

**ПРОТОТИПЫ В 14
ИССЛЕДОВАНИЕ
СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ
ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ,
ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ
ФУНКЦИИ И ФУНКЦИЮ
КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ**



Проверяемые требования (умения):
уметь выполнять действия с функциями.

Умения по КТ

- Вычислять производные и первообразные элементарных функций



- Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций

Содержание задания В14 по КЭС



Начала математического анализа

- 4.1 *Производная*

4.1.1 Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

4.1.2 Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

4.1.3 Уравнение касательной к графику функции

4.1.4 Производные суммы, разности, произведения, частного

4.1.5 Производные основных элементарных функций

4.1.6 Вторая производная и ее физический смысл

- 4.2 *Исследование функций*

4.2.1 Применение производной к исследованию функций и построению графиков

4.2.2 Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

Памятка ученику

- **Задание В14** - нахождение с помощью производной точек экстремума функции или вычисление наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке. Для успешного решения задачи ученик должен уметь вычислять производные элементарных функций и в простейших случаях исследовать функцию на монотонность.



C'	0
$(x)'$	1
$(x^a)'$	ax^{a-1} <u>при $a \neq 1$</u>
$\sin'x$	$\cos x$
$\cos'x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg}'x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg}'x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)'$	e^x
$(a^x)'$	$a^x \ln a$
$\ln'x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a'x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$(f+g)'$	$f'+g'$
$(f \cdot g)'$	$f'g + fg'$
$(cf)'$	cf'
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{(f'g - fg')}{g^2}$
$(f(kx+b))'$	$kf'(kx+b)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Устные упражнения

$$4) g(x) = (1-x)^3$$

$$\text{Ответ: } g'(x) = -3(1-x)^2$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Устные упражнения

Найдите производные функций:

1) $g(x) = x^2 - 3x + 4$

Ответ: $g'(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$

Ответ: $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

3) $h(x) = (2x + 1)^2$

Ответ: $h'(x) = 4(2x + 1)$

Устные упражнения

6) $y = \sin 2x$

Ответ: $y' = 2 \cos 2x$

7) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

Ответ: $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$

Устные упражнения

8) $y = \sin^2 x$

Ответ: $y' = \sin 2x$

9) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

Ответ: $y' = 0$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{x}$$

Решение

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = x^{12} + \sin x$$

Решение

$$f'(x) = 12x + \cos x$$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = (-3 + 6x)^7$$

Решение

$$f'(x) = 7(-3 + 6x)^6$$

Порешаем?...

Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x + 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$

Решение

$$f'(x) = 3 \cos 3x;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Алгоритм нахождения наименьшего (наибольшего) значения на данном отрезке. Первый способ (традиционный) предполагает использование алгоритмов и знание формул.

- 1) использование алгоритмов и знание формул. Найти производную функции.
- 2) Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
- 3) Найти значение функции на краях числового промежутка и в нулях производной, входящих в данный числовой промежуток.
- 4) Выбрать среди полученных значений функции значение, соответствующее вопросу задачи (наибольшее или наименьшее)

- **Важно: промежуток может быть не указан, но очевиден: область определения.**

Прототип задания В14



- Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

Найдем $y'(x)$. Производная произведения равна

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$y' = (x-8)' \cdot e^{x-7} + (x-8)(e^{x-7})' = e^{x-7} + (x-8) \cdot e^{x-7} = e^{x-7} \cdot (x-7)$$

Приравняем к нулю:

$$e^{x-7} (x-7) = 0$$

$$e^{x-7} = 0 \text{ - нет корней; } x-7 = 0 \text{ } x=7 \text{ принадлежит } [6;8]$$

Найдём наименьшее значение функции:

$$y(6) = (6-8) \cdot e^{6-7} = -2 \cdot 2,7^{-1} = -\frac{20}{27}$$

$$y(7) = (7-8) \cdot e^{7-7} = -1$$

$$y(8) = (8-8) \cdot e^{8-7} = 0$$

Ответ: -1 - наименьшее значение функции на отрезке $[6;8]$.

Задания для самостоятельного решения

- **Задание В14**

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 6)e^{x-5}$ на отрезке $[4;6]$.

- **Задание В14**

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 17)e^{x-16}$ на отрезке $[15;17]$.



Проверка

Ответ: -1

Ответ: -1

Прототип задания В14

- Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$

на отрезке

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$



Найдем $y'(x)$. Производная функции равна

$$y' = -12 \sin x + 6\sqrt{3}$$

Приравняем к нулю:

$$-12 \sin x + 6\sqrt{3} = 0 \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -x = \frac{\pi}{3}$$

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Найдём наибольшее значение функции:

$$y(0) = 12 \cdot 1 + 6\sqrt{3} \cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12 - 2\sqrt{3}\pi + 6 \approx 7,12$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + 2\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 3\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi + 6 = \sqrt{3}\pi + 6 \approx 11,4$$

Ответ: **12** - наибольшее значение функции на отрезке

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Задания для самостоятельного решения

- **Задание В14**

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = 12\sqrt{2} \cos x + 12x - 3\pi + 9$$

- **Задание В14**

Найдите наибольшее значение функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = 7\sqrt{2} \cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 9$$



Прототип задания В14

- Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5 \cos x - 6x + 4 \quad \text{на отрезке} \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$$



Найдем $y'(x)$. Производная функции равна

$$y' = -5 \sin x - 6$$

Приравняем к нулю:

$$-5 \sin x - 6 = 0 \quad \sin x = -\frac{6}{5} \quad \text{нет корней}$$

Найдем наименьшее значение функции:

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 \approx 27 + 4 \approx 31$$

$$y(0) = 5 + 4 = 9$$

Ответ: 9 - наименьшее значение функции на отрезке

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

Задания для самостоятельного решения

- **Задание В14**

- Найдите наименьшее значение функции $y = 7 \cos x - 13x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

- **Задание В14**

- Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 9x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$



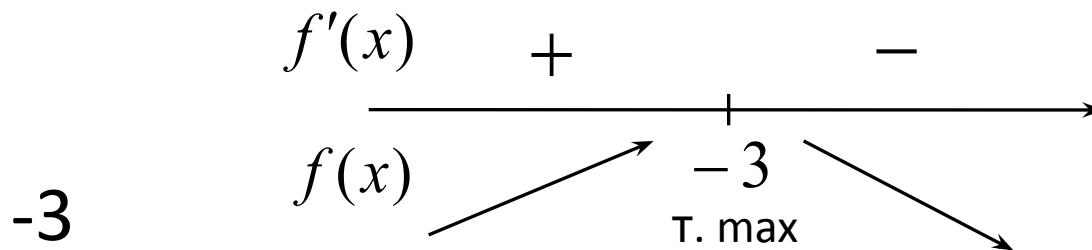
Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции без указания числового промежутка:

- 1) Найти производную функции.**
- 2) Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.**
- 3) Провести исследование на экстремумы в области определения функции. Если экстремум один, то именно в нем достигается наибольшее (наименьшее) значение функции.**

Алгоритм нахождения точек экстремума.

- Найти производную функции.
- Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
- На числовой прямой отметить нули производной и точки, в которых производная не определена.
- Соотнести поведение производной с поведением функции и ответить на вопрос.

Например:



Ответ:

Формулы:

Дифференцирование показательной функции:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Дифференцирование логарифмической функции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Дифференцирование сложной функции: $(f(g(x)))' = (f(g))' \cdot (g(x))'$



Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3$$

Решение:

Промежуток не указан. Очевидно, что необходимо исследовать функцию на всей области определения.

$$D(f): 4 - 2x - x^2 \geq 0$$
$$x \in (-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$$

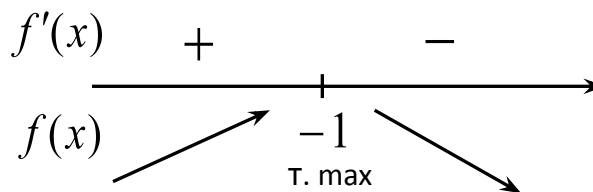
$$y' = \frac{1}{(4 - 2x - x^2) \ln 5} \cdot (4 - 2x - x^2)'$$

$$y' = \frac{1}{(4 - 2x - x^2) \ln 5} \cdot (-2 - 2x)$$

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x = -1$$

Конечно, страшновато, но уже ясно, что краев у числового промежутка нет, а, следовательно в них не будет достигаться наибольшее или наименьшее значение.

Убедимся, что это значение *наибольшее*



Ответ:

4

Точка максимума одна, следовательно в ней и будет наибольшее значение. $y_{\text{наиб.}} = y(-1) = 4$

Найдите наибольшее значение функции

Решение: $y = 3^x$

$$y = 3^{-7-6x-x^2}$$

Промежуток не указан. Очевидно, что необходимо исследовать функцию на всей области определения.

$$D(f): \mathbb{R}$$

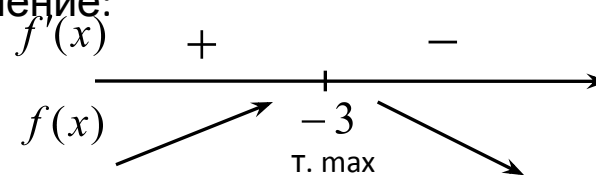
$$y' = 3^{-7-6x-x^2} \ln 3 \cdot (-6 - 2x)$$

$$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = 9$$

$$3^{-7-6x-x^2} \ln 3 \cdot (-6 - 2x) = 0$$

Убедимся, что это *наибольшее* значение:

Разделим на первый и второй множители, не равные нулю:



$$x = -3$$

Точка максимума одна, следовательно в ней и будет наибольшее значение.

Ответ:

9

Не очень просто.

Тем более, что некоторые программы не предусматривают использование формул дифференцирования показательной и логарифмической функции в общем виде.

Попробуем иначе. Без использования алгоритма и формул.



В случае, если мы имеем дело со сложной функцией $f(g(x))$, где f – монотонная функция, то достаточно исследовать функцию $g(x)$. Наибольшие, наименьшие значения, точки экстремума функция f будет иметь такие же, что и функция $g(x)$. Конечно, с учетом области определения.



Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3^{-7-6x-x^2}$$

Решение:

Функция $y = 3^x$ возрастает на \mathbb{R} , следовательно наибольшее значение принимает при наибольшем значении аргумента (аргументом в данном случае является функция, находящаяся в показателе).

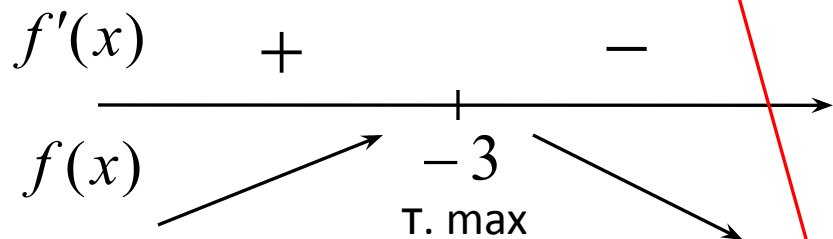
Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся в показателе.

$$f(x) = -7 - 6x - x^2$$

$$f'(x) = -6 - 2x$$

$$-6 - 2x = 0$$

$$x = -3$$



$$\text{Следовательно } f(x)_{\text{наиб.}} = f(-3) = 2$$

$$\text{Следовательно } y_{\text{наиб.}} = 3^2 = 9$$

Ответ:

9

Можно и совсем обойтись без
производной.

Используем простые графические
соображения.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2^{x^2 + 2x + 5}$$

Решение:

Функция $y = 2^x$ возрастает на \mathbb{R} , следовательно наименьшее значение принимает при наименьшем значении аргумента (функции, находящейся в показателе).

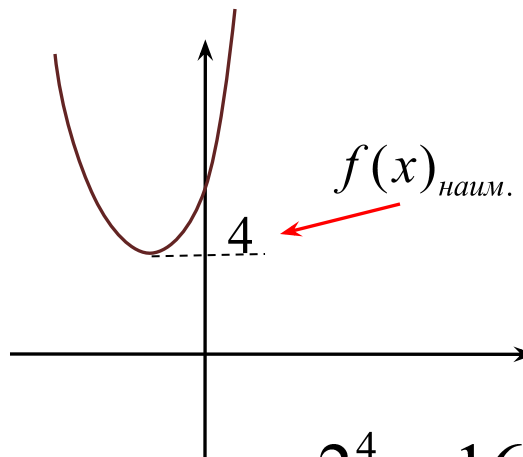
Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся в показателе.

$$f(x) = x^2 + 2x + 5$$

График – парабола, ветви направлены

вверх. $x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$

$$y_0 = 4$$



Следовательно $y_{наиб.} = 2^4 = 16$

Ответ:

1 6

0

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3$$

Решение:

Функция $y = \log_5 x + 3$ возрастает на всей области определения, следовательно наибольшее значение принимает при наибольшем значении аргумента (функции, находящейся под знаком логарифма).

Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся под знаком логарифма.

$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

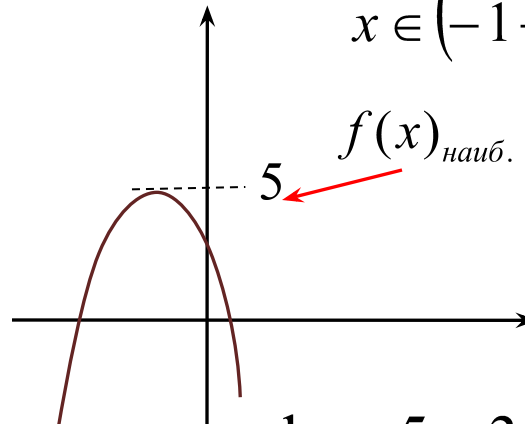
$$D(f): 4 - 2x - x^2 \geq 0$$
$$x \in (-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$$

График – парабола, ветви направлены

вниз.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$$

$$y_0 = 5$$



Следовательно $y_{\text{наиб.}} = \log_5 5 + 3 = 4$

Ответ:

4

0

Решим таким же способом задания, связанные с исследованием сложной функции, содержащей квадратичную функцию под знаком квадратного корня.



Найдите точку минимума функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$$

Решение:

Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения, следовательно ведет себя так же, как подкоренная функция на области определения.

Подкоренное выражение больше нуля при любом значении x . $D(y): \mathbb{R}$.

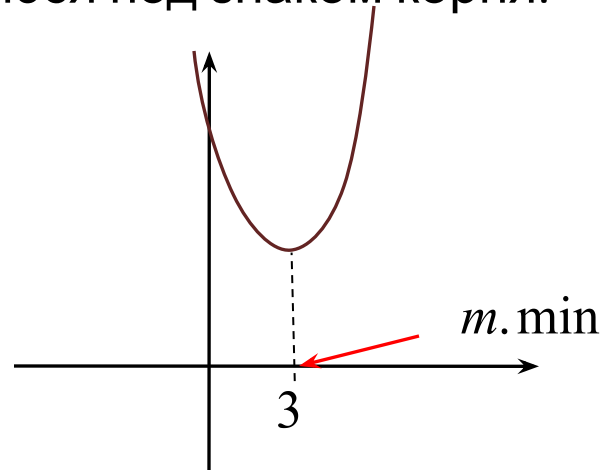
Исследуем функцию, находящуюся под знаком корня.

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

График – парабола, ветви направлены

вверх.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$$



Ответ: **3**



Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Решение:

Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения, следовательно принимает наибольшее значение в той же точке, что и подкоренная функция с учетом области определения.

$$D(y): [-5; 1].$$

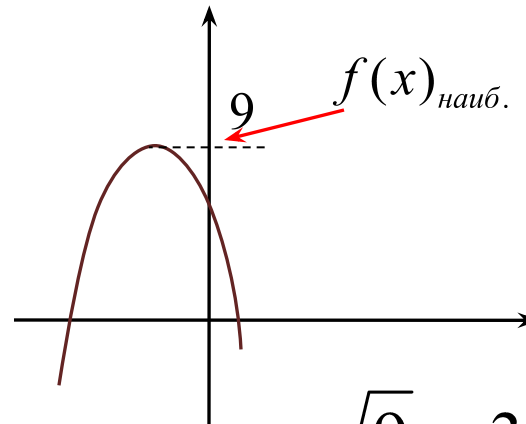
Исследуем функцию, находящуюся под знаком корня.

$$f(x) = 5 - 4x - x^2$$

График – парабола, ветви направлены

вниз.
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -2$$

$$y_0 = 9$$



Следовательно $y_{наиб.} = \sqrt{9} = 3$

Ответ:

3

0



Реши самостоятельно любым способом:

- Найдите точку минимума функции

$$y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$$

- Найдите точку максимума функции

$$y = 11^{6x-x^2}$$

- Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$$

- Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$



Задания для домашнего (или дополнительного) решения

- **Задание В14**

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = 4 + \frac{4\sqrt{3} \cdot \pi}{3} - 4\sqrt{3} \cdot x - 8 \cos x$$

- **Задание В14**

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$$



Проверка

Ответ: 0

Ответ: 4

Задания для домашнего (или самостоятельного) решения

- **Задание В14**

- Найдите наибольшее значение функции

$$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

- **Задание В14**

- Найдите наибольшее значение функции

$$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$y = 11x - 9 \sin x + 2$$

на отрезке

на отрезке

$$y = 12x - 8 \sin x + 6$$



Проверка

Ответ: 3

Ответ: 6