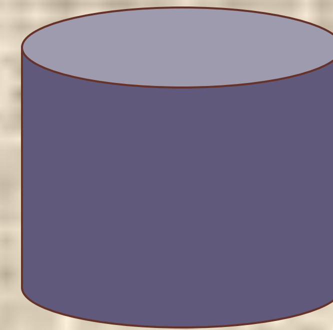
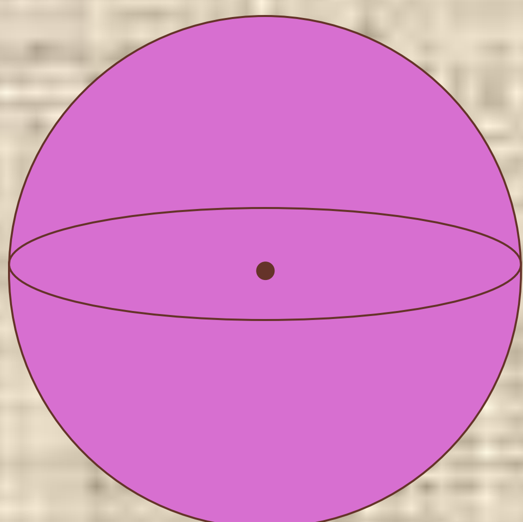
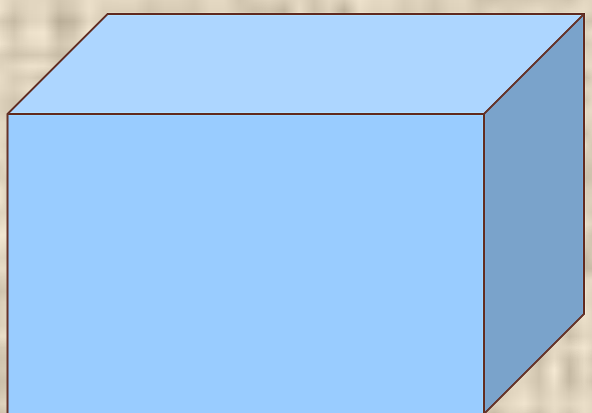
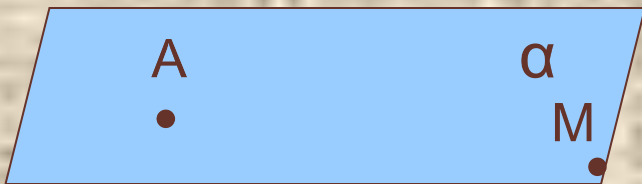


Повторим стереометрию

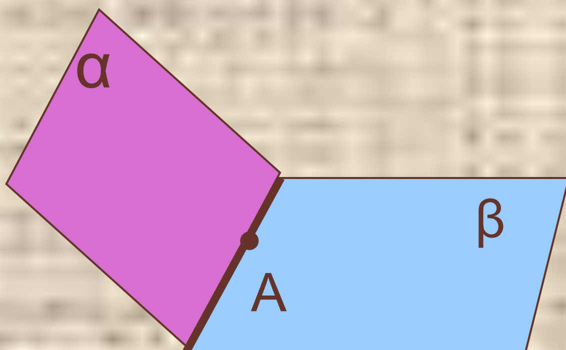




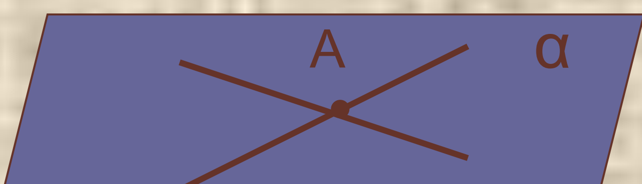
Аксиомы стереометрии



1.Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости и не принадлежащие ей. $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$

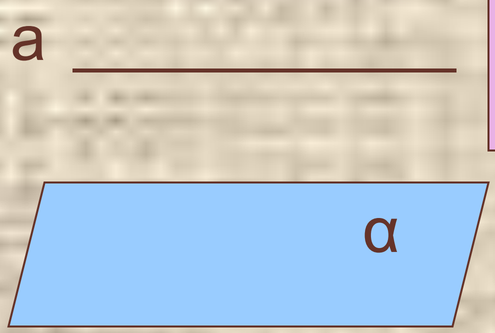


2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.



3.Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, И при том, только одну.

Параллельность прямой и плоскости



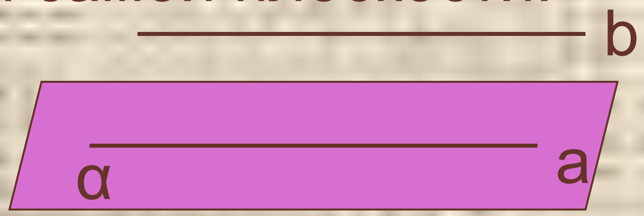
Прямую и плоскость называют параллель-ными, если они не пересекаются.

a // α

Параллельность прямой и плоскости

Признак

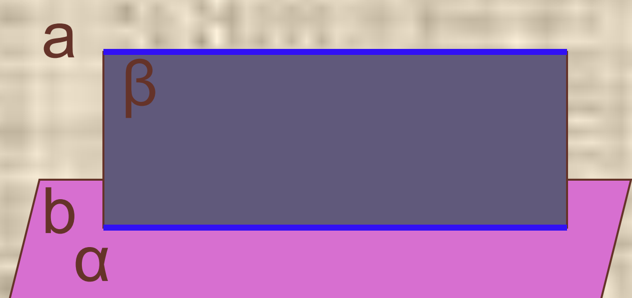
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна прямой, принадлежащей этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



Если b // a, ***то*** b // α

Свойство

Если через прямую, параллельную плоскости, провести вто-рую плоскость, пересекающую первую, то прямая пересечения Плоскостей параллельна первой прямой.



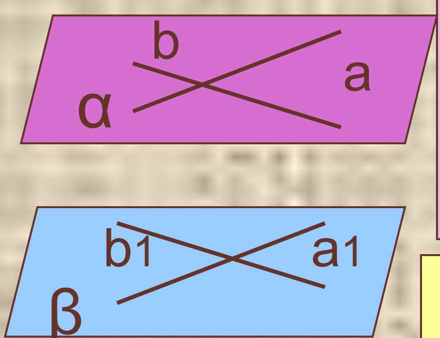
Если a//α, a β проходит через a и пересекает α по b, ***то*** a//b.

Параллельность плоскостей

Две плоскости называются ***парал-лельными***, если они не пересекаются.

$\alpha \parallel \beta$

Признак



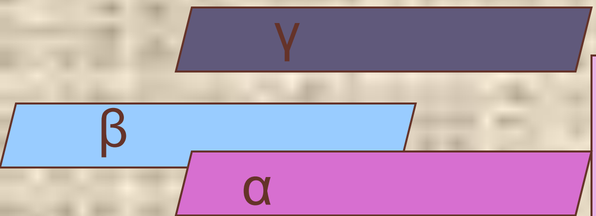
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Если $a // a_1$, $b // b_1$, **то** $\alpha // \beta$

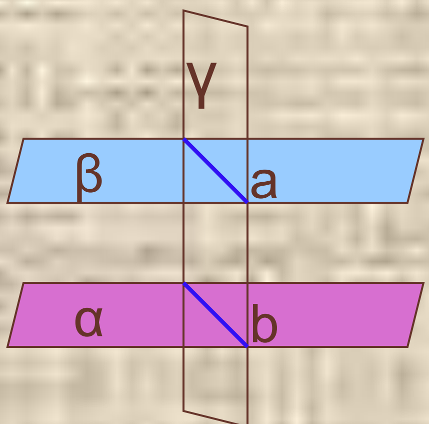
(a и b принадлежат α, a_1 и b_1 принадлежат β)

Параллельность плоскостей

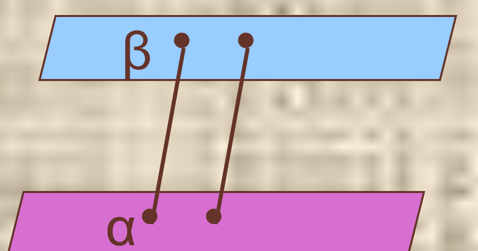
Свойства



Если две различные плоскости парал-
лельны третьей, то они паралельны
между собой.

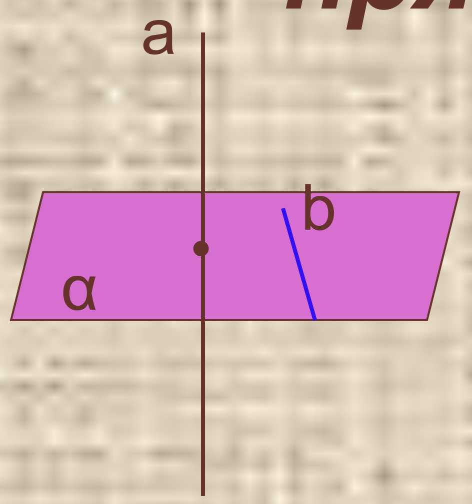


Если две параллельные плоскости пере-
секаются третьей, то прямые пересе-
чения параллельны.



Отрезки параллельных прямых, заключен-
ные между параллельными плоскостями,
равны.

Перпендикулярность прямой и плоскости

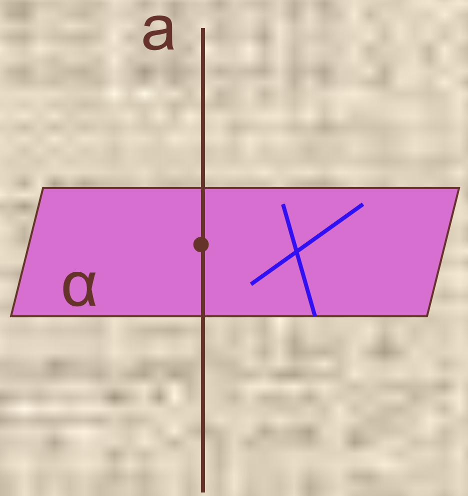


Прямую, пересекающую плоскость, называют ***перпендикулярной к этой плоскости***, если она перпендикулярна любой прямой , лежащей в данной плоскости.

a ⊥α ⇔ a⊥ b, где b-любая прямая плоскости α

Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

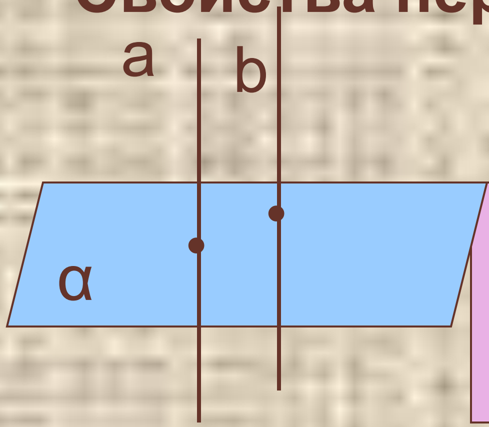


Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

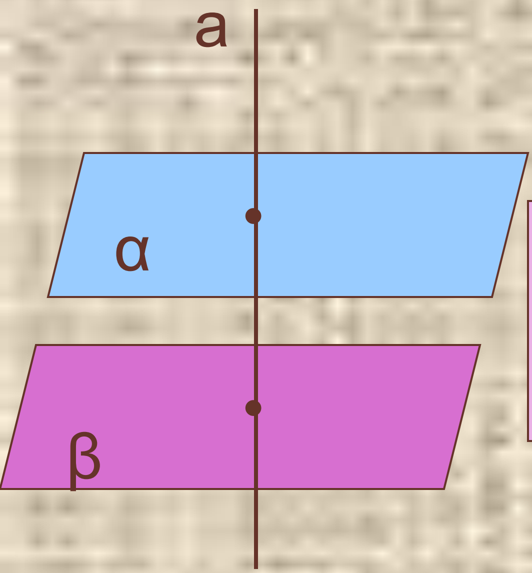
Если $a \perp b$ и $a \perp c$ $(b \cap c)$, ***то*** $a \perp \alpha$

Перпендикулярность прямой и плоскости

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

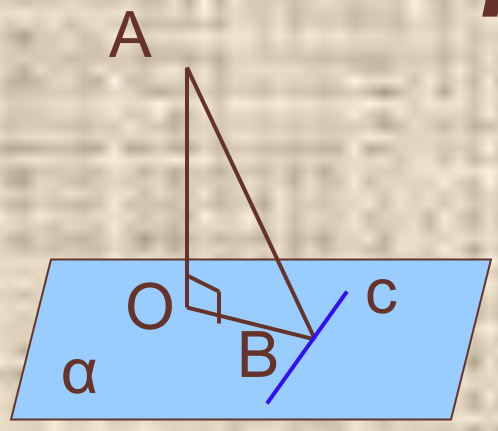


Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



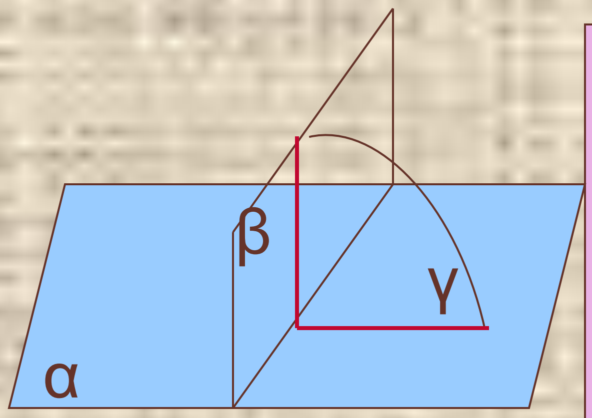
Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

Теорема о трех перпендикулярах



Если прямая на плоскости перпенди-кулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.

Перпендикулярность плоскостей



Две пересекающиеся плоскости называют ***перпендикулярными***, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым

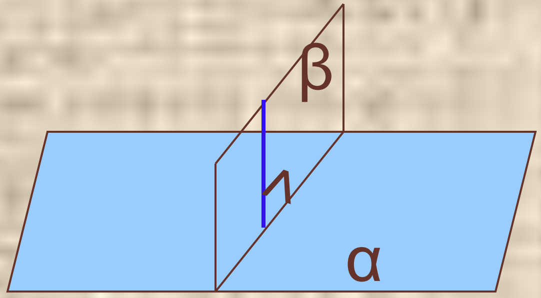
Перпендикулярность плоскостей

Признак

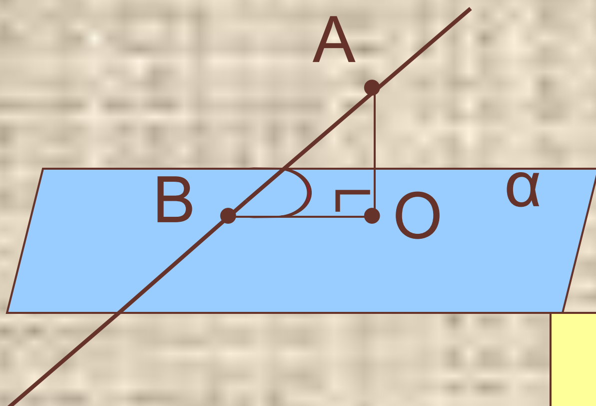
Если плоскость проходит через прямую, перпенди-кулярную другой плоскос-ти, то эти плоскости перпендикулярны.

Свойство

Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

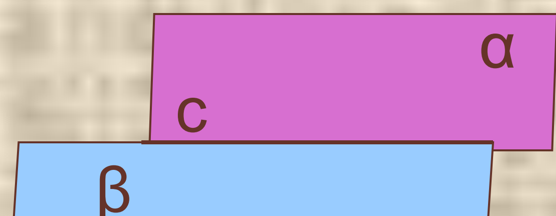


Углы в пространстве



Углом между прямой и пересекающей ее плоскостью называют угол, образованный этой прямой и ее проекцией на плоскость.

<ABO- угол между AB и α

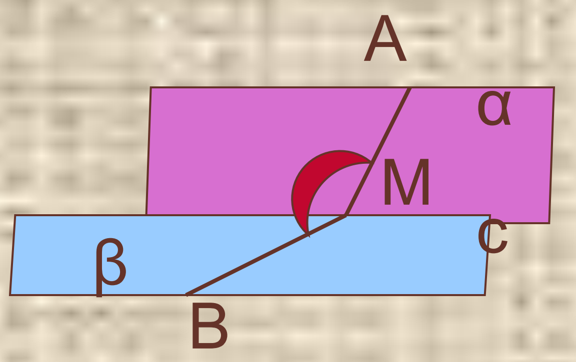


Двугранным углом называют фигуру, образованную двумя полуплоскостями с общей ограничивающей прямой.

Полуплоскости α и β –грани двугранного угла

c- ребро двугранного угла

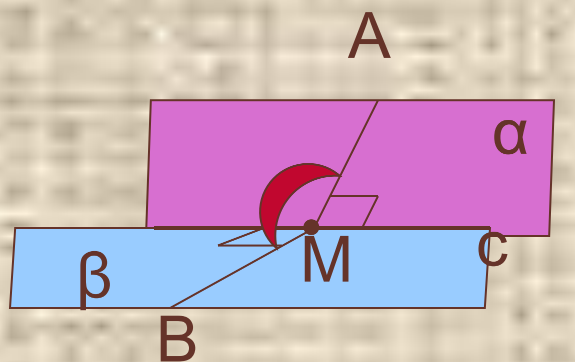
Линейный угол двугранного угла



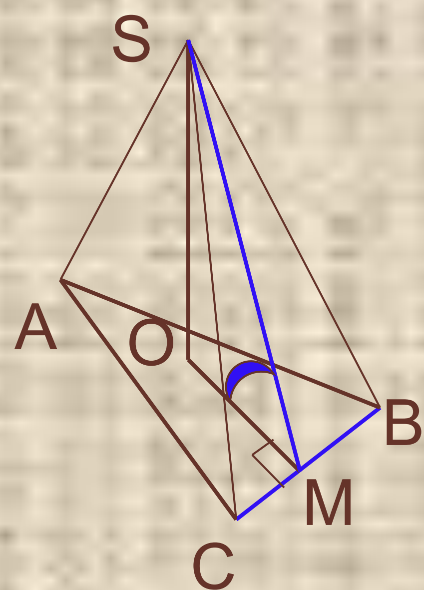
Линейным углом двугранного угла называют угол между лучами, по кото-рым плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани.

<AMB- линейный угол

Практические приемы построения линейного угла

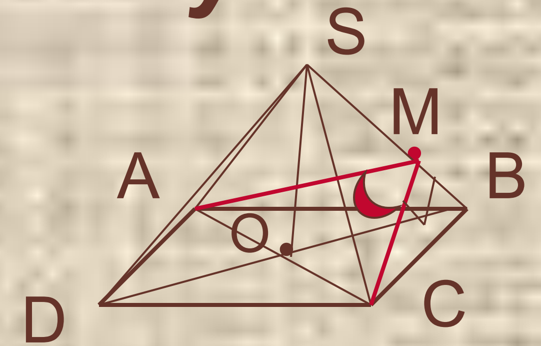


<AMB- линейный



SO-высота пирамиды
проводим OM ⊥ BC
соединяем S и M
SM ⊥ BC по т.о 3-х ⊥

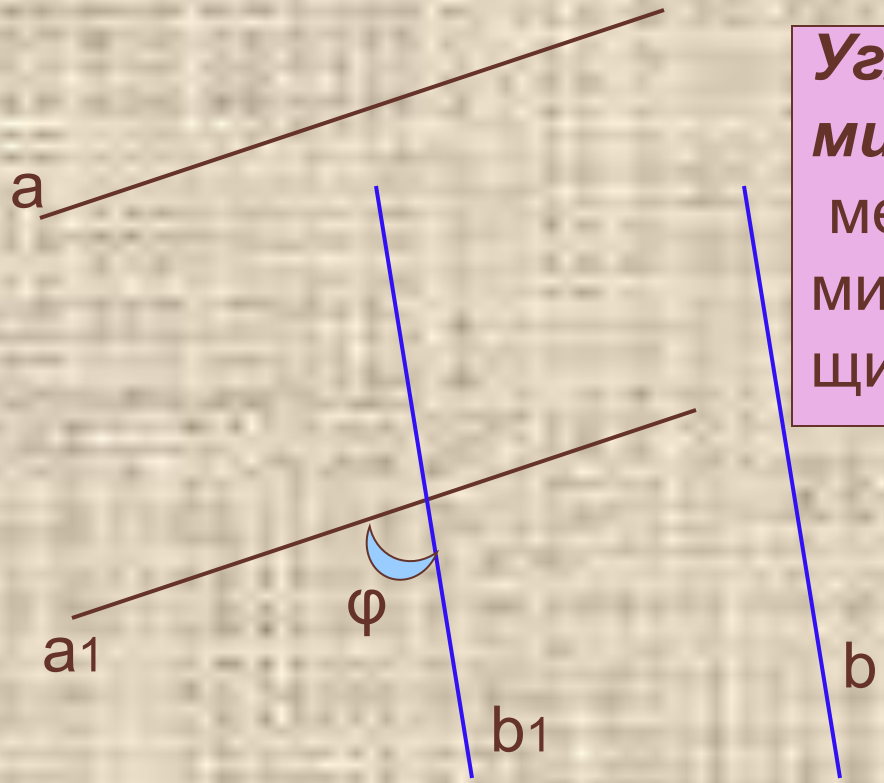
<SMO-линейный угол



SABCD-прав. пирамида
Проводим CM ⊥ SB и соединяем A и M.
Т.к. AM ⊥ SB, то

<AMC- линейный при ребре SB

Угол между скрещивающимися прямыми

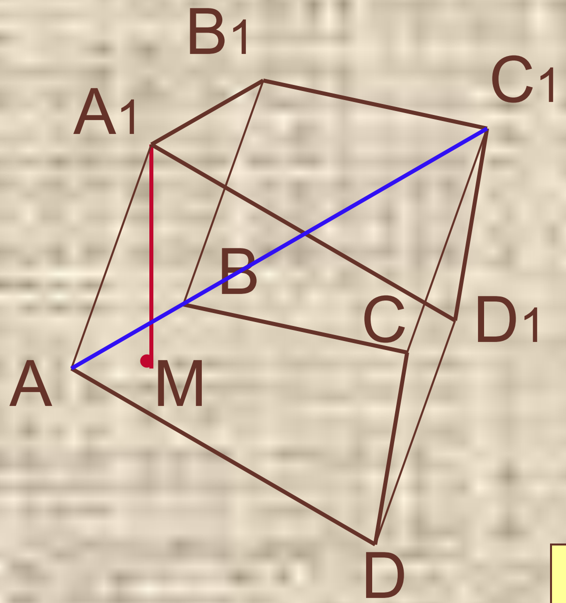


Углом между скрещивающими-ся прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

$a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$

$<(a,b)=<(a_1,b_1)=\varphi$

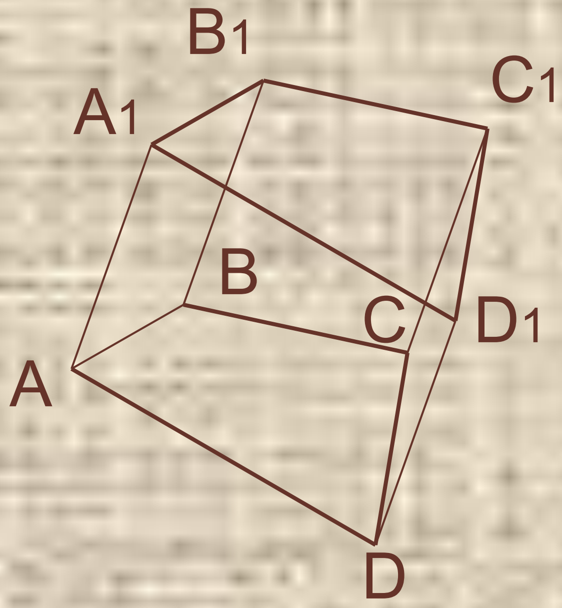
Призма



Призмой называют многогранник, состоящий из двух плоских многоуголь-ников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным пере-носом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих много-угольников.

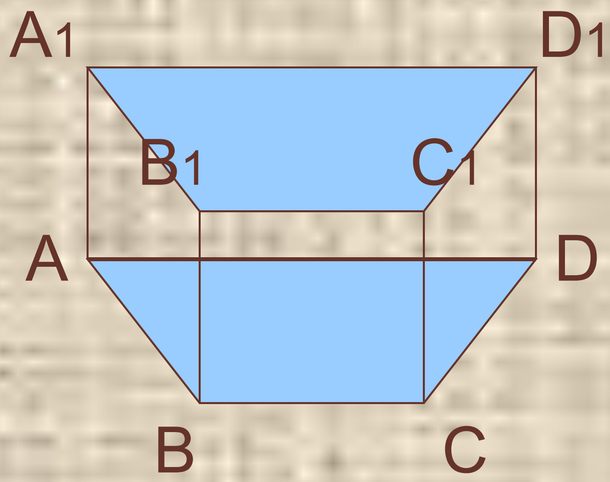
$ABCD, A_1B_1C_1D_1$-основания $AA_1, BB_1, \ldots$-боковые ребра
AC_1-диагональ (отрезок, соединяющий две вершины, на принадлежащей одной грани.)
Высота призмы- расстояние между плос-костями ее оснований. $A_1M=h$-высота

Свойства призмы



- Основания призмы равны.
- Основания призмы лежат в парал-лельных плоскостях.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.
- Боковые грани призмы – параллело-граммы.
- $V=S_{осн.}\cdot h$
- $S_{п.п.}=S_{б.п.}+2S_{осн.}$

Прямая призма



Призму называют ***прямой***, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

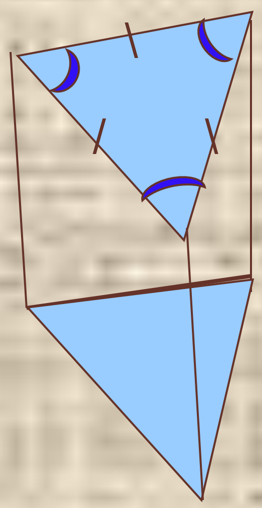
$AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$,…

свойства

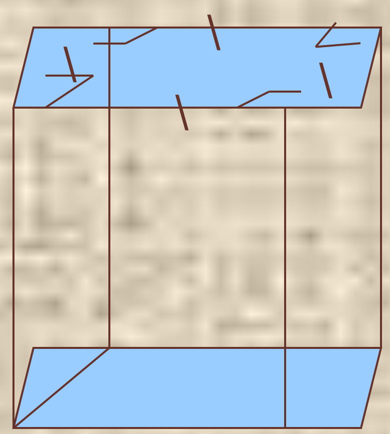
- У прямой призмы высота равна боковому ребру.
- Боковые грани прямой призмы- прямоугольники.
- $V_{пр.пр.} = S_{осн.} \cdot h = S_{осн.} \cdot AA_1$
- $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$
- $S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{б.п.}$

Правильная призма

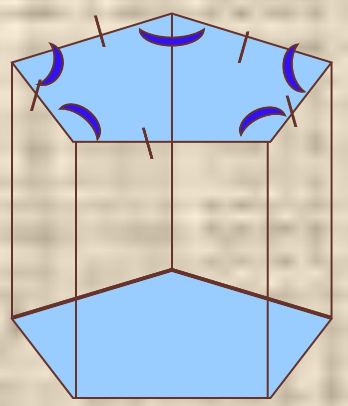
Прямую призму называют ***правильной***, если ее основания являются правильными многоугольниками.



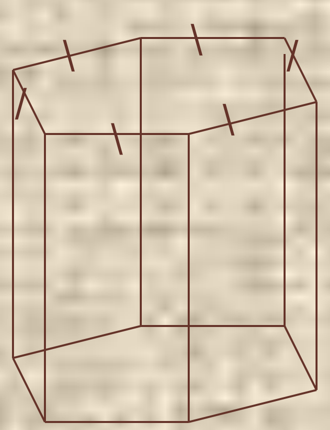
треугольная



четырехугольная

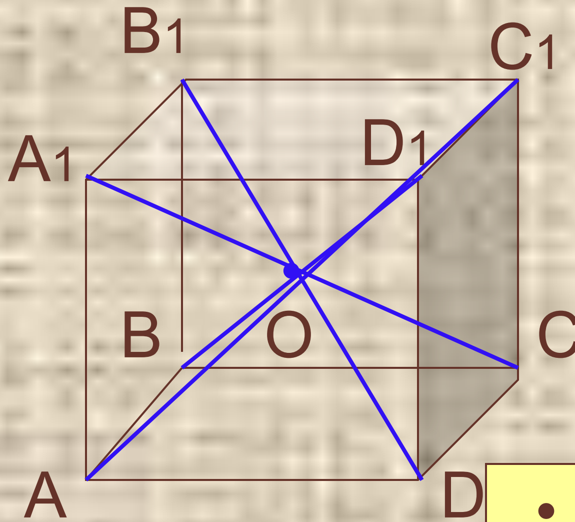


пятиугольная



шестиугольная

Параллелепипед



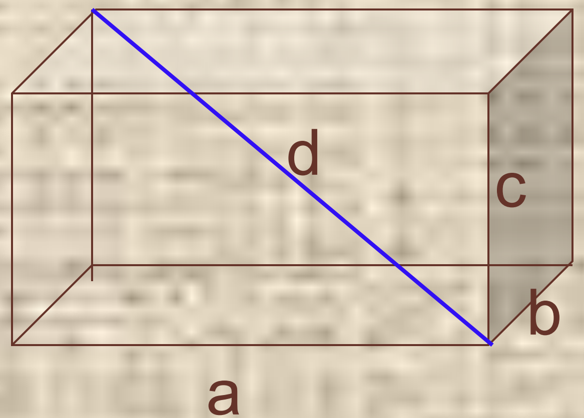
Параллелепипедом называют призму, в основании которой лежит параллелограмм.

свойства

- У параллелепипеда все грани- параллелограммы.
- У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Параллелепипед

Прямоугольный параллелепипед-это параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник.



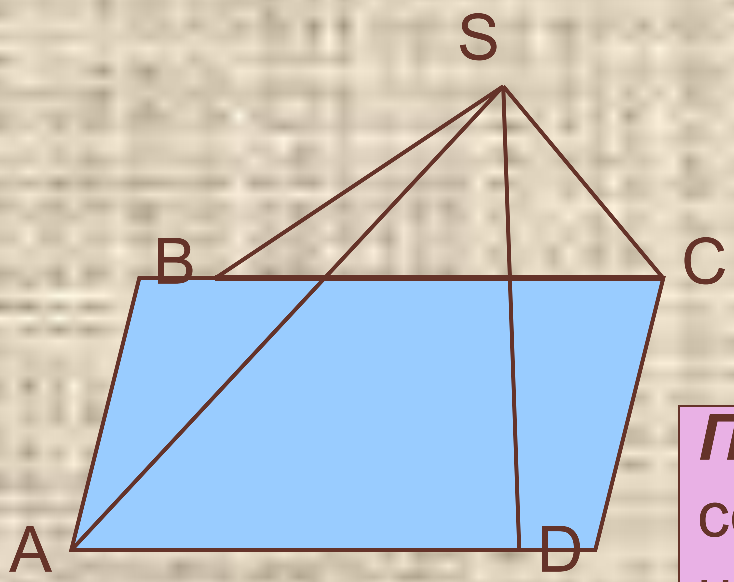
Свойства

- У прямоугольного параллелепипеда все грани-прямоугольники
- В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

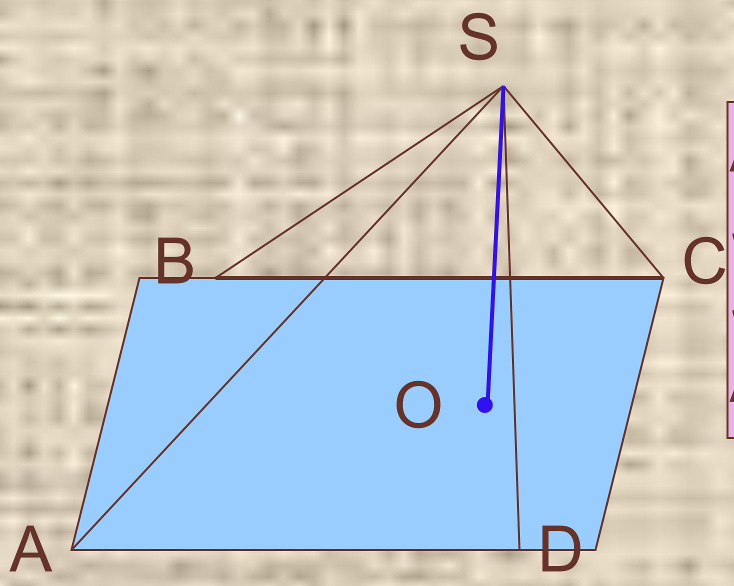
- Vпрям.пар.=abc
- Sб.п.=Росн.·h
- Sп.п.=Sп.п.+2Sосн.

Пирамида



Пирамидой называют многогранник, состоящий из плоского многоуголь-ника(основания пирамиды),точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды),и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Пирамида



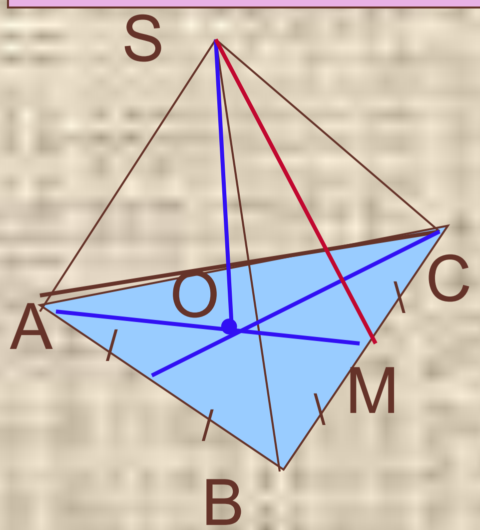
ABCD- основание пирамиды
S-вершина
SA,SB,SC,SD- боковые ребра
ΔABS, ΔBSC, ΔCSD, ΔASD-бок.грани

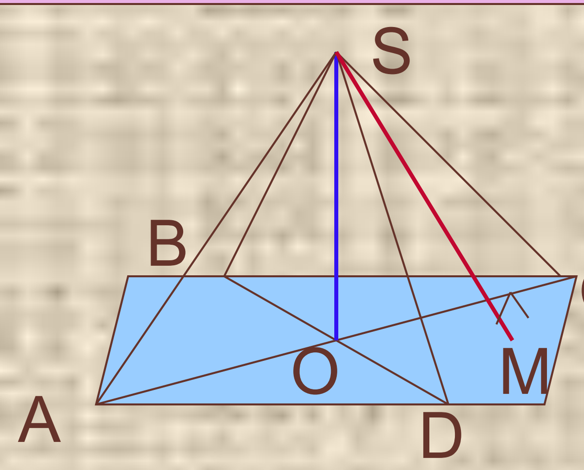
Высота пирамиды- перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

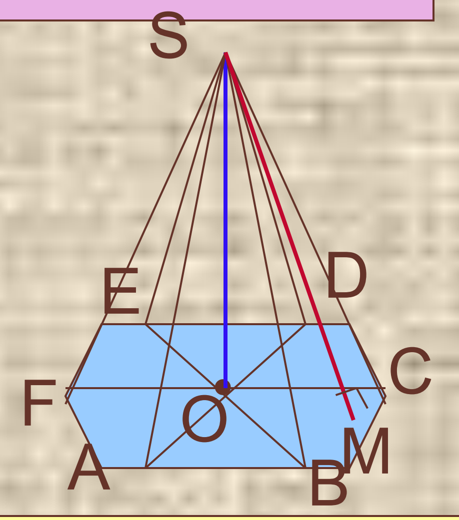
SO=h-высота пирамиды
Vпир.=1/3Sосн.·h
Sп.п.=Sб.п.+Sосн.

Правильная пирамида

Пирамиду называют ***правильной***, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.







ΔABC-правильный
О-точка тересечения медиан,центр впис. и опис.окружности.

ABCD-квадрат
О-точка пересечения диагоналей

ABCDEF-прав. 6-угольн.О-точка пересечения диаг.

SO-высота пирамиды, SM-апофема

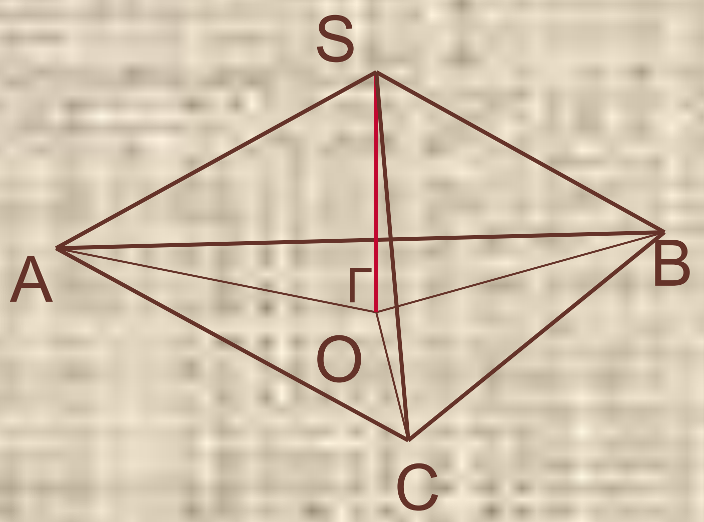
Правильная пирамида

Свойства

- У правильной пирамиды боковые ребра равны и одинаково наклонены к плоскости основания.
- Боковые грани правильной пирамиды- равные равнобедрен-ные треугольники, одинаково наклоненные к основанию.
- $S_{б.п.}=1/2P_{осн.}\cdot SM$, где SM-апофема
- $S_{б.п.}=S_{бок.гр.}\cdot n$, где n-число граней
- $S_{п.п.}=S_{б.п.}+S_{осн.}$
- $V_{пир.}=1/3S_{осн.}\cdot h$

Положение высоты в некоторых видах пирамид

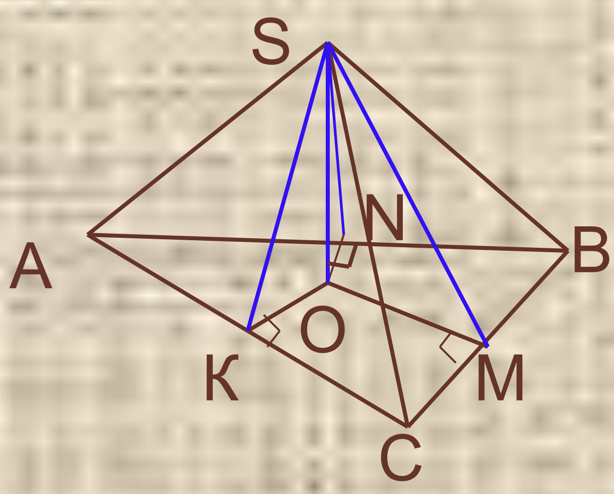
1.***Если*** все боковые ребра пирамиды равны или наклонены под одним углом к плоскости основания, или образуют равные углы с высотой пирамиды, ***то основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания*** (и наоборот).



SO$\perp$AO,AO=Rопис.
<SAO-угол наклона бок.ребра
к плоскости основания

Положение высоты в некоторых видах пирамид

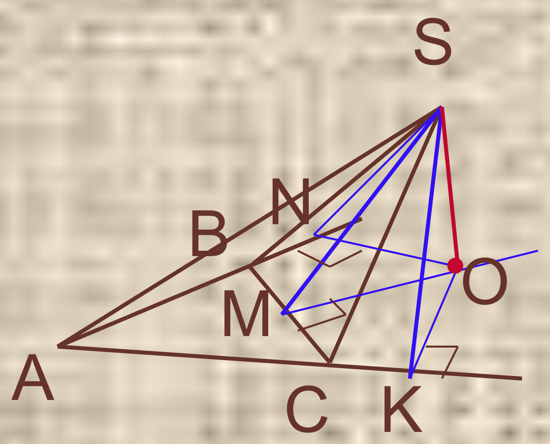
2.***Если*** все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, ***то основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в основание*** (и наоборот)



<SKO=<SMO=<SNO, то
OK=OM=ON=r
(O- центр вписанной окружности)

Положение высоты в некоторых видах пирамид

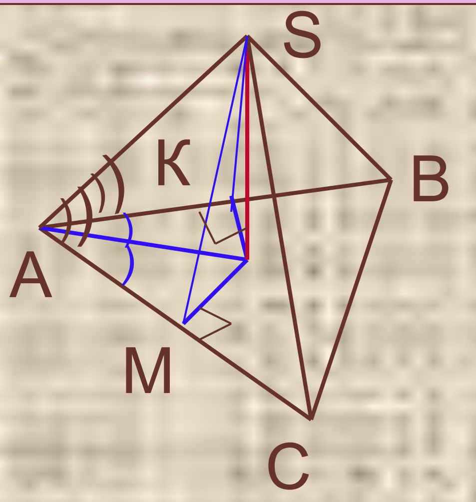
3.***Если*** все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, ***то основанием высоты пирамиды является точка, равноудаленная от всех прямых, содержащих стороны основания.***



Если в пирамиде SABC боковые грани одинаково наклонены к (ABC), т.е. <SMO=<SKO=<SNO-соответствующие линейные углы равны, и SO⊥(ABC), то O-точка, равноудаленная от прямых AB,BC,AC.(OK=OM=ON).

Положение высоты в некоторых видах пирамид

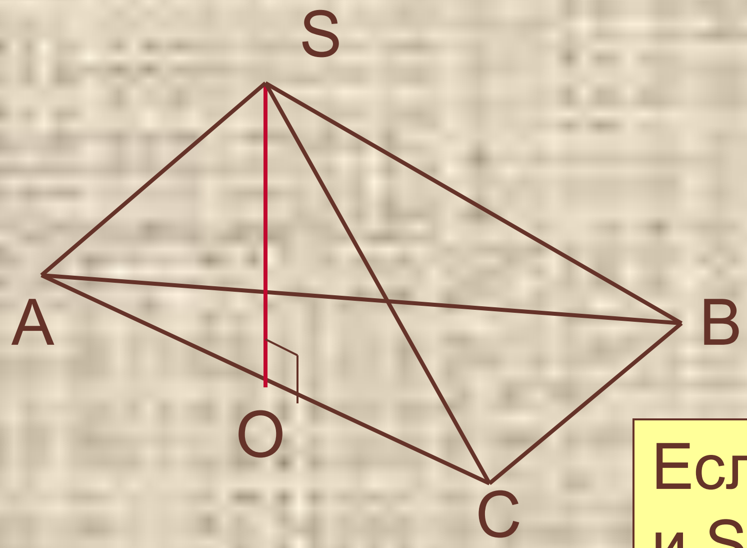
4.***Если*** только две боковые грани пирамиды одинаково накло-нены к основанию или боковое ребро этих граней образует равные углы со смежными с ними сторонами основания, ***то это общее боковое ребро проектируется на прямую, содержащую биссектрису угла между смежными с этим ребром сторонами основания.***



Если в пирамиде SABC грани SAB и SAC одинаково наклонены к (ACB),т.е. <SKO=<SMO или <SAB=<SAC и SO⊥(ABC), то AO-биссектриса<BAC

Положение высоты в некоторых видах пирамид

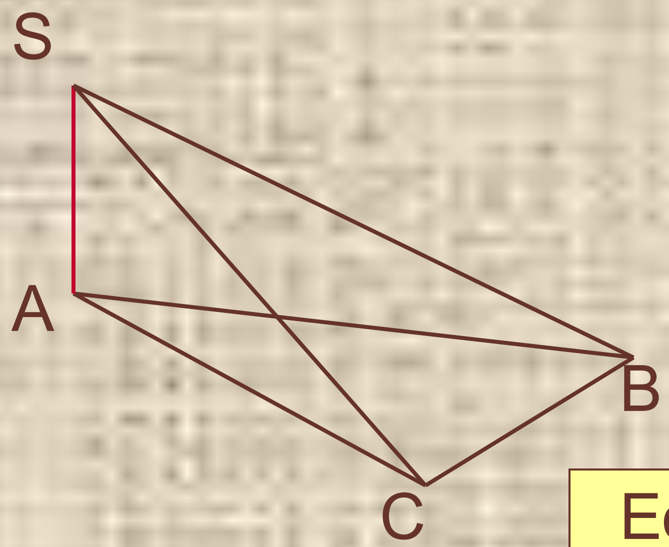
5.***Если*** только одна боковая грань пирамиды перпенди-
кулярна плоскости основания, ***то высотой пирамиды будет высота этой грани.***



Если в пирамиде SABC (SAC)⊥(ABC) и SO⊥AC (O∈AC), то SO-высота.

Положение высоты в некоторых видах пирамид

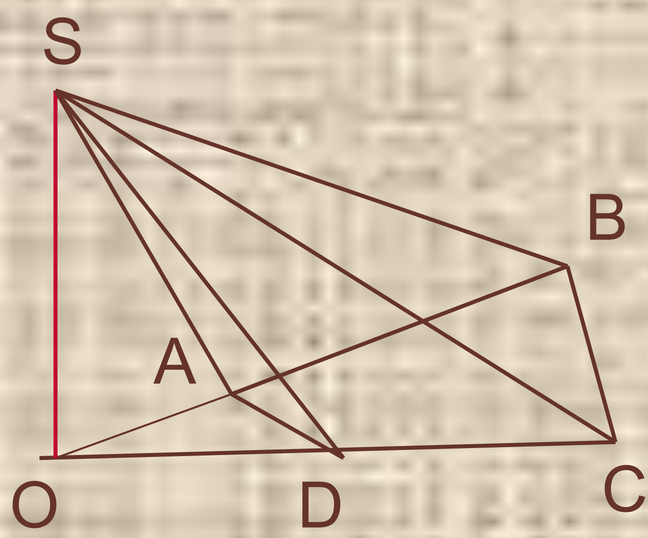
6***.Если*** две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, ***то высотой пирамиды будет их общее боковое ребро.***



Если (SAB)$\perp$(ABC) и (SAC)$\perp$(ABC), то SA-высота пирамиды.

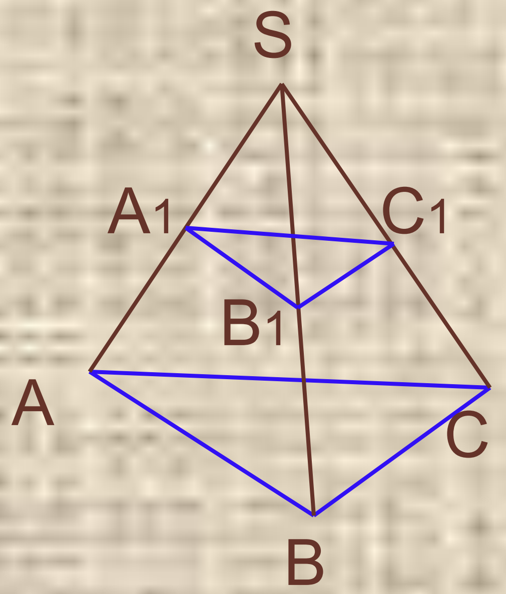
Положение высоты в некоторых видах пирамид

7.***Если*** две несмежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, ***то высотой пирамиды будет отрезок прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.***



Если $(SAB) \perp (ABC)$,
$(SCD) \perp (ABC)$
и $(SAB) \cap (SCD) = SO$,
то SO – высота пирамиды.

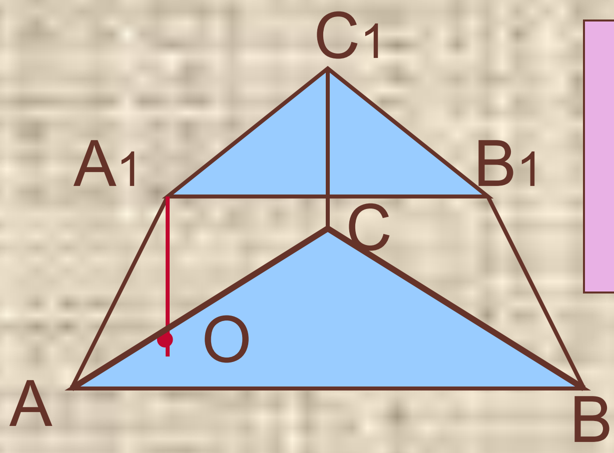
Усеченная пирамида



Если задана пирамида SABC и проведена ($A_1B_1C_1$) параллельная основанию пирамиды , то эта плоскость отсекает от данной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. Другую часть данной пирамиды называют усеченной пирамидой

Грани ABC и $A_1B_1C_1$ –основания
(ABC)ll($A_1B_1C_1$),
Боковые грани-трапеции.

Усеченная пирамида



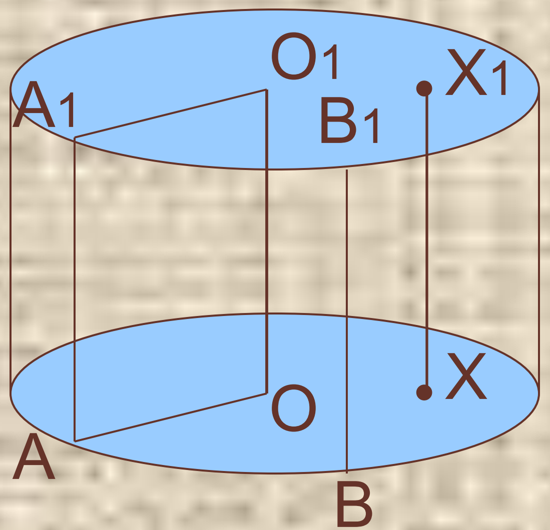
Высотой усеченной пирамиды называют расстояние между плоскостями ее оснований.

$A_1O \perp (ABC)$, A_1O-высота

$V_{ус.пир.} = 1/3h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$

S_1, S_2-площади оснований

Цилиндр



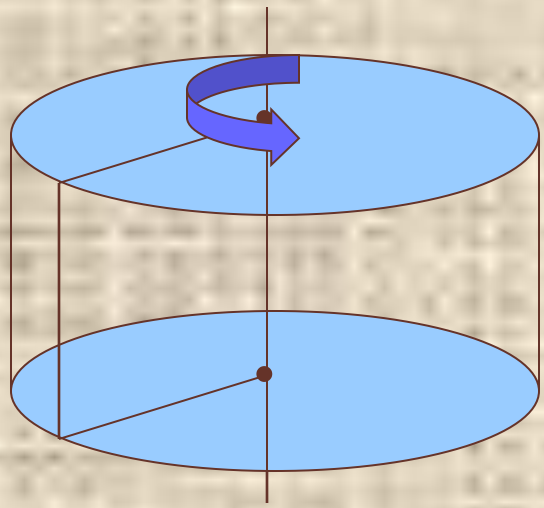
Цилиндром называют тело, состоящее из двух кругов , не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Основания цилиндра- круги

Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,- ***образующие***.

AA_1, BB_1- образующие

Цилиндр

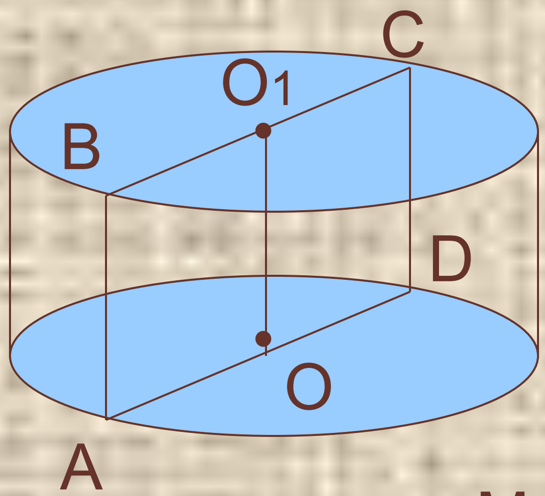


Цилиндр называют ***прямым***, если его образующие перпендикулярны плоскостям основания.

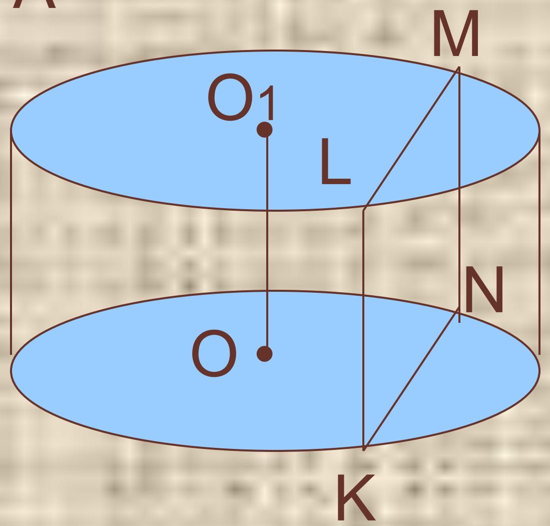
Свойства

- Основания цилиндра параллельны и равны.
- Образующие цилиндра параллельны и равны.
- Высота цилиндра равна образующей.
- Цилиндр образуется при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси.
- $S_{осн.} = \pi R^2$; $S_{б.п.} = 2\pi Rh$; $S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2S_{осн.} = 2\pi R(R+h)$
- $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h = \pi R^2 h$

Сечение цилиндра плоскостями

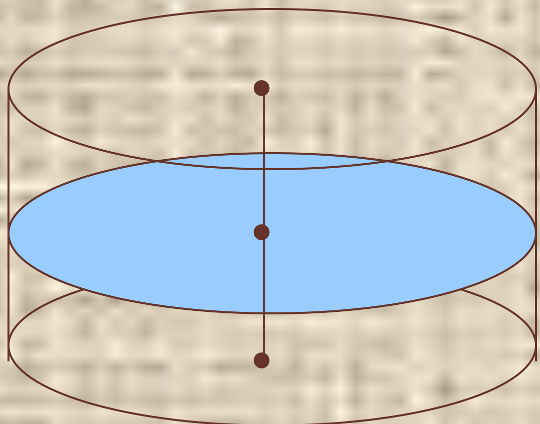


ABCD-осевое сечение-прямоугольник
AD=2R, AB=h



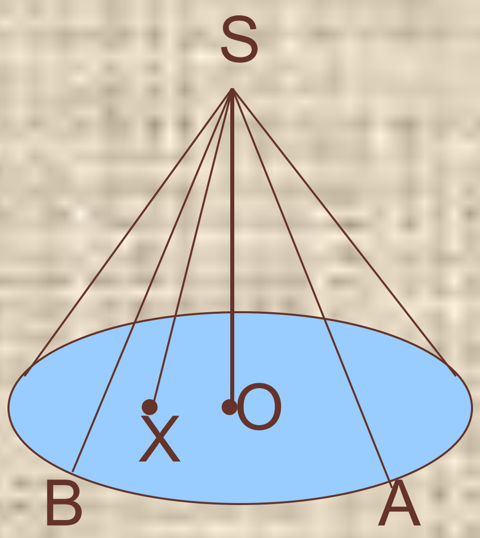
(KLM)IIOO1, KLMN-прямоугольник
KL=MN=h- образующие

Сечение цилиндра плоскостями



Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
Rсеч.=Rцил.

Конус



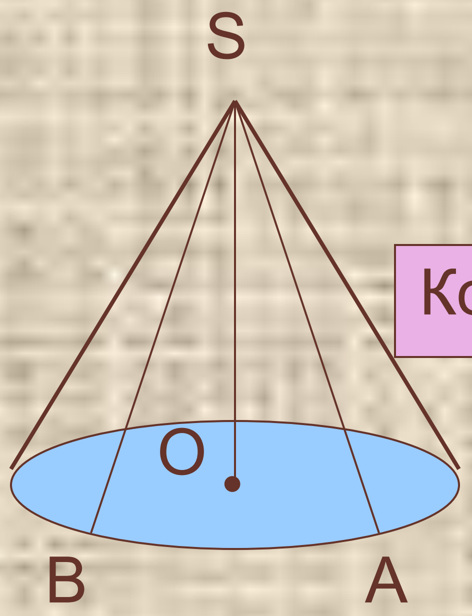
Конусом называют тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих данную точку с точками круга.

Круг-основание конуса
S-вершина конуса

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания,- ***образующие конуса.***

SA,SB-образующие конуса

Конус

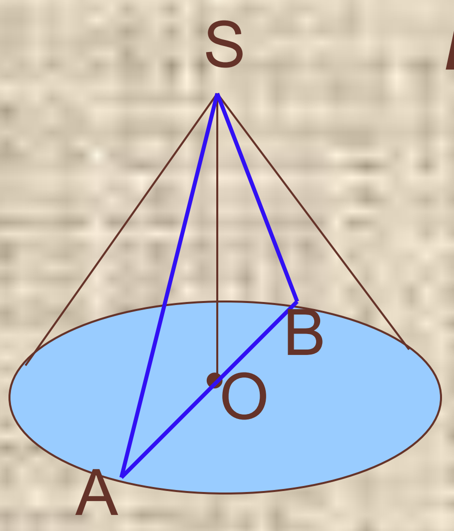


Конус называется ***прямым***, если $SO \perp (AOB)$

Свойства

- Образующие конуса равны. $SA=SB=\ell$
- SO- высота конуса.
- Конус образуется при вращении прямо-угольного треугольника вокруг его катета.
- $S_{осн.}=\pi R^2$; $S_{б.п.}=\pi R\ell$;
- $S_{п.п.}=S_{б.п.}+S_{осн.}=\pi R(\ell+R)$
- $V_{кон.}=1/3S_{осн.}\cdot h=1/3\pi R^2h$

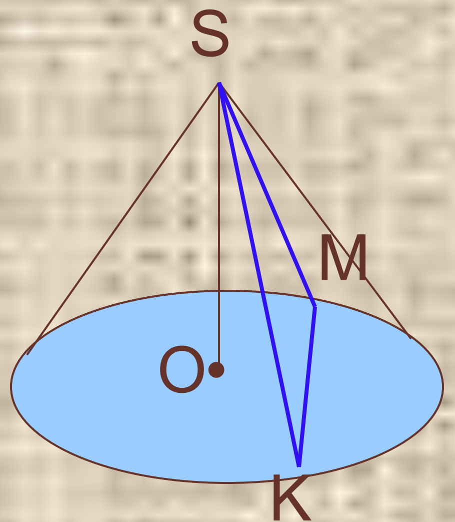
Сечение конуса плоскостями



Осевое сечение

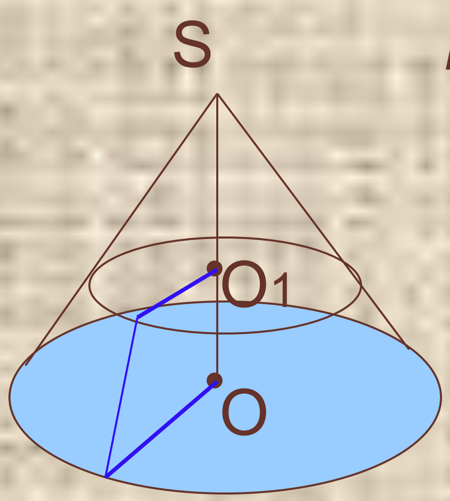
ΔSAB-осевое сечение;
ΔSAB-равнобедренный
SA=SB=ℓ-образующие

Сечение плоскостью, проходящей через вершину



ΔSMK- равнобедренный;
SM=SK=ℓ-образующие

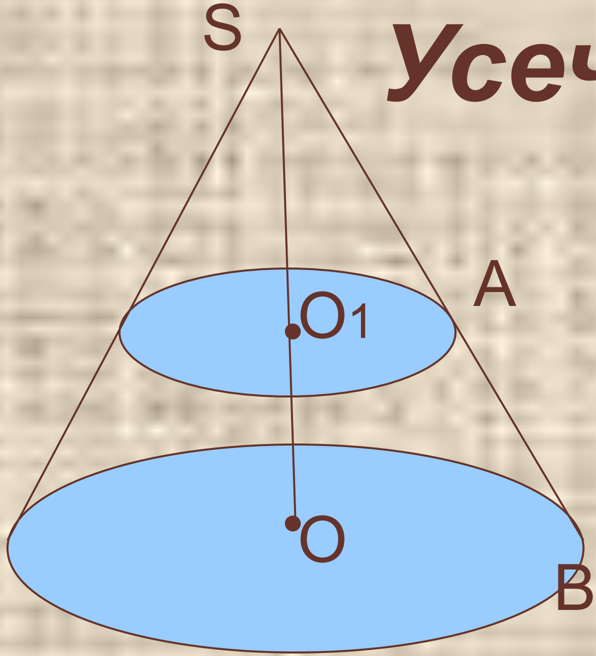
Сечение конуса плоскостями



Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность- по окружности с центром на оси конуса.

$$\frac{R\text{сеч.}}{R\ \text{кон.}} = \frac{SO_1}{SO}$$

Усеченный конус



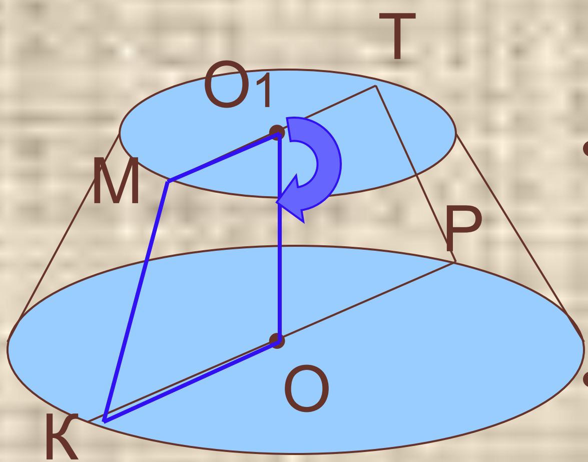
Если в данном конусе проведена плоскость, параллельная его основанию и пересекающая конус, то эта плоскость отсекает от него меньший конус .Оставшуюся часть данного конуса называют ***усеченным конусом.***

Высотой усеченного конуса называют расстояние между плоскостями его оснований.

$OO1 = h_{\text{ус.кон.}}$

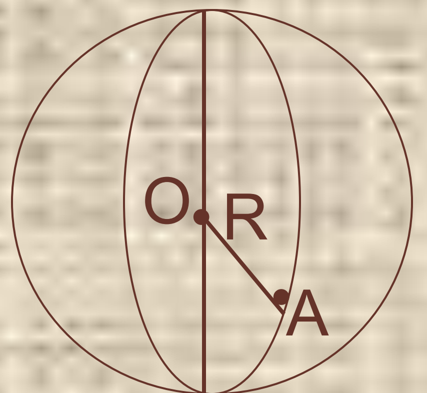
Усеченный конус

Свойства



- Осевое сечение усеченного конуса-равнобокая трапеция, т.е. КМТР-трапеция,КМ=ТР.
- Усеченный конус образуется при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям.
- Sб.п.=π(R+r)ℓ
- Sп.п.=Sб.п.+Sос.+Sос=π(R+r)ℓ+πR²+πr²
- Vус.кон.=1/3πh(R²+Rr+r²)

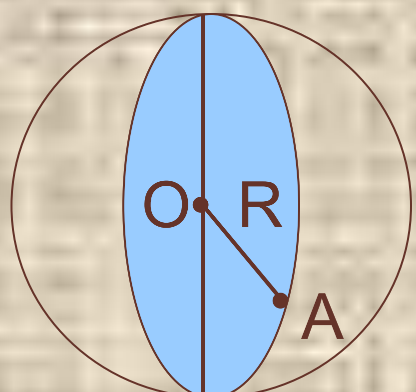
Сфера и шар



Сферой называют тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии(R) от данной точки (O).

O-центр сферы, OA=R – радиус сферы.

$S_{сф.}=4\pi R^2$

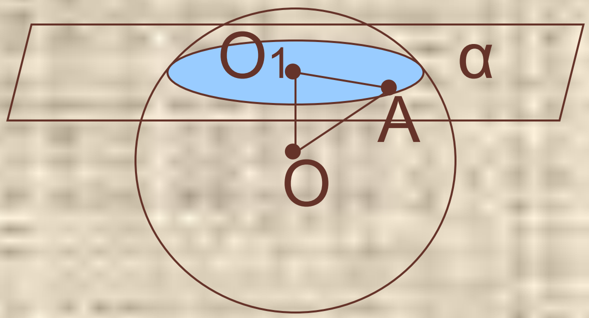


Шаром называют тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R), от данной точки (O).

O-центр шара; OA=R-радиус шара

$V_{шара}=4/3\pi R^3$

Сечение шара плоскостью

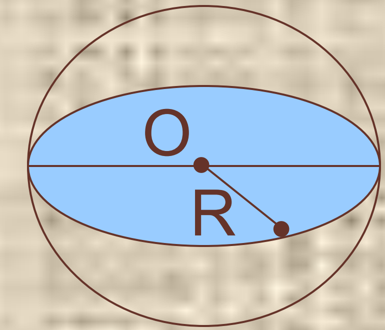


Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

Центр этого круга- основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

O- центр шара; O_1 –центр круга сечения.

$OO_1 \perp \alpha$



Сечение, проходящее через центр шара, называют большим кругом.

Rб.кр.=Rшара