

Кривые второго порядка

- Общее уравнение кривой второго порядка
- Эллипс
- Гипербола
- Парабола

Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: *эллипс*, частным случаем которого является *окружность*, *гипербола* и *парабола*.

Они задаются уравнением второй степени относительно x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

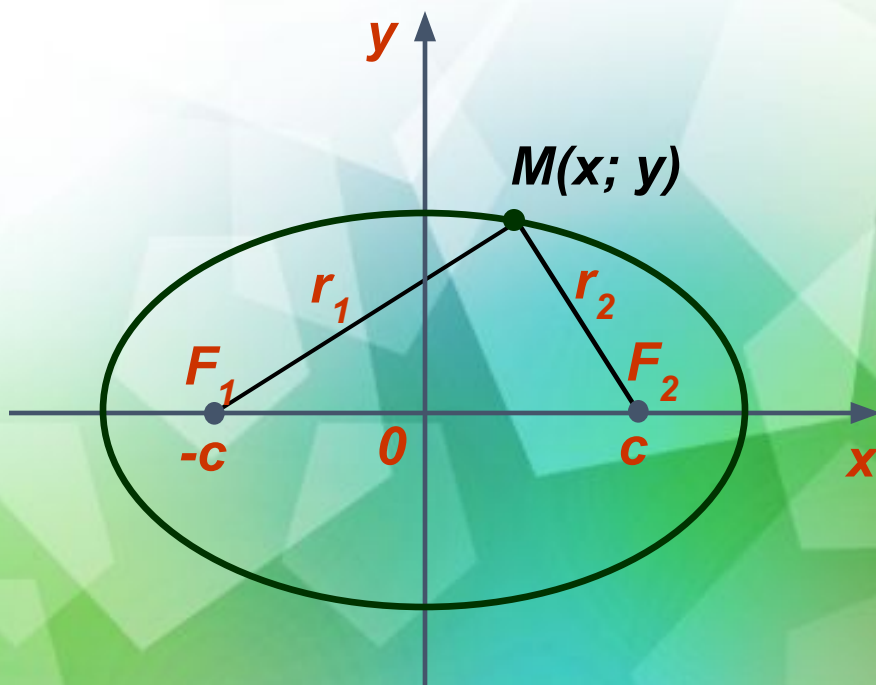
Общее уравнение кривой
второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** эллипса.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение эллипса

Эллипс

где $a > 0$, $b > 0$, $a > b > 0$ — большая и малая полуоси эллипса, то фокусы эллипса расположены симметрично на оси абсцисс и имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, где

Величина $e = c/a$ называется эксцентриситетом эллипса

Эллипс

Отношение b/a характеризует "сплюснутость" эллипса. Чем меньше это отношение, тем сильнее эллипс вытянут вдоль большой оси. Однако степень вытянутости эллипса чаще принято выражать через эксцентриситет, формула которого приведена выше. Для разных эллипсов эксцентриситет меняется в пределах от 0 до 1, оставаясь всегда меньше единицы.

Эллипс

По определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$, r_1 и r_2 – фокальные радиусы, их длины вычисляются по формулам

Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс является окружностью.

Эллипс

Пример 1. Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением , эллипсом.

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

Решение

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Эллипс

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10.

Решение. Если большая ось равна 10, то её половина, т. е. полуось $a = 5$, если расстояние между фокусами равно 8, то число c равно 4.

Решение

Подставляем и вычисляем:

$$4 = \sqrt{25 - b^2}$$

$$16 = 25 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9.$$

Получаем искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Эллипс

Пример 3. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая ось равна 26 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$

Решение. Как следует и из размера большей оси, и из уравнения эксцентриситета, большая полуось эллипса $a = 13$. Из уравнения эксцентриситета выражаем число c , нужное для вычисления длины меньшей полуоси:

Решение

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow c = 12$$

$$c = \sqrt{169 - b^2}$$

$$144 = 169 - b^2$$

$$b^2 = 169 - 144 = 25$$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Эллипс

Пример 4. Определить фокусы эллипса, заданного каноническим уравнением .

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Решение. Следует найти число c , определяющее первые координаты фокусов эллипса:

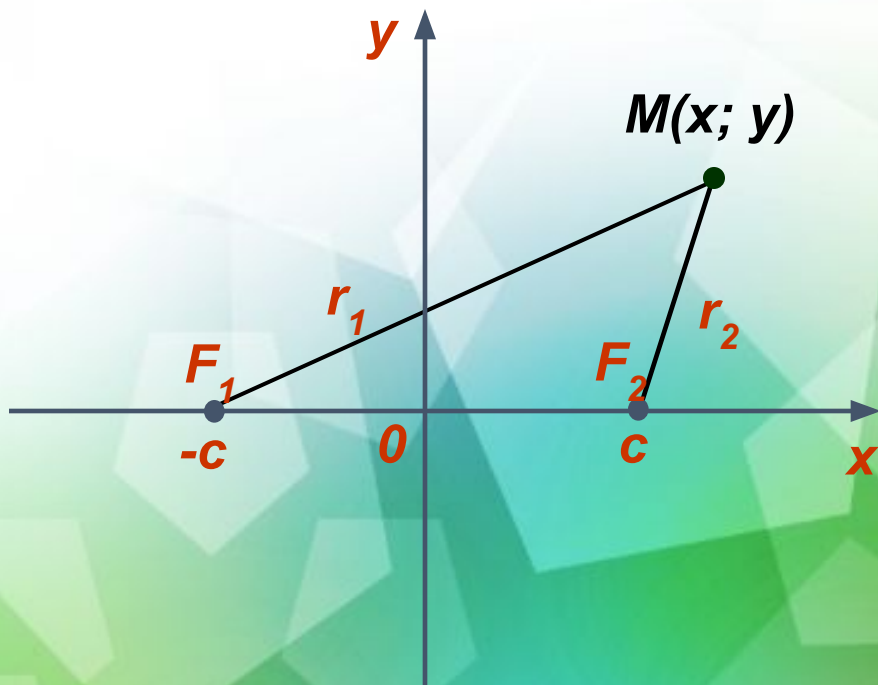
$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

$$F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$$

Получаем фокусы эллипса:

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** гиперболы.



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение гиперболы

Гипербола

где $a > 0$, $b > 0$ — параметры гиперболы.

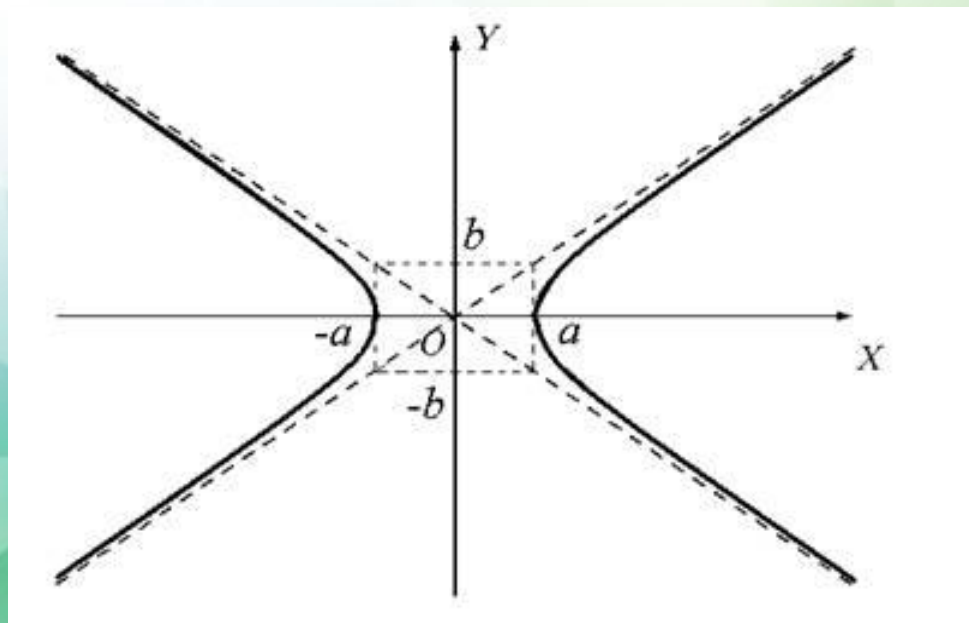
Система координат, в которой гипербола описывается каноническим уравнением, называется канонической.

В канонической системе оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — ее центром симметрии.

Точки пересечения гиперболы с осью OX ($\pm a$, 0) называются вершинами гиперболы.

Гипербола

С осью OY гипербола не пересекается.
Отрезки a и b называются полуосями гиперболы.



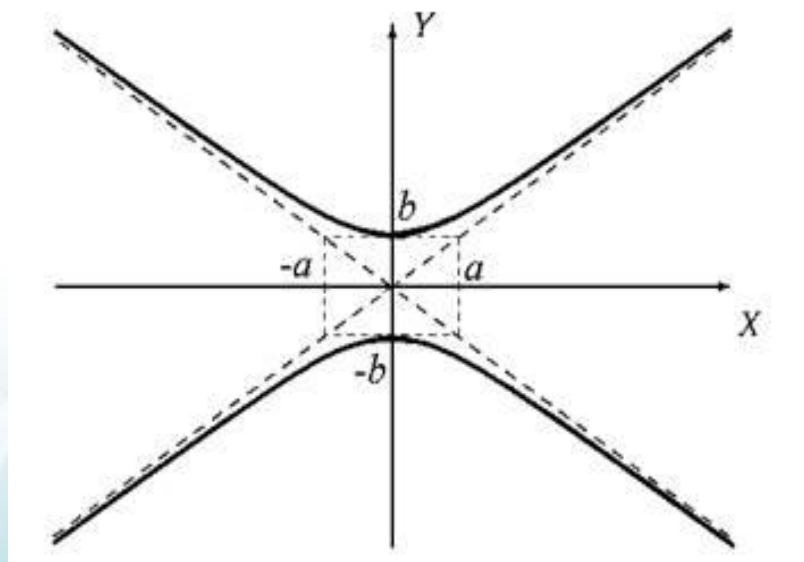
Гипербола

Прямые $ay - bx = 0$ и $ay + bx = 0$ — асимптоты гиперболы, при удалении точки гиперболы в бесконечность, соответствующая ветвь гиперболы приближается к одной из асимптот.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Уравнение описывает гиперболу, вершины которой лежат на оси OY в точках $(0, \pm b)$.

Гипербола



Такая гипербола называется сопряженной .
Говорят о паре сопряжённых гипербол.

Гипербола

Пример 1. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его действительная полуось $a = 5$ и мнимая $b = 3$.

Решение. Подставляем значения полуосей в формулу канонического уравнения гиперболы и получаем:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Гипербола

Точки пересечения гиперболы с её действительной осью (т. е. с осью Ox) называются вершинами. Это точки $(a, 0)$ $(-a, 0)$.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются фокусами гиперболы.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$

называется эксцентриситетом гиперболы.

Гипербола

Пример 2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

Решение. Если действительная полуось равна 8, то её половина, т. е. полуось $a = 4$,

Если расстояние между фокусами равно 10, то число c равно 5. Для того, чтобы составить уравнение гиперболы, потребуется вычислить квадрат мнимой полуоси b .

Гипербола

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$5 = \sqrt{16 + b^2}$$

$$25 = 16 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Гипербола

Пример 3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её действительная $\varepsilon = \frac{13}{12}$ равна 48 и эксцентриситет .

Решение. Действительная полуось $a = 24$. А эксцентриситет - это пропорция и так как $a = 24$, то коэффициент пропорциональности отношения c и a равен 2. Следовательно, $c = 26$. Из формулы числа c выражаем квадрат мнимой полуоси и вычисляем:

Гипербола

$$26 = \sqrt{576 + b^2}$$

$$676 = 576 + b^2$$

$$b^2 = 676 - 576 = 100.$$

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$$

Гипербола

Характерной особенностью гиперболы является наличие асимптот - прямых, к которым приближаются точки гиперболы при удалении от центра. Асимптоты гиперболы определяются

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

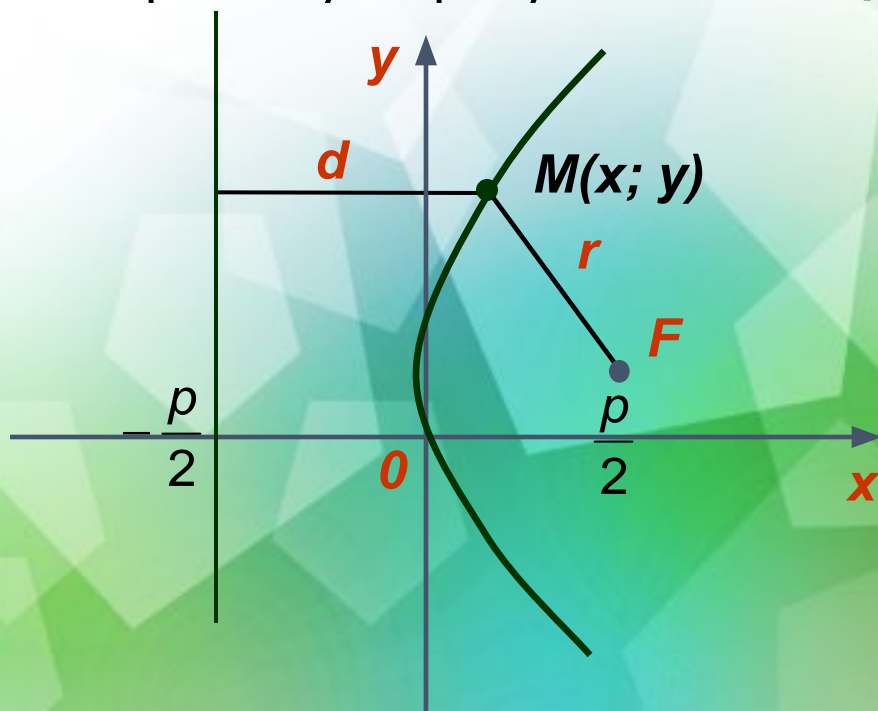
Прямые, определяемые уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки той же плоскости

$F(\frac{p}{2}; 0)$ называемой **фокусом**, равно расстоянию до прямой: $x = -\frac{p}{2}$

Фиксированную прямую называют **директрисой** параболы.



$$r = d \quad F(\frac{p}{2}; 0) \quad p > 0$$

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = x + \frac{p}{2}$$

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, таких, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px$$

, где число p , называемое параметром параболы, есть расстояние от фокуса до директрисы.

Парабола

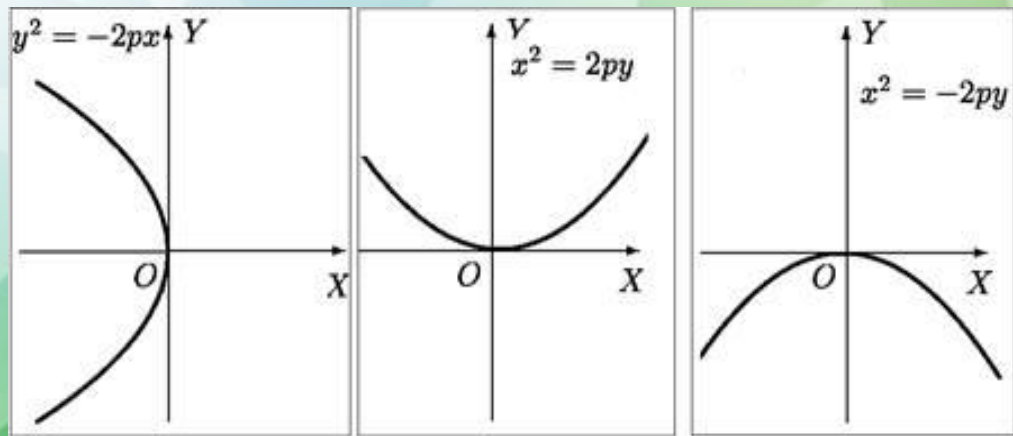
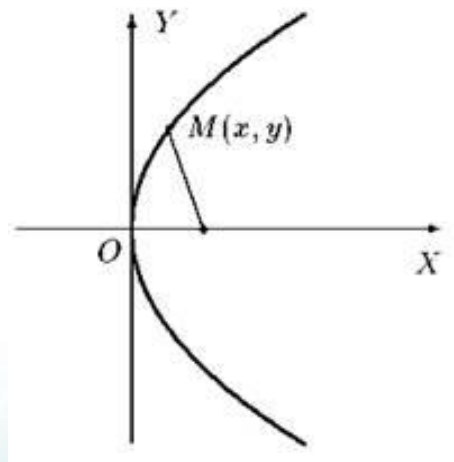
Фокус параболы имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Директриса параболы определяется уравнением $x = -\frac{p}{2}$

Расстояние r от любой точки параболы до фокуса определяется формулой .

Для каждой из точек параболы расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Парабола



Парабола

Пример 1. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = 4x$

Решение. Число p расстояние от фокуса параболы до её директрисы.

Находим p :

$$\begin{aligned} 4 &= 2p \\ p &= 2 \end{aligned}$$

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$F(1, 0)$$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Общее уравнение кривой называется пяти-членным, если $2Bxy=0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Приведение пяти-членного уравнения к каноническому виду рассмотрим на примере:

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$(16x^2 - 32x) + (25y^2 + 50y) - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 2y) = 359 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 2y + 1) = 359 + 16 + 25 \Rightarrow$$

$$16(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$$