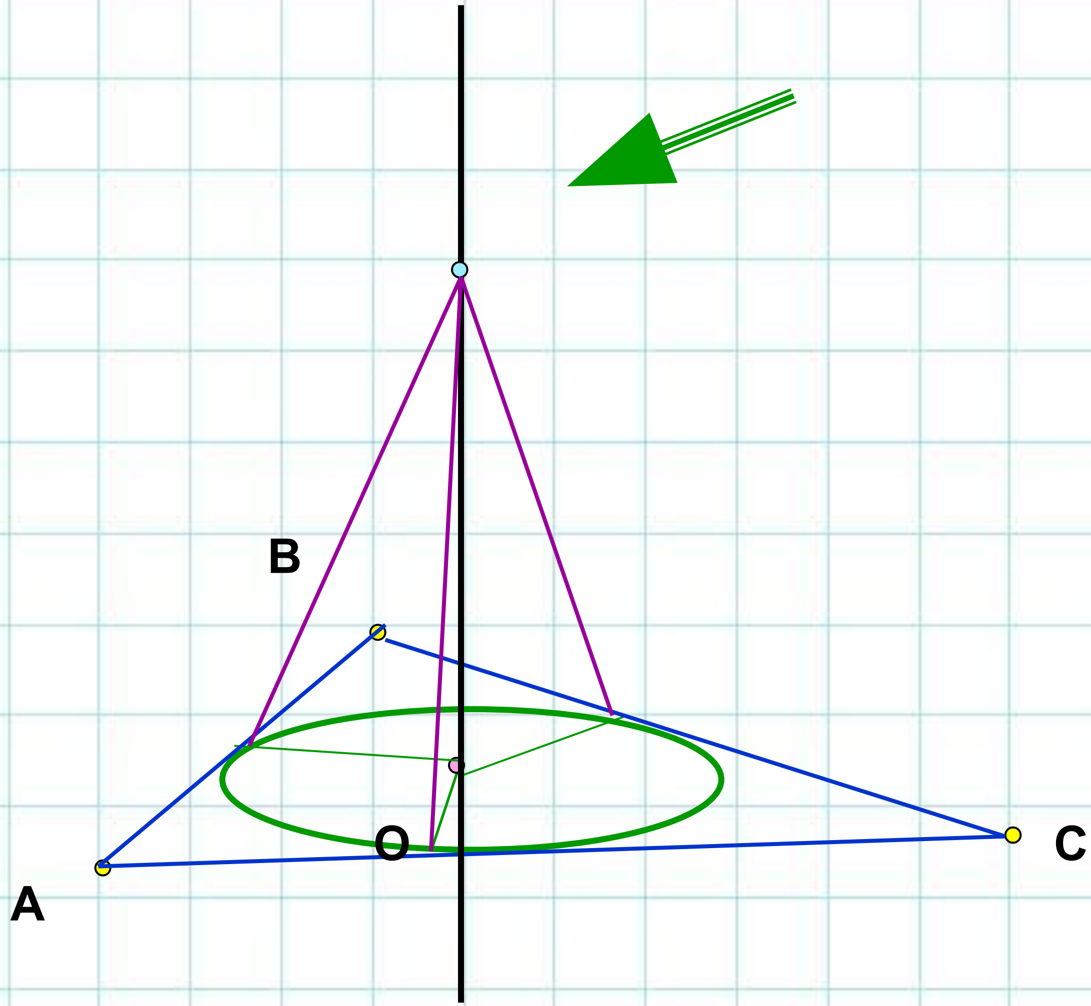
Геометричне місце точок площини, що лежать усередині кута й рівновіддалені від його сторін, є бісектриса цього кута



Геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від сторін трикутника АВС, є точка О – точка перетину бісектрис цього трикутника, яка є центром вписаного в трикутник кола.



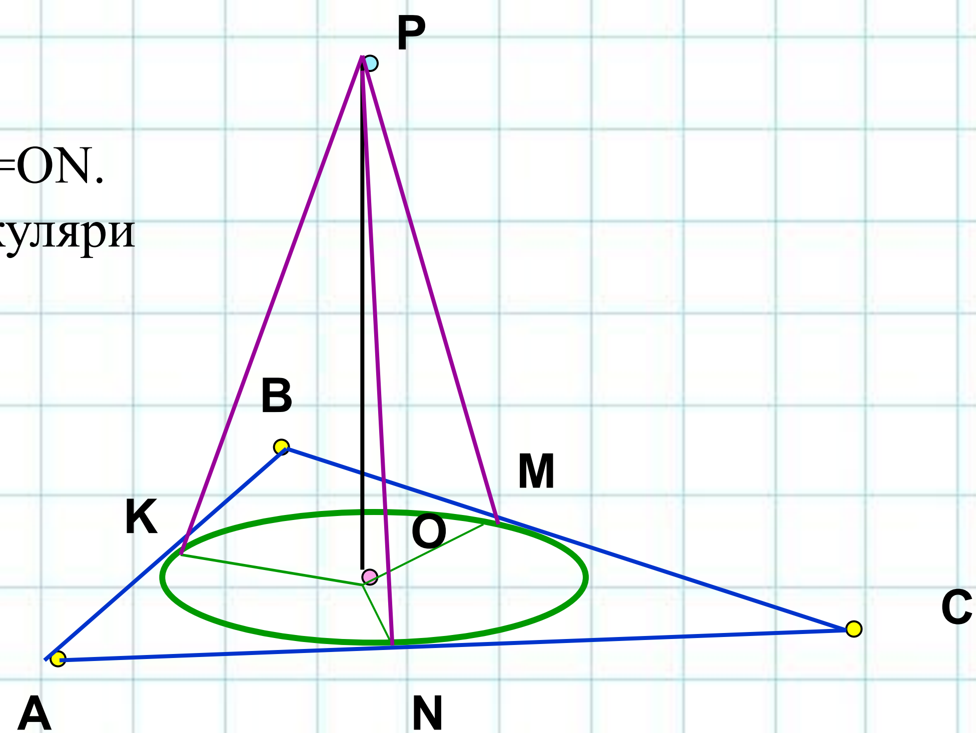
Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від сторін трикутника, є пряма, яка проходить через точку О – центр кола, вписаного в цей трикутник, перпендикулярно до площини заданого трикутника.



Опорна задача (про точку, рівновіддалену від усіх сторін многокутника) Якщо точка поза площиною многокутника рівновіддалена від усіх його сторін, то основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини многокутника, є центр кола, вписаного в многокутник.

Опустимо з точки P перпендикуляр PO до площини ABC.
Проведемо перпендикуляри PK, PM і PN до сторін AB, BC і AC відповідно.

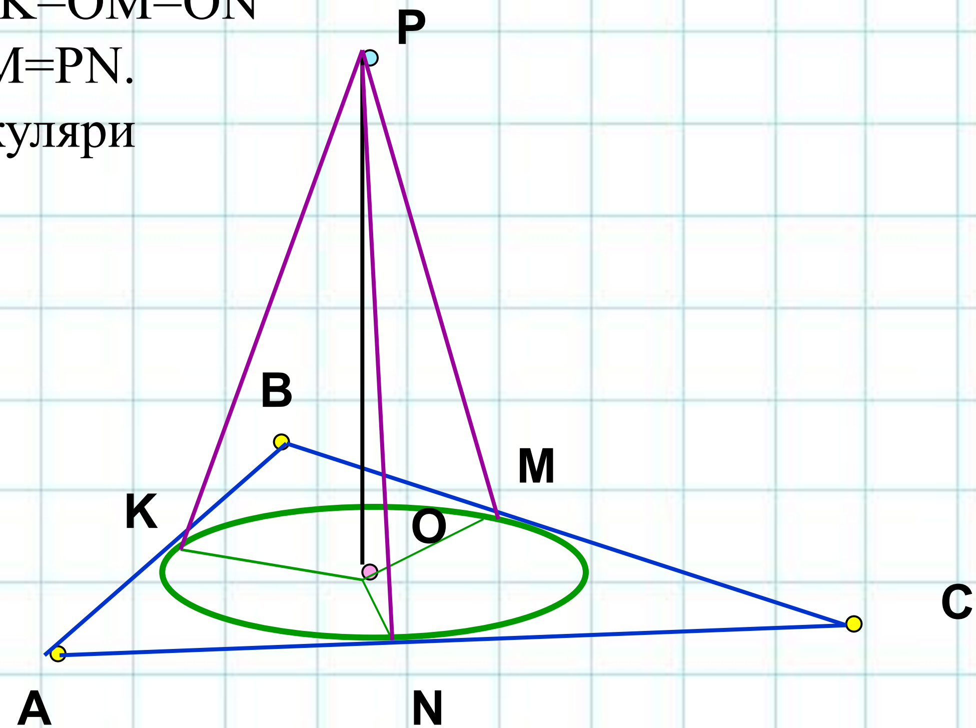
За умовою PK=PM=PN.
Відрізки OK, OM, ON проекції рівних похилих, тому OK=OM=ON.
За теоремою про три перпендикуляри ці проекції перпендикулярні до сторін : точка O площини ABC рівновіддалена від сторін трикутника (многокутника), тобто є центром вписаного у нього кола, що й треба було довести



Обернена задача Якщо через центр кола, вписаного в многокутник, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то точки даної прямої рівновіддалені від усіх сторін многокутника.

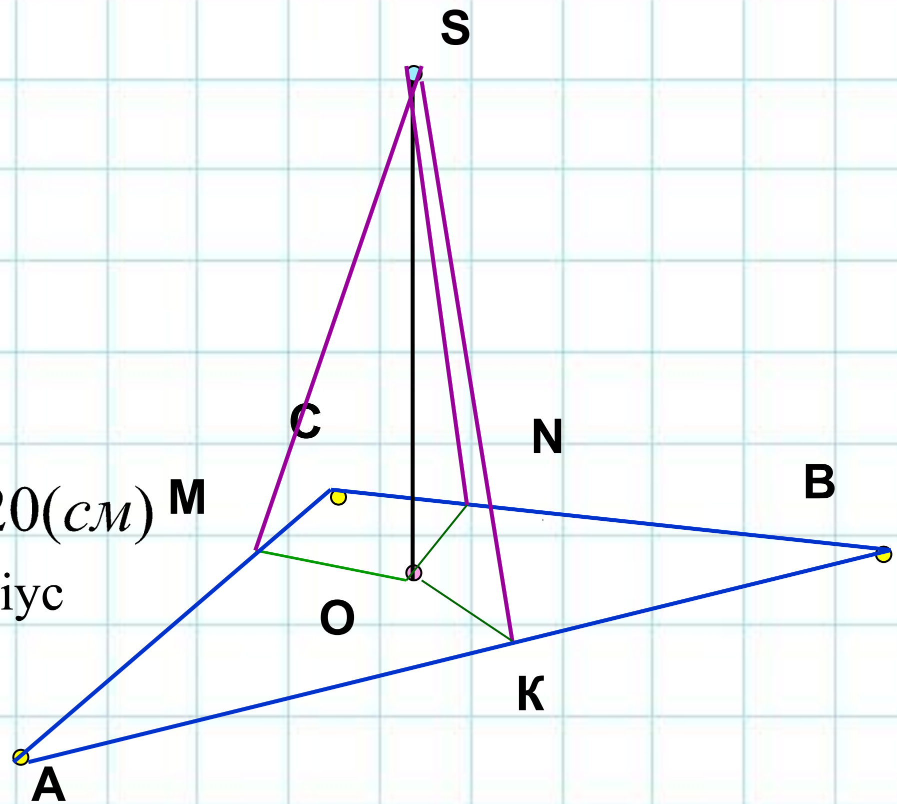
Проведемо через точку O перпендикуляр PO до площини ABC.
Проведемо перпендикуляри OK, OM іON до сторін AB, BC і AC відповідно.

За умовою рівності проекцій OK=OM=ON
Отримаємо рівні похилі: PK=PM=PN.
За теоремою про три перпендикуляри ці похилі перпендикулярні до сторін : будь-яка точка PO рівновіддалена від сторін трикутника (многокутника), що й треба було довести



Задача 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16см. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трикутника, розміщена на відстані 3 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до сторін трикутника.

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$, O – центр вписаного кола,
$SO \perp (ABC)$, AC = 12 см, BC = 16 см,
SM=SK=SN, SO=3 см
Знайти: SM, SK, SN



Розв'язання

Перпендикуляр SO до площини ABC проектується в центр вписаного кола.
З ΔABC за теоремою Піфагора маємо

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20(см)$$

Для прямокутного трикутника ABC радіус вписаного кола можна обчислити за формулою

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{12+16-20}{2}=4(см)$$

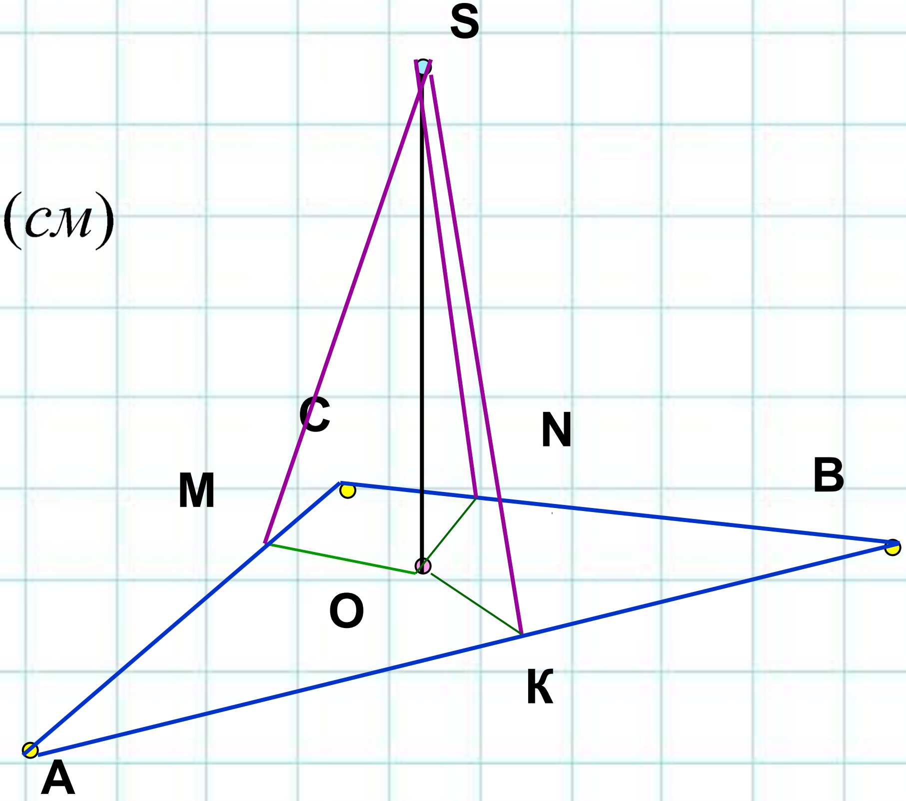
Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$, O – центр вписаного кола,
SO $\perp$ (ABC), AC = 12 см, BC = 16 см,
SM=SK=SN, SO=3 см
Знайти: SM, SK, SN

Розв'язання (продовження)

З ΔOKS за теоремою Піфагора маємо

$$SK=\sqrt{SO^2+KO^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5(см)$$

SK=SN=SM= 5 см



Задача 2. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно 48 см і 40 см. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 20 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

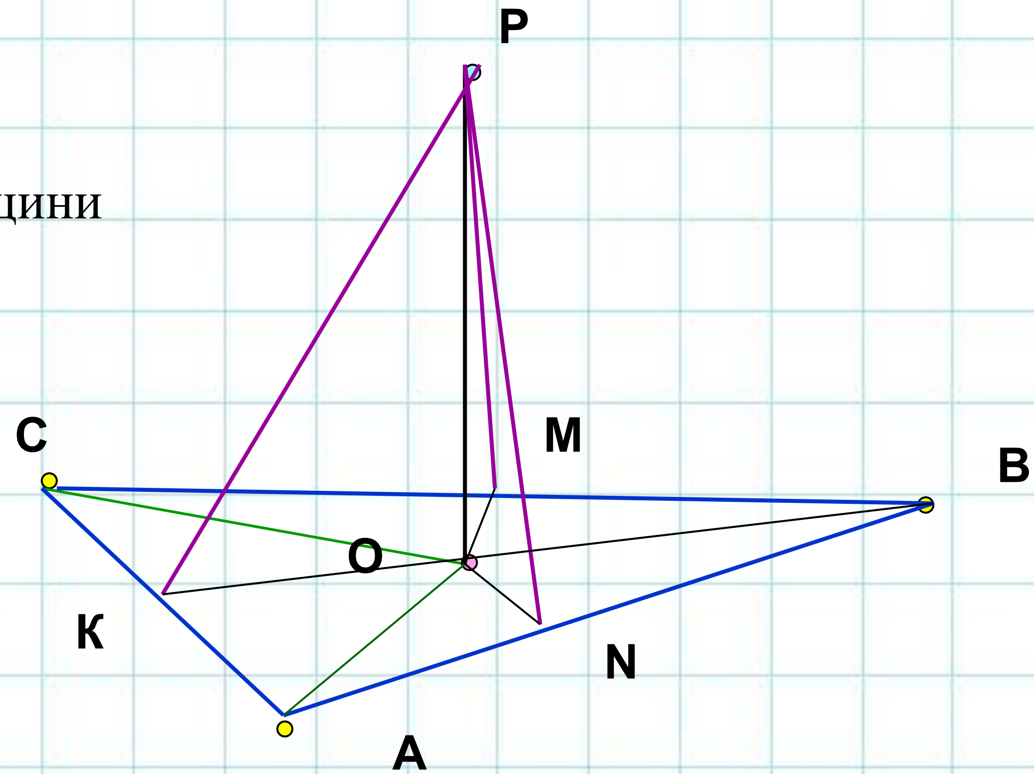
Дано: ΔABC, AB=BC=40см , O – центр вписаного кола, PO $\perp$ (ABC),
AC = 48см, PK=PN=PM=20 см
Знайти: PO

Розв'язання

Перпендикуляр PO до площини ABC проектується в центр вписаного кола.

Для знаходження радіуса вписаного кола можна використати формулу

$$r = \frac{2S_{\Delta}}{a+b+c}$$



Дано: ΔABC, AB=BC=40см , O – центр вписаного кола, PO $\perp$ (ABC), AC = 48см, PK=PN=PM=20 см

Знайти: PO

Розв'язання (продовження)

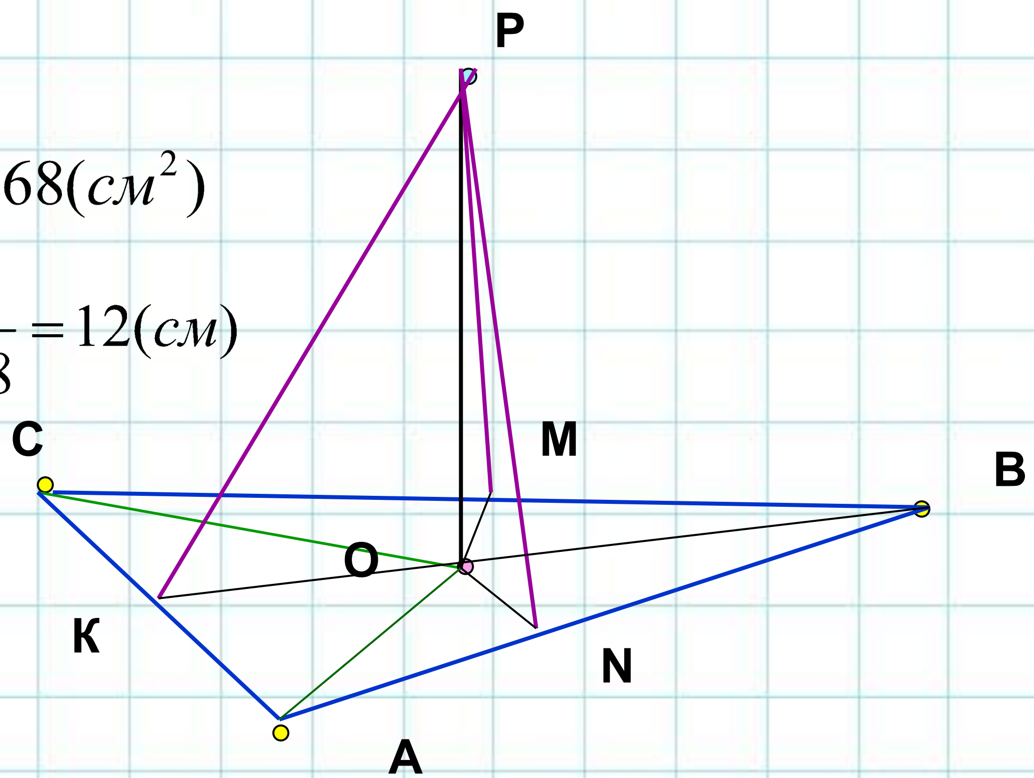
Площу трикутника легко обчислити за формулою Герона, враховуючи, що a=c=40 см, b= 48см

p=(40+40+48): 2= 64 (см)

Тому знаходимо

$$S_\Delta = \sqrt{64\cdot 24\cdot 24\cdot 16} = 768(см^2)$$

$$r = \frac{2S_\Delta}{a+b+c} = \frac{2\cdot 768}{40+40+48} = 12(см)$$



З ΔKPO за наслідком з теореми Піфагора

$$PO = \sqrt{PK^2 - KO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16(см)$$