Все что нужно знать к КР

По комбинаторике!

Формулы сложения и произведения

Сложение

-Когда использовать??

-Когда задача разбивается на несколько непересекающихся случаев!

Произведение

-Когда использовать??

-Когда задача разбивается на несколько независимых подзадач. Пусть количество решений первой подзадачи X, для ЛЮБОГО решения первой подзадачи имеется Y решений второй, тогда общее количество X*Y

Примеры использования сложения и произведения

Сложение и произведение

Пусть имеется 3 синих, 4 красных, и 5 белых шаров, каким количество способом можно вытащить 2 разноцветных шара?

Решение: Разбиваем задачу на непересекающиеся случаи

-Синий и красный 3*4=12 (так как для каждого из 3 синих, можем вытянуть 4 красных)

-Синий и белый 3*5=15 (аналогично)

-Красный и белый 4*5=20

Ответ: 12+15+20=47

Перестановки

- Формула $P(n)=n!$
- Когда использовать?? Имеется n отличающихся между собой объектов, и n позиций для них. Нужно расставить их на эти позиции. НИКАКОЙ ВЫБОРКИ ОБЪЕКТОВ НЕТ!
- Объяснение формулы: На первое можно поставить любой из n объектов, на следующее любой из оставшихся n-1, на следующее n-2 и.т.д.
- Пример: Каким количеством способов можно расставить 10 людей в линию? 10!
  Пример: Каким количеством способов можно перемешать колоду из 52 карт? 52!

Размещение без повторений

- Формула $A(n,m)=n!/(n-m)!$
- Когда использовать?? Когда нужно выбрать из n различных объектов m, и выставить их в определенном порядке, при этом каждый объект может использоваться только 1 раз
- Объяснение формулы: На первую позицию можем поставить n объектов, на вторую $n-1$, на третью $n-2$, на последнюю $n-m+1$,

$$n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-m+1)=n!/(n-m)!$$

Примеры

- Каким количеством способов можно выбрать в группе из 30 старосту и его помощника? $A(30,2)=30!/(30-2)!=30*29=870$
- Каким количеством способов 10 человек из 30 могут выстроится в очередь к врачу? $A(30,10)=30!/20!$

Размещения с повторениими

- Формула: $A(n,m)=m^n$
- Когда использовать?? Когда имеется n объектов, и требуется разбить их на n групп, при этом в каждой группе может быть более одного объекта
- Объяснение формулы: Первый объект может попасть в любую из m групп, второй тоже независимо от того куда попал первый может попасть в m групп -> $m*m*\ldots*m=m^n$

Примеры

- Каким количеством способов 17 человек могут выйти на 15 остановках? Первый может выйти на любой 15, второй на любой из 15 -> Ответ 15^17. (Очень важно понимать почему не подходит обратные соображения с ответов 17^15)
- Сколько подмножеств у множества из 100 элементов? Объекты – элементы, и есть 2 группы (группа элементов, входящих в подмножество и не входящих в ней), первый элемент можно отнести в любую из 2 групп, второй тоже в любую независимо от первого -> Ответ 2^100

Сочетания

- Формула: C(n,k)=n!/(k!*(n-k)!)
- Когда использовать?? Из n различных объектов нужно выбрать группу (в которой порядок не важен) из k объектов.
- Объяснение формулы: C(n,k)=A(n,k)/P(k) Если мы сначала решим задачу, где нам важен порядок внутри группы, ответ будет A(n,k). Однако все порядки отличающиеся лишь порядком элементов, будут давать одну группу, а таких групп будет k! Для каждой выборки

Примеры

- Сколькими способами можно выбрать 10 карт из 36? C(36,10)
- Сколькими способами можно выбрать 4 позиций из 10? C (10,4)
- Сколькими способами можно выбрать 8 карт из 36, чтобы там были 2 короля и 2 туза? C(4,2)*C(4,2)*C(28,4) - Количество способов выбрать 2 короля из 4, 2 туза из 4, и 4 любые карты из оставшихся 28
- В турнире по шахматам, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз, сколько партий будет сыграно в турнире из 14 человек? C(14,2) – Количество неупорядоченных пар шахматистов и есть количество партий в турнире

Задача Муавра

- Формула $F(n,k)=C(n+k-1,k-1)$
- Когда использовать?? Либо когда у нас n ОДИНАКОВЫХ объектов, раскладывается по k кучам, либо когда задача сводится к нахождению решений уравнений $x1+x2+\ldots xk=n$ в целых числах, когда каждый $xi>=0$
- Объяснение: Расположим между n шарами k-1 перегородок, однозначно разбивающую группу на k групп. Всего позиций у нас получается n+k-1, надо выбрать те, где будут стоять перегородки, это количество $C(n+k-1, k-1)$. Во втором случае мы как бы раскидываем n единиц по иксам.

Примеры

- Сколькими способами можно купить 9 ручек, если в продаже имеется 4? Пусть x_i – количество ручек i $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ ->Ответ $C(9+4-1,4-1)=C(12,3)$
- Сколькими способами можно разделить 7 яблок и 4 груши на 3 человека? Будем по отдельности делить яблоки и груши, поделит яблоки $C(7+3-1,3-1)$ способов, а груш $C(4+3-1,3-1)$ способов (Стандартная задача Муавра, объекты – фрукты, люди - ящики). -> Ответ $C(9,2)*C(6,2)$

Пример задач с ограничениями (было у нас в прошлом году на кр)

- Каким количеством способом могут распределиться голоса на выборах, если избирающих 450 человек, кандидатов 4, и известно что победитель набрал более 2/3 голосов.
- Решение: Так как победитель набрал более 2/3, значит как минимум 301 голос, отдадим их одну из 4 кандидатов, и оставшиеся 149 голосов распределим по Муавру.
- Ответ: 4*C(149+4-1,4-1)=4*C(152,3)

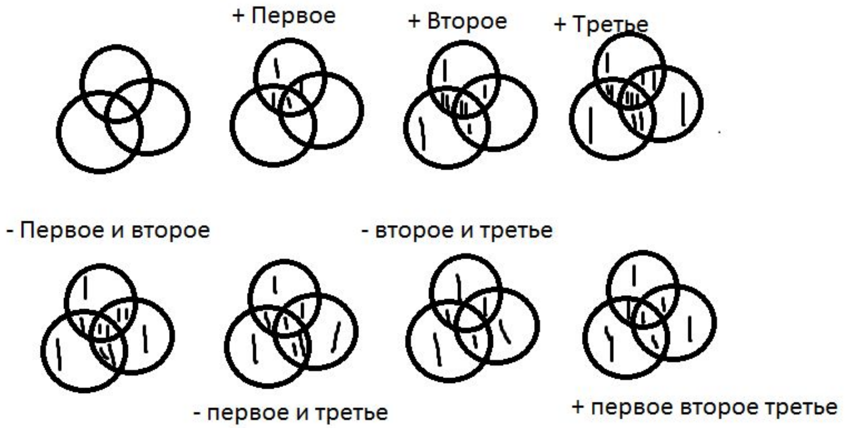
Пример задач с ограничениями (было у нас в прошлом году на кр)

- Каким количеством способом могут распределиться голоса на выборах, если избирающих 450 человек, кандидатов 4, и известно что кандидат А набрал ровно половину голосов.
- Решение: Так как А набрал 225 голосов, отдадим их ему, а оставшиеся распределим между 3 кандидатами по Муавру
- Ответ: C(225+3-1,3-1)=C(227,2)

Формула включений исключений

- Когда использовать?

1. Когда нужно найти объединение некоторых множеств, при этом легко находятся их пересечения
2. Когда в задаче легко найти обратное событие (очень часто тут используется ключевое слово ХОТЯ БЫ)



Примеры

- Сколько последовательностей из букв английского алфавита (их 26!) длины 5 не содержащих букв X Y Z?
- Решение: 26^5-3*25^5+3*24^5-23^5 (От общего числа вычитаем те, где нет X, те где нет Y, те где нет Z, прибавляем те где нет пар, и вычитаем те, где нет всей тройки)

Задачи для решения (они из учебника Шварца ничего нового, но в конце презентации есть решения к ним)

111. Имеется куб размером $10\times10\times10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

115. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

121. Сколько троичных последовательностей (элементы последовательности — 0, 1, 2) длины n содержат в точности k символов 1?

158. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

171. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

194. Найдите число решений уравнения $x+y+z=n$, где x, y, z — *различные* неотрицательные целые числа.

199. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить букет из 9 цветов? (Цветы одного сорта считаем одинаковыми.)

Решение задачи 111

Введем систему координат, сейчас мы находимся в клетке (1,1,1) надо попасть в (10,10,10). Мы сделаем это за 27 ходов, среди которых 9 ходов это +1 по первой координате, 9 - +1 по второй и 9 - +1 по третьей. То есть наш путь описывается последовательностью из символов i, j,k, где каждого символа должно быть 9 штук. Выберем позиции на которых будет i C (27,9) способами, из оставшихся 18 выберем позиции, на которых будет j, на оставшиеся автоматически попадут k.

Ответ C(27,9)*C(18,9)=27!/(9!*9!*9!)

Решение задачи 115

- Выберем позиции на которых будут стоять четные числа, это можно сделать C(10,5) способами. Выбрав позиции для четных, мы однозначно их расставляем в порядке возрастания, позиции для нечетных тоже выбираются однозначно и числа в них расставляются однозначно в порядке убывания
- Ответ: C(10,5)

Решение задачи 121

- Выберем k позиций из n C(n,k) способами, это позиции на которых будут стоять единицы. На оставшихся n-k позициях могут стоять как 0 так и 2. Количество способов их расставить 2^(n-k) так как по 2 способа на каждую позицию.
- Ответ: C(n,k)*2^(n-k)

Решение задачи 158

- Всего способов 4^15 (так как каждый из 15 может попасть в любую из 4 комнат). Вычтем те, где какая-то пустая C(4,1)*3^15 (первый множитель это выбор пустых комнат, второй это разбиение людей по комнатам). Прибавим те, где какая-то пара комнат пуста C(4,2)*2^15, и вычтем те, где тройка комнат пуста C(4,3)*1^15. Надо бы еще прибавить те способы, где все пусты, но таких нет.
- Ответ: 4^15-C(4,1)*3^15+C(4,2)*2^15-C(4,3)*1^15

Решение задачи 171

- А) У ней есть 28 промежуточных полей, на каждое поле можно как вступать так и не вступать, поэтому ответ 2^{28}
- Б) Она должна сделать 7 шагов, каждый шаг положительной длины, сумма шагов равна 29. $x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7=29$, но все x положительные, значит задача с ограничениями, положим по единице в каждый x получим $x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7=22$. По Муавру ответ $C(22+7-1, 7-1)=C(28,6)$

Решение задачи 194

- Всего решений этого уравнений в неотрицательных целых числах C(n+3-1,3-1) способов. Вычтем те случаи в которых какая пара совпала. То есть найдем количество решений уравнения 2*x+z=n. Их n/2+1 штук (округление вниз, не имеет никакого отношения к комбинаторике, но не трудно убедиться). То есть мы вычитаем от нашего решения 3*(n/2+1). Но возможен случай что все 3 переменные равны, его мы вычли 3 раза, надо 2 раза сложить. Такой случай возможен только если n кратно трем.
- Ответ: При n кратном 3: C(n+2,2)-3*(n/2+1)+2

  При n не кратном 3: C(n+2,2)-3*(n/2+1)

Решение задачи 199

- Если бы цветов каждого вида было бы бесконечно много, или хотя бы больше 9, ответом была формула Муавра C(9+3-1,3-1). Однако нам нужно вычесть лишние случаи, когда мы превысили лимит на какой-то вид роз. Если мы превысили лимит на первый тип, то значит положили взяли его как минимум 4 раза, и того количество способов это сделать C(5+3-1,3-1), второй цветок чтобы превысить надо взять его минимум 5 раз, и того останется всего выбор для 4 цветов C(4+3-1,3-1), а для третьего останется 3 C(3+3-1,3-1). Но возможен случай когда мы превысили лимит на первые цветка одновременно (для остальных в данной задаче это невозможно), такой способ 1.
- Ответ: C(11,2)-C(7,2)-C(6,2)-C(5,2)+1

Любите комбинаторику!

- И всем удачи на КР!

P.S. Если понравилась преза, подпишись на паблик https://vk.com/oproseswithlove