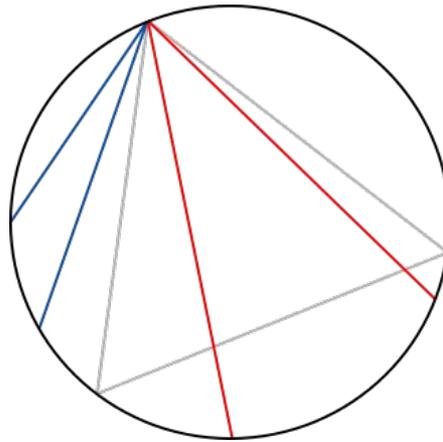


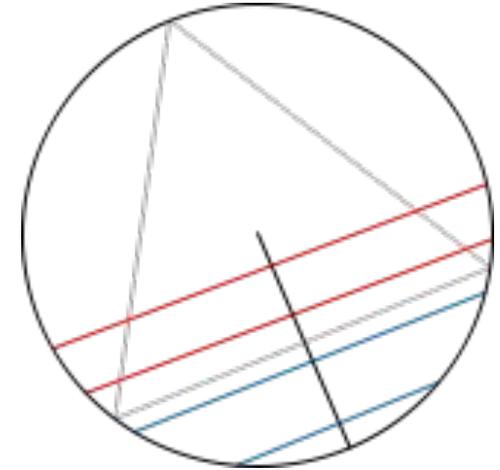
Парадокс Бертрана: какова вероятность, что случайная хорда будет длиннее стороны равностороннего треугольника, вписанного в окружность?

**Случайные
концы хорды
($P=1/3$)**

**Случайно
выбираем две
точки на
окружности,
проводим хорду**



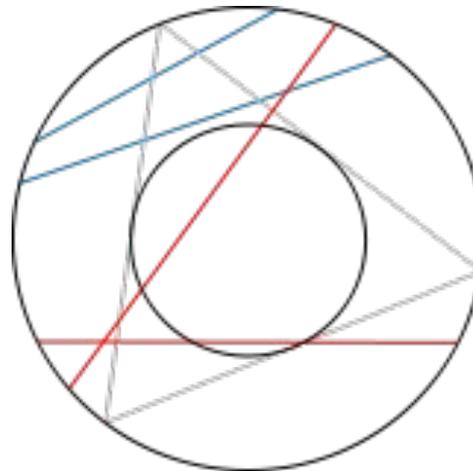
**Случайный
радиус
($P=1/2$)**



**Выбираем случайную
точку на радиусе,
строим хорду,
перпендикулярную
радиусу**

**Случайный центр
($P=1/4$)**

**Любую точку внутри
круга считаем
центром хорды**

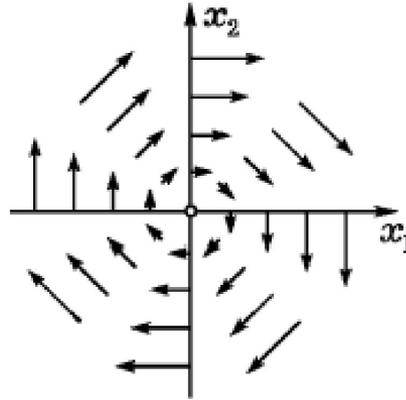


Малые колебания маятника

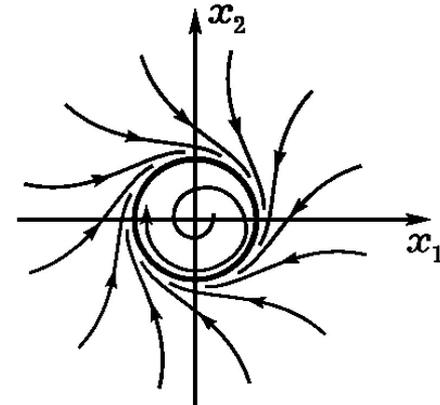
$$d^2x/dt^2 = -kx = -x$$

$$dx_1/dt = x_2;$$

$$dx_2/dt = -x_1$$



$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ dx_2/dt &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$



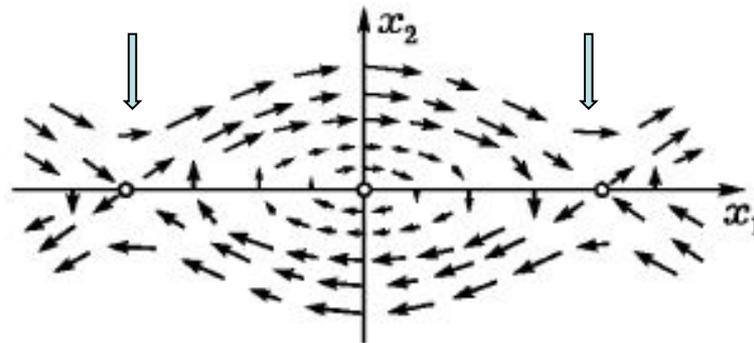
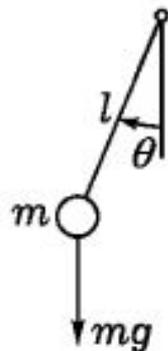
$$ml^2 d^2\theta/dt^2 = -mgl \sin\theta$$

$$d\theta^2/dt^2 = -k \sin\theta$$

Колебания математического маятника

$$dx_1/dt = x_2; \quad dx_2/dt = -\sin x_1$$

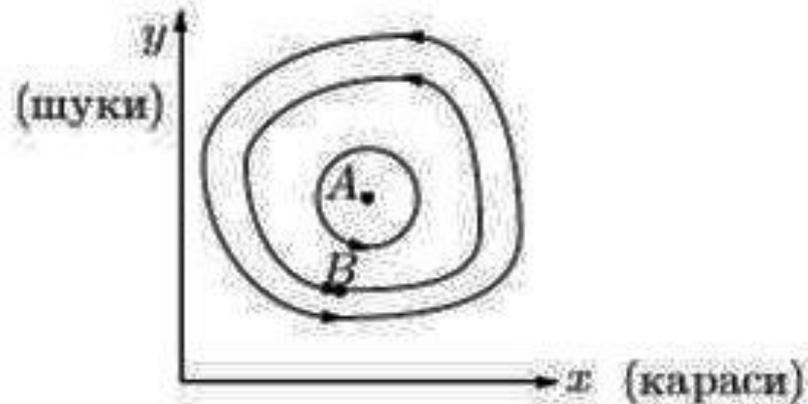
Стрелки - седла



Уравнения Лотки-Вольтерра

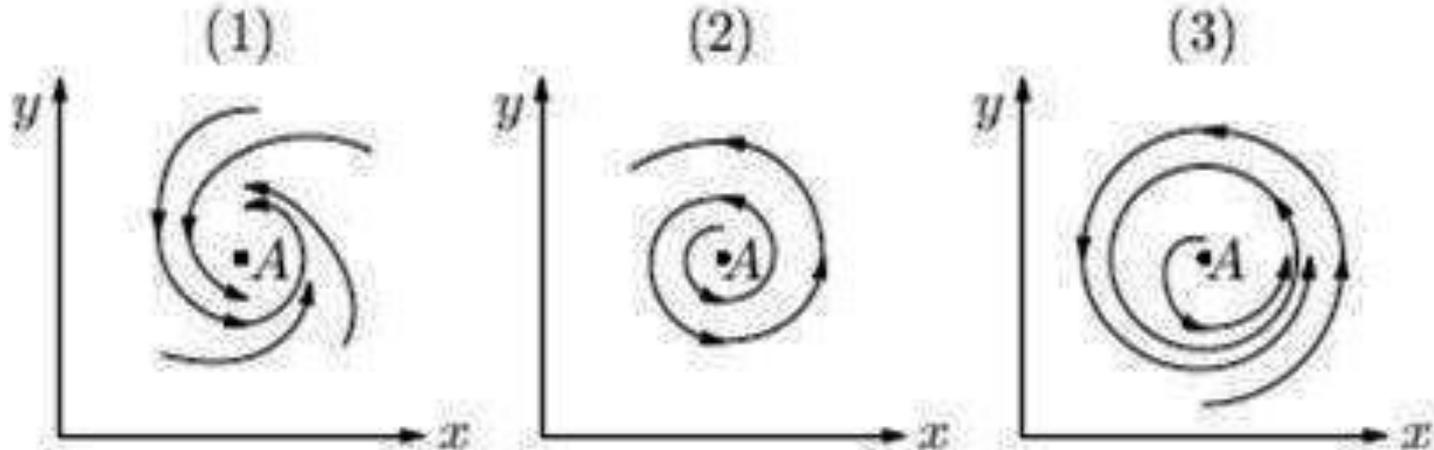
Жесткая модель
(структурно
неустойчивая)

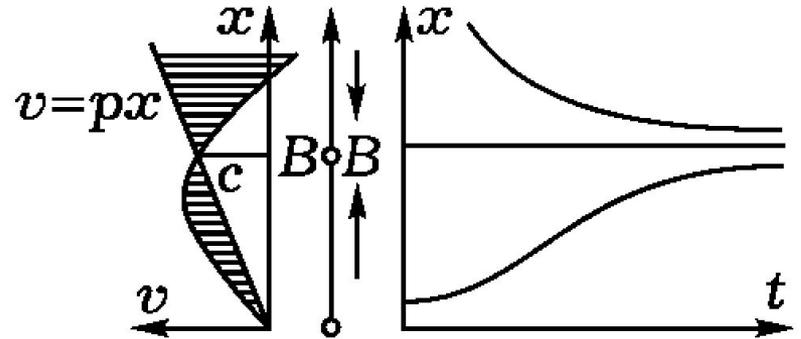
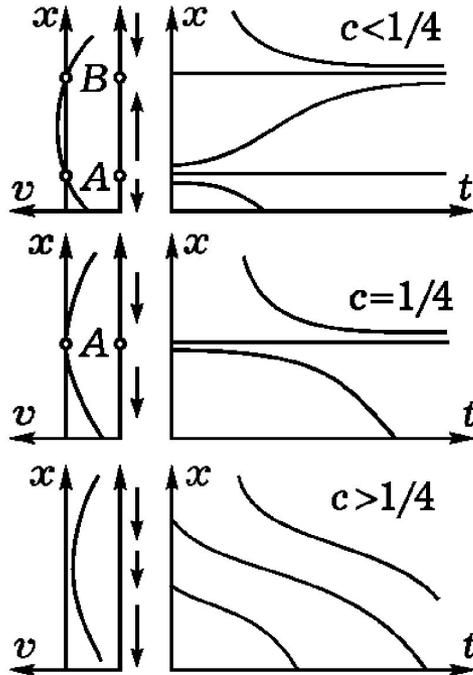
$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - cxy \\ dy/dt &= -by + dxy \end{aligned}$$



Мягкая (структурно
устойчивая) модель

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - cxy + \varepsilon f(x, y) \\ dy/dt &= -by + dxy + \varepsilon g(x, y) \\ \varepsilon &\ll 1 \end{aligned}$$





$dx/dt = x(1-x) - px$: в квоту отлова вводится обратная связь с численностью популяции

$dx/dt = v(x) = x(1-x) - C$: отлов рыбы при фиксированной квоте равной C (постоянная доля численности всей популяции)

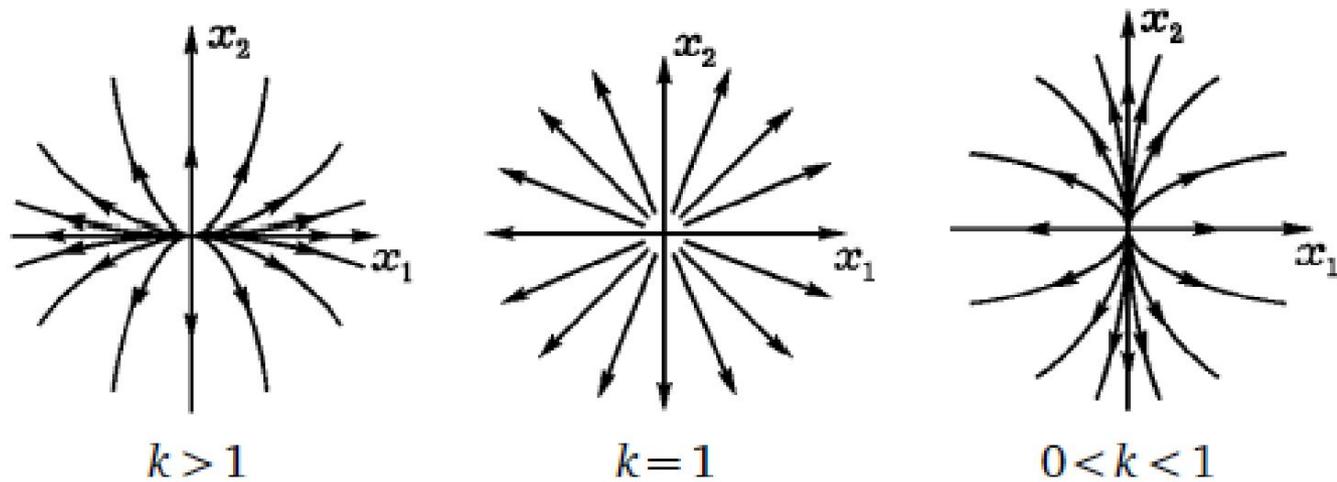


Рис. 30. Узлы: фазовые кривые систем $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = kx_2$

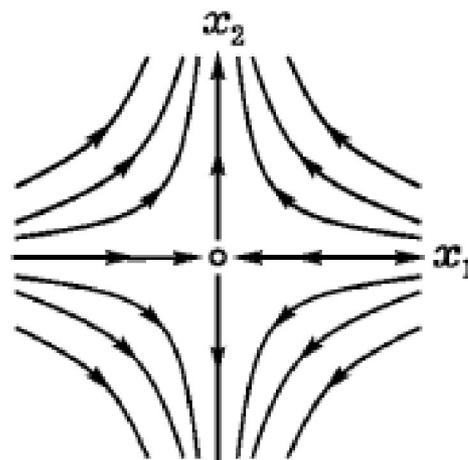
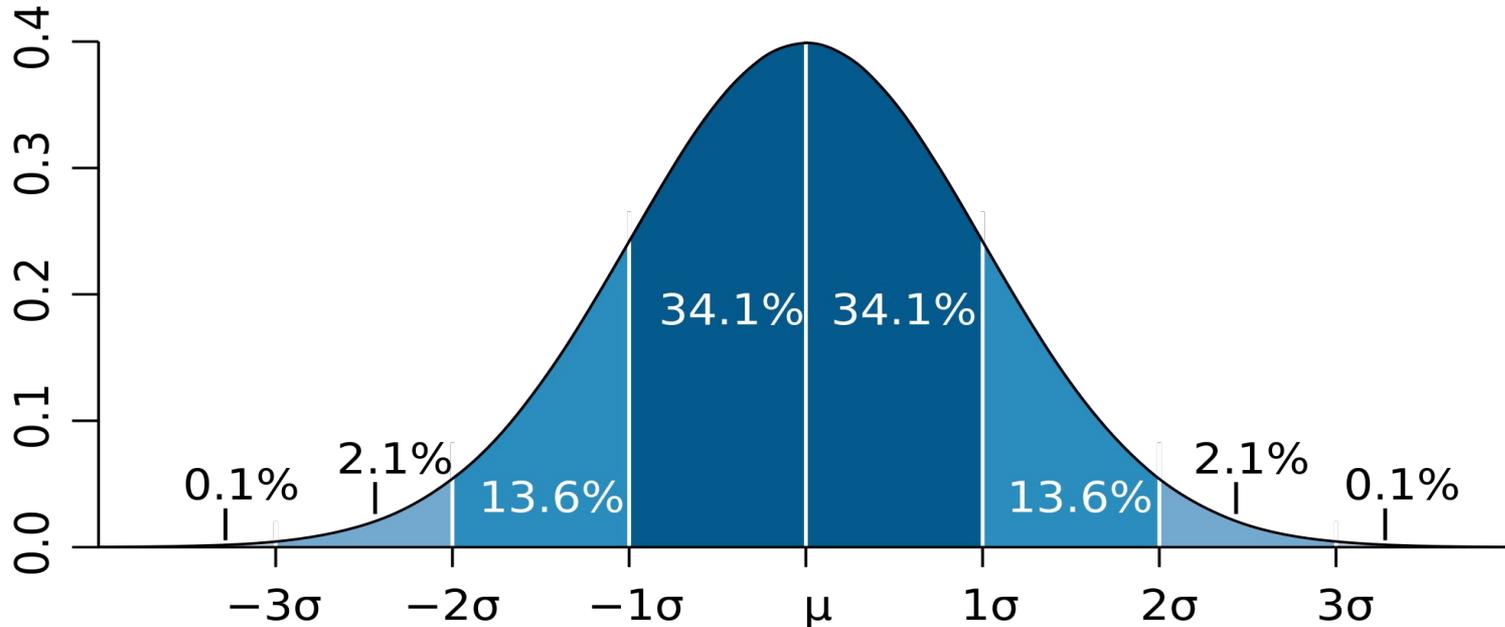


Рис. 31. Седло: фазовые кривые системы $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = kx_2, k < 0$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

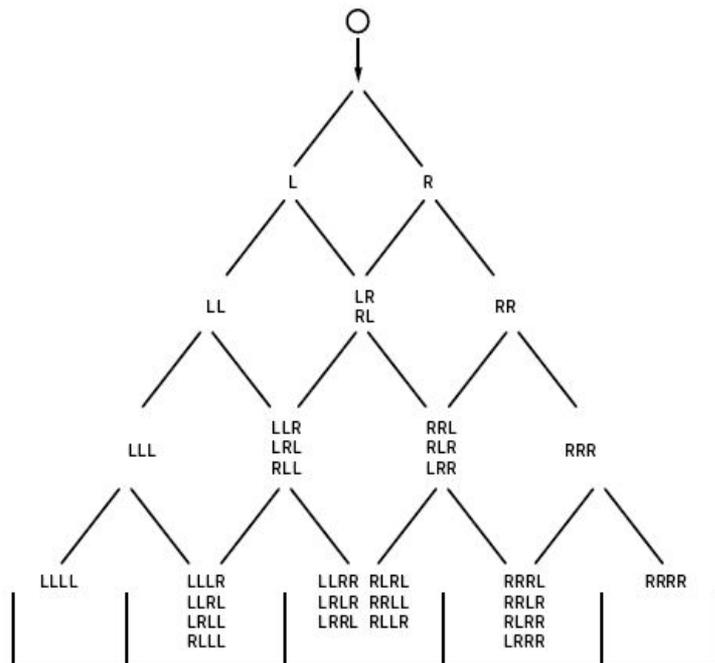
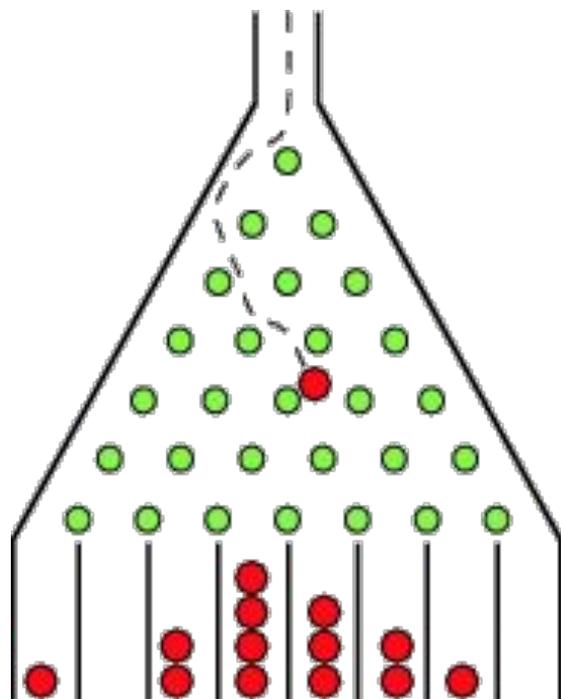
$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Распределение молекул по скоростям (микросостояния) в покое газе (макросостояние)

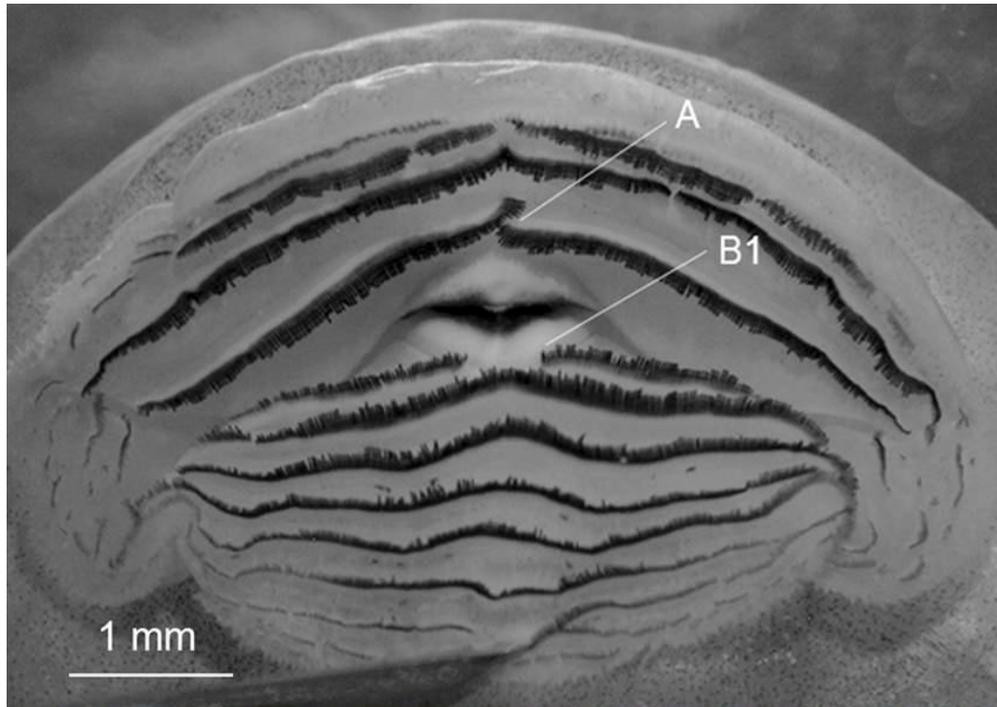
$$f_v(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[\frac{-mv_i^2}{2kT}\right]$$

Биллиард Гальтона (Galton's board): модель, показывающая как формируется нормальное распределение: «детерминированный хаос»



Для возникновения детерминированного хаоса достаточно **статистической (не каузальной)** связи между прошлым и будущим состояниями динамической системы. При малых случайных флюктуациях сходное прошлое ведет к разному будущему, и наоборот. Нормальность распределения – критерий отсутствия **однозначной (каузальной)** связи между состоянием системы и ее судьбой, т. е., **отсутствия локального детерминизма**

ФЛЮКТУИРУЮЩАЯ АСИММЕТРИЯ БИЛАТЕРАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ СТРУКТУР



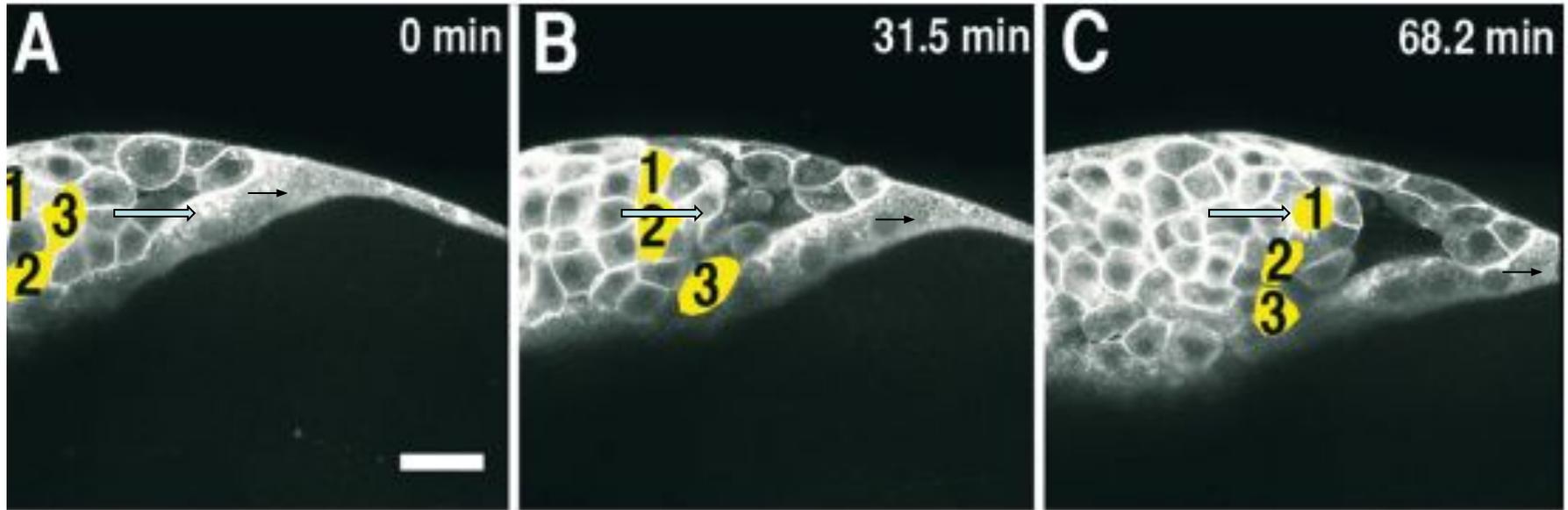
Ротовой диск головастика состоит из билатерально симметричных рядов роговых зубчиков (например, ряд *B1*)

При подсчете разности числа зубчиков в левой и правой половине ряда ($L - R$) получается **нормальное частотное распределение с нулевой модой**

Если для любого зубчика отмечать начальное положение относительно плоскости симметрии ряда и следить за изменениями его положения на последовательных стадиях развития, то сдвиги к центру и от центра будут перемежаться так же, как на бильярде Гальтона.

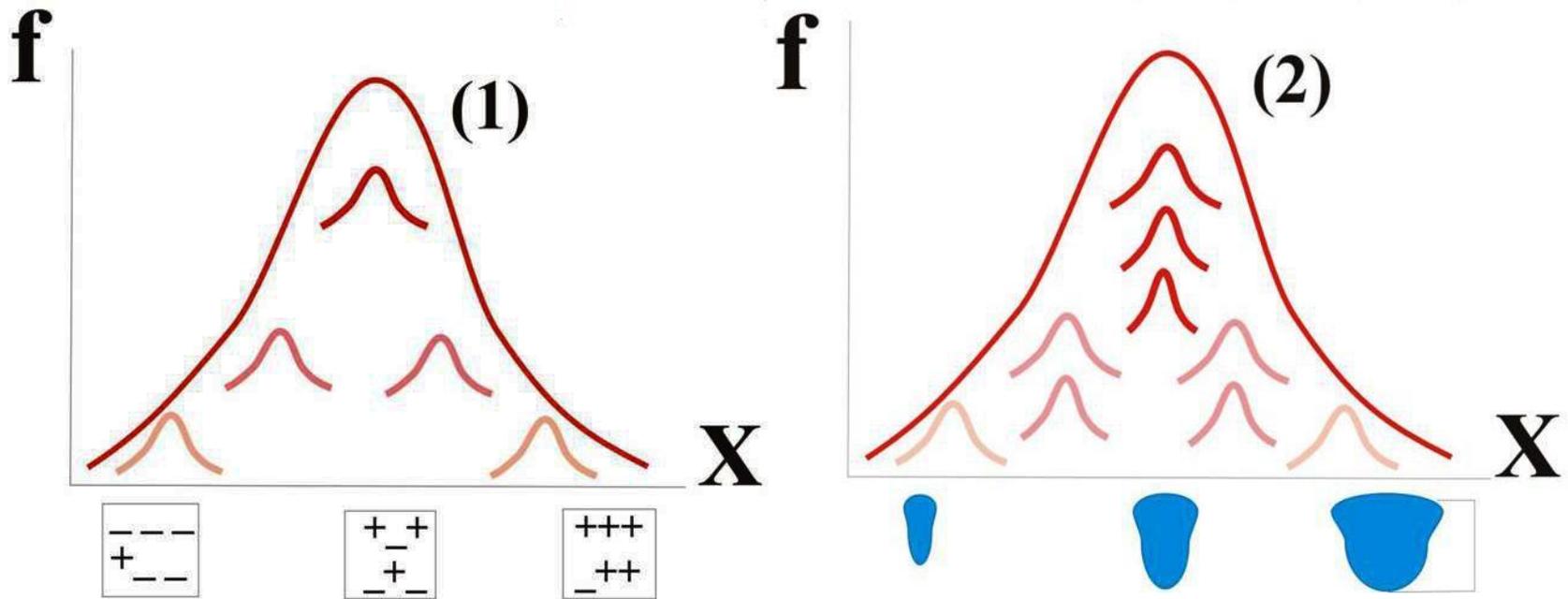
В отсутствие макроскопических различий между L и R частями ряда равенство числа L и R зубчиков реализуется наибольшим числом способов, т. е., имеет наибольший статистический вес, **определяющий не среднее значение признака, а моду распределения**

Хаос детерминирован, если **(и только если)** разные сочетания микросостояний имеют **различный статистический вес (разную степень воспроизведения на макроскопическом уровне)**



Поток клеток клеточного пласта (голубая стрелка) движется быстрее, чем его граница (черная стрелка). Из-за этого поток упирается в границу области, так что краевые клетки **«выталкиваются»** в глубину пласта. Так как число слоев клеток в краевой зоне растет, связь между клеткой и слоем, в котором окажется клетка краевой зоны, может быть только статистической, такой как при **ФОРМИРОВАНИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРИЗНАКА**. Этот признак – разность скоростей движения между геометрическим центром краевой зоны пласта и краем пласта – единственная **макроскопическая** компонента движения, **детерминированная в том смысле, что модальное значение разности положительно**

МОДА ЧАСТОТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – МАКРОСОСТОЯНИЕ С НАИБОЛЬШИМ СТАТИСТИЧЕСКИМ ВЕСОМ

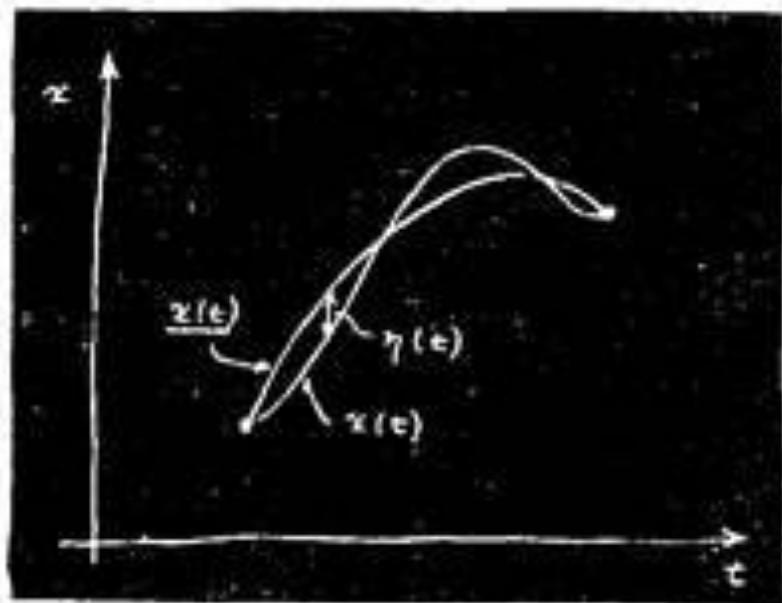


Нормальное распределение макроскопического признака (размер особи) не зависит от механизма формирования микросостояний.

(1) – одинаковая норма реакции генотипов, мода – наиболее вероятное сочетание (+) и (-) генов. (2) – «модальные» и «маргинальные» особи различаются шириной нормы реакции генотипов и (как следствие) **буферной емкостью онтогенеза**

$$\text{Действие} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{к. э.} - \text{п. э.}) dt.$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\underline{\eta}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \underline{\eta}) \right] dt.$$

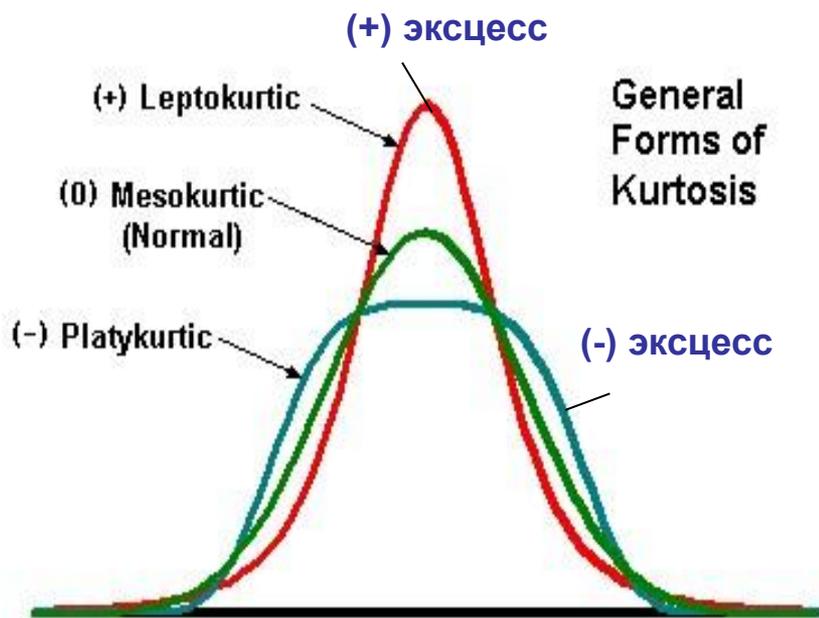


$$\left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0.$$

ОТКЛОНЕНИЕ ОТ НОРМАЛЬНОСТИ ОЗНАЧАЕТ КАУЗАЛЬНУЮ СВЯЗЬ МАКРО И МИКРОСОСТОЯНИЙ

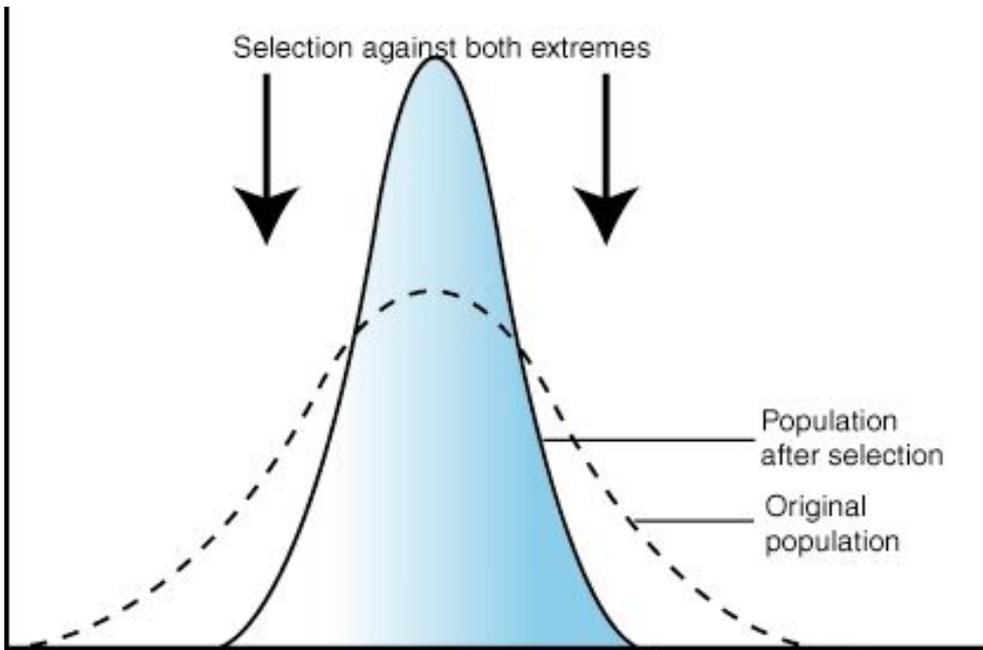
(+) эксцесс означает отрицательную (стабилизирующую), **(-) эксцесс** – положительную (дестабилизирующую) связь между величиной и частотой отклонений от моды частотного распределения.

Асимметрия (несовпадение моды и среднего) означает, что **(+)** и **(-)** отклонения от моды имеют разный статистический вес



Отсутствие нормальности означает, что **изменчивость структурирована**. Сглаживание асимметрии с помощью логарифмирования – некорректный прием

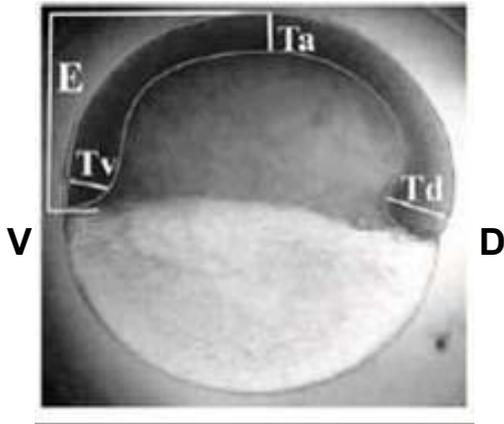
СТАБИЛИЗИРУЮЩИЙ ОТБОР



Стабилизирующий отбор – это выбраковка уклоняющихся особей. Это **нормализующий эффект** стабилизирующего отбора, препятствующий росту дисперсии, но частотное распределение остается нормальным. Других последствий это не имеет

Кроме того, стабилизирующему отбору часто приписывают **канализирующий эффект (картинка)**, то есть, переход от нормального распределения к распределению с положительным эксцессом. В этом **(и ТОЛЬКО В ЭТОМ)** случае действие отбора ведет к сужению и стабилизации изменчивости – это одно из возможных объяснений «устойчивости дикого типа»

При факторном анализе нормальной изменчивости практически вся дисперсия количественных признаков распределяется между небольшим числом (не более трех) факторов, представляющих векторы коллективного движения клеток



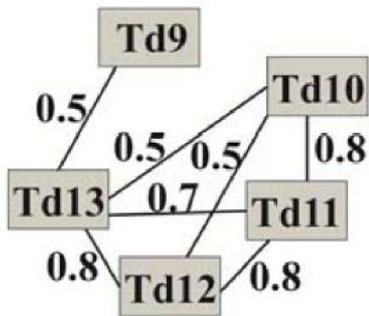
Признак	Фактор I (серии 9-10)	Фактор II (серии 9-10)	Фактор I (серии 12-13)	Фактор II (серии 12-13)
<i>Td</i>	0.9	0.0	-0.1	0.9
<i>Tv</i>	0.9	0.0	0.8	0.2
<i>Ta</i>	0.0	0.8	0.9	0.0
<i>E</i>	0.1	-0.8	-0.2	-0.8

(+) связь *Td* и *Tv* означает аккумуляцию клеток в краевой зоне бластодермы, а (-) связь *Ta* и *E* – эпиболию, идущую за счет радиальной интеркаляции клеток бластодермы в ее центральной зоне

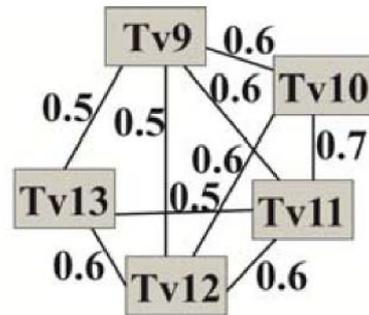
(+) связь *Tv* и *Ta* и (-) связь *Td* и *E* означают, что на дорсальной стороне темп лимитирующим звеном эпиболии является избыток, а на вентральной стороне – недостаток клеток в области ЗК

Корреляционные графы, связывающие значения количественных признаков на индивидуальных траекториях развития (в сериях последовательных измерений живых зародышей), и факторный анализ

Толщина дорсального края



Толщина вентрального края



Факторный анализ

Факторные нагрузки <i>Td</i> (один фактор)		Факторные нагрузки <i>Tv</i> (один фактор)	
<i>Td9</i>	0.4	<i>Tv9</i>	0.7
<i>Td10</i>	0.8	<i>Tv10</i>	0.9
<i>Td11</i>	0.9	<i>Tv11</i>	0.9
<i>Td12</i>	0.9	<i>Tv12</i>	0.9
<i>Td13</i>	0.9	<i>Tv13</i>	0.9

В начале развития толщина дорсального края пласта выпадает из корреляционного графа, в отличие от толщины вентрального края.

Для обоих краев факторный анализ выделяет один фактор изменчивости, из которой выпадает дорсальный край, варьирующий независимо от дорсального края, из-за чего индивидуальные траектории развития дестабилизируются. Это и есть **детерминированный хаос**