Несобственный интеграл I-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leq x < +\infty$. Рассмотрим интеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении b интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Следовательно, по определению, имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Говорят, в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *существует или сходится*. Если $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *не существует или расходится.*

Пример НИ-I

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$.

Р е ш е н и е. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \int\limits_0^{b} \frac{dx^2}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \int\limits_0^{b} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln 1\right) = +\infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Пример НИ-I 2

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$

Р е ш е н и е. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \operatorname{arctg} x \; d \operatorname{arctg} x =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \right) \Bigg|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg}^2 b - \operatorname{arctg}^2 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Несобственные интегралы II-го рода

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a;b)$, ограничена на любом отрезке $[a;\varepsilon]$, а для любого $\varepsilon>0$, неограничена в любой $\varepsilon-$окрестности точки b. Пусть на любом отрезке $[a;\ \varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т.е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^\varepsilon f(x)\,dx$ при любом $a<\varepsilon<b$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_a^\varepsilon f(x)\,dx,$$

то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует или сходится. Если же предел $\lim\limits_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_a^\varepsilon f(x)\,dx$ не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Пример НИ-II

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Р е ш е н и е. По определению

$$\int\limits_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{b\to 1-0}\left(\int\limits_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + 2\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{b\to 1-0}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^b \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{b\to 1-0}\left(-\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 1-0} -\underbrace{\sqrt{1-b^2}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{2\arcsin b}_{\downarrow \atop \frac{\pi}{2}} - \left(-\sqrt{1-0^2} + 2\arcsin 0\right) = \pi + 1$$

Пример НИ-II 2

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{1-x^2}dx$.

Р е ш е н и е. По определению

$$\int\limits_0^1 \frac{x+2}{1-x^2}dx = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{x+2}{1-x^2}dx = \lim_{b\to 1-0}\left(\int\limits_0^b \frac{x}{1-x^2}dx + 2\int\limits_0^b \frac{dx}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{b\to 1-0}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^b \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + 2\int\limits_0^b \frac{dx}{1-x^2}\right) = \lim_{b\to 1-0}\left(-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 1-0}\left(-\frac{1}{2}\ln|1-b^2| + \ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| + \frac{1}{2}\ln|1-0^2| - \ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|\right) = \lim_{b\to 1-0}\ln\left|\frac{1+b}{(1-b^2)^{3/2}}\right| = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Признаки сходимости

Теорема (достаточный признак сходимости, признак сравнения в форме неравенств). *Если для всех* $x \geq a$ *выполняется неравенство* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, *и либо* $b = +\infty$, *либо функция* $f(x)$ *не определена в точке* b, *то из сходимости интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *а из расходимости* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *следует расходимость* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема (достаточный признак сходимости, признак сравнения в предельной форме). *Пусть* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0\ \forall\ x \in [a, b)$, *где либо* $b = +\infty$, *либо функция* $f(x)$ *не определена в точке* b, *и* $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A,\ 0 < A < +\infty$, *тогда интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

При применении признаков сравнения исследуемый интеграл сравнивают с известными интегралами

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится при } p > 1\text{, расходится при } p \leq 1$$

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится при } p < 1\text{, расходится при } p \geq 1$$

Пример исследования на сходимость НИ-I

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Р е ш е н и е. Так как $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \geq 0$ для всех $x \in [0; +\infty)$ и при $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \quad \sim \quad \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (по правилу при $p = 1$), то и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ расходится.

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ – определенный, равен какому-то конечному положительному числу, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ расходится, то исходный интеграл расходится.

Пример исследования на сходимость НИ-I 2

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\ln^3 x}$.

Р е ш е н и е. Так как $\ln x < x^a$ для всех $x > 2$ и $a > 0$, то

$$\frac{1}{\ln^3 x} > \frac{1}{x^{3a}}.$$

В частности, это неравенство верно для $0 < a < \frac{1}{3}$. Но для таких значений a, степень $0 < 3a < 1$, следовательно, интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$$

расходится, а, значит, по признаку сравнения в форме неравенств расходится и исходный интеграл.

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x}$

Р е ш е н и е. Так как для любых $x > 0$

$$\frac{1}{x+e^x} < \frac{1}{e^x},$$

а интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = 1 \text{ – сходится,}$$

то исходный интеграл сходится по признаку сравнения в форме неравенств.

Пример исследования на сходимость НИ-II

Пример 8. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}dx$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $(0;\ 1]$ и не определена в точке $x=0$.

Так как $\frac{e^x-1}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ расходится (степень x в знаменателе равна $2>1$), то и исходный интеграл расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{e^x-e}{x^3-1}dx$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $[0;\ 1)$ и не определена в точке $x=1$.

Так как

$$\frac{e^x-e}{x^3-1} = \frac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x^2+x+1)} \sim \frac{e(x-1)}{3(x-1)} = \frac{e}{3} \text{ при } x \to 1, \text{ а интеграл } \int\limits_0^1 \frac{e}{3}dx = \frac{e}{3}$$

сходится, то и исходный интеграл сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_2^5 \frac{xdx}{x^2-9}$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция не определена в точках $x = 3$ и $x = -3$ (в этих точках знаменатель подынтегральной дроби обращается в ноль), следовательно, разобьем интеграл на сумму интегралов

$$\int\limits_2^5 \frac{xdx}{x^2-9} = \int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2-9} + \int\limits_3^5 \frac{xdx}{x^2-9}.$$

Вычислим интегралы по определению

$$\int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2-9} + \int\limits_3^5 \frac{xdx}{x^2-9} = \lim_{\varepsilon \to 3-0} \int\limits_2^\varepsilon \frac{xdx}{x^2-9} + \lim_{\delta \to 3-0} \int\limits_\delta^5 \frac{xdx}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 3-0} \frac{1}{2} \int\limits_2^\varepsilon \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} + \lim_{\delta \to 3-0} \frac{1}{2} \int\limits_\delta^5 \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} = \lim_{\varepsilon \to 3-0} \frac{1}{2} \ln|x^2-9| \Big|_2^\varepsilon + \lim_{\delta \to 3-0} \frac{1}{2} \ln|x^2-9| \Big|_\delta^5 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 3-0} \frac{1}{2} \left(\ln|\varepsilon^2-9| - \ln 5\right) + \lim_{\delta \to 3-0} \frac{1}{2} \left(\ln 16 - \ln|\delta^2-9|\right) = \ln \frac{4}{\sqrt{5}} + \lim_{\substack{\varepsilon \to 3-0 \\ \delta \to 3-0}} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9}\right|.$$

Здесь $\ln \frac{4}{\sqrt{5}}$ получен применением свойств логарифма к разности

$$\frac{1}{2} \ln 16 - \frac{1}{2} \ln 5 = \ln \sqrt{16} - \ln \sqrt{5} = \ln \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Предел $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 3-0 \\ \delta \to 3-0}} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9}\right|$ не существует,

так как числитель и знаменатель дроби в аргументе логарифма стремятся к нулю и зависят от разных переменных, следовательно, неопределенность

$$\frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ при } \varepsilon \to 3-0 \text{ и } \delta \to 3-0$$

раскрыть нельзя. Таким образом, интеграл расходится.

Исследуйте интегралы на сходимость

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$$ сходится

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$ сходится

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$$ расходится

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$$ расходится

Исследуйте интегралы на сходимость

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$$ расходится

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$ сходится

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$$ расходится

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$$ расходится

Указать все расходящиеся интегралы

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$ расходится ▾

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$ расходится ▾

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$ сходится ▾

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$ расходится ▾

Исследовать интегралы на сходимость

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x-15}$$ расходится

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x+15}$$ сходится

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-15}}$$ сходится

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+15}}$$ сходится

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x^2+2x-15)^2}$$ расходится

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x^2+2x+15)^2}$$ сходится

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$1$$

Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} dx$

- $\frac{1}{3}$
- 2
- 1
- Расходится
- 0

Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$

- 0
- - ln 2
- Расходится
- ln 2
- 1