Элементы теории матричных игр

Определения

- процесс принятия решений в конфликтных ситуациях…
- игры 2 (парные) и $n \geq 3$ лиц.
- участники игры - *игроки*.

Игра состоит из последовательности действий (*ходов*), среди кот. могут быть как *личные* ходы, так и случайные. Выбор личных ходов основан на *стратегии* игрока.

Стратегия игрока – это набор правил для определения варианта действий, используемых при выборе каж. личного хода.

Результат ходов игроков оценивается *платежными функциями* участников игры, кот. можно интерпретировать как их выигрыши.

Если сумма выигрышей всех игроков = 0, то такую игру наз. *игрой с нулевой суммой*.

Определения

Стратегия игрока является *opt*, если при *многократном* повторении игры его средний выигрыш max.

Будем считать, что игроки ведут себя разумно (без риска и азарта)…

Матричная игра – это парная игра, в кот. заданы:
$\{1, \ldots, m\}$ – мн. стратегий 1 игрока,
$\{1, \ldots, n\}$ – мн. стратегий 2 игрока,

$\forall$ пары стратегий $i \in \{1,\ldots,m\}$ и $j \in \{1,\ldots,n\}$ определен выигрыш 1 игрока = a_{ij}.
Mat $A=(a_{ij}, i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)$ наз. *платежной*.

- цель 1-го игрока – max своего выигрыша,
- цель 2-го игрока – min выигрыша 1-го игрока.

Принцип осторожности

Предположим, что 2-й игрок знает все ходы 1-го игрока заранее. Тогда на каждый ход 1-го игрока i он отвечает лучшей стратегией $j(i)$: $a_{i,j(i)} \le a_{ij}$

$$\alpha_i^0 = a_{i,j(i)} = \min_{1\le j\le n} a_{ij}, \quad i = 1,\dots,m$$

Лучшая чистая стратегия 1 игрока − i_0:

$$\alpha^0 = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = \alpha_{i_0}^0$$

С др. стороны, если предположить, что 1-й игрок отвечает на $\forall$ стратегию j 2-го игрока своей лучшей стратегией $i(j)$, то

$$\beta_j^0 = a_{i(j),j} = \max_{1\le i\le m} a_{ij}, \quad j = 1,\dots,n$$

$$j_0: \quad \beta^0 = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij} = \beta_{j_0}^0$$

Принцип осторожности

Стратегии i_0 и j_0 определяются игроками по *принципу осторожности*, т.к. каж. игрок при выборе хода учитывает самый плохой для себя вариант развития событий.

- α^0 – *нижняя цена игры*
- β^0 – *верхняя цена игры*

Если 1 игрок придерживается принципа осторожности, то его выигрыш $\geq \alpha^0$. Если 2 игрок придерживается принципа осторожности, то выигрыш 1 игрока $\leq \beta^0$.

Лемма о minmax и maxmin

Лемма. $\forall$ *функции f(x, y), x* $\in$ *X, y* $\in$ *Y справедливо неравенство:*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

Доказательство. Пусть

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = f(x, y(x)) \quad \text{и} \quad \max_{x\in X} f(x, y(x)) = f(x^*, y(x^*))$$

Тогда

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = f(x^*, y(x^*)) = \min_{y\in Y} f(x^*, y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

$\Rightarrow$ $\alpha^0 \le \beta^0$

$\Rightarrow$ случай $\alpha^0 = \beta^0$ удовлетворяет обоих игроков, и выбор стратегий i_0, j_0, на которых достигается =, является opt (решением mat игры в чистых стратегиях).

Седловая точка

Седловой точкой mat A наз. пара номеров строка-столбец (i_0, j_0) :

$$\alpha_{i,j_0} \le \alpha_{i_0,j_0} \le \alpha_{i_0,j}, \quad \forall i, j$$

min в строке & max в столбце

-1	2	0	4
3	2	-2	0
8	0	0	1

1	4	-5	6	9
4	0	3	-6	0

Теорема о седловой точке

Теорема. *Необходимым и достаточным условием = нижней и верхней цен игры является* $\exists$ *седловой точки в платежной mat A.*

Доказательство. **⇒)** Пусть $\alpha^0 = \beta^0$. По def:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^0 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j a_{i_0,j} \le a_{i_0,j_0} \\ \beta^0 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \max\limits_i a_{i,j_0} \ge a_{i_0,j_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha^0 \le a_{i_0,j_0} \le \beta^0$$

$$a_{i,j_0} \le \max_i a_{i,j_0} = a_{i_0,j_0} = \min_j a_{i_0,j} \le a_{i_0,j}$$

⇐) Пусть (i_0, j_0) – седловая точка. По def :

$$\min_j \max_i a_{ij} \le \max_i a_{i,j_0} \le a_{i_0,j_0} \le \min_j a_{i_0,j} \le \max_i \min_j a_{ij}$$

С др. стороны $\quad \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \quad \Rightarrow$

$$\alpha^0 = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta^0$$

Решение mat игр в смешанных стратегиях

Не всякая mat имеет седловую точку… $\alpha^0 < \beta^0$

Смешанная стратегия – это вероятностное распределение на мн. чистых стратегий:

$$p = (p_1, ..., p_m) \in P_m = \left\{ p : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right\}$$

$$q = (q_1, ..., q_n) \in Q_n = \left\{ q : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0 \right\}$$

p_i – вероятность использования 1-м игроком чистой стратегии i,
q_j – вероятность использования 2-м игроком чистой стратегии j.

Применение смешанных стратегий – это чередование чистых стратегий согласно их вероятностям при многократном повторении игры.

Принцип осторожности

$\forall$ пары смеш. стратегий (p, q) определим ***платежную функцию*** как мат. ожидание величины выигрыша 1-го игрока:

$$E(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

Принцип осторожности в данном сл. приводит к определению след. характеристик:

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q} E(p,q); \qquad \alpha = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(p,q);$$

$$\beta(q) = \max_{p \in P} E(p,q); \qquad \beta = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(p,q),$$

где α – *нижняя*, а β – *верхняя цены игры в смеш. стратегиях*.

Теорема Фон Неймана

Теорема. *В $\forall$ mat игре $\exists$ пара смеш. стратегий (p^*, q^*):*

1. $E(p, q^*) \le E(p^*, q^*) \le E(p^*, q)$, $p \in P, q \in Q$;
2. $\alpha = \beta = v = E(p^*, q^*)$ − *цена игры*.

Доказательство. Сформулируем задачи 1 и 2 игроков в виде задач ЛП. Добавив достаточно большое число ко всем элементам платежной матрицы $\Rightarrow v > 0$. Задача 1-го игрока:

$$\alpha(p) \to \max_p$$

$$\alpha(p) = \min_q E(p,q) \le E(p,q^j) = \sum_i a_{ij} p_i, \forall j \qquad q^j = (0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$$

Обозначим $u_i = \dfrac{p_i}{\alpha(p)} \ge 0.$ Разделив на $\alpha(p)$, получим $\sum_i a_{ij} u_i \ge 1$

Задача 1 игрока

$$\begin{cases} f(u) = \sum_i u_i = \dfrac{1}{\alpha(p)} \to \min\limits_{\{u_i \ge 0\}} \\ \sum_i a_{ij} u_i \ge 1, \forall j \end{cases}$$

Доказательство теоремы Фон Неймана

Задача 2 игрока $\beta(q) \to \min\limits_{q}$

$$v_j = \frac{q_j}{\beta(q)} \geq 0$$

$$\begin{cases} \varphi(v) = \sum_j v_j = \dfrac{1}{\alpha(p)} \to \max\limits_{\{v_j \geq 0\}} \\ \sum_j a_{ij} v_j \leq 1, \forall i \end{cases}$$

Пусть u^* и v^* − opt реш. дв. задач $\Rightarrow$ $p_i^* = \dfrac{u_i^*}{f(u^*)}$ $\quad q_j^* = \dfrac{v_j^*}{\varphi(v^*)}$

Согласно принципу дополняющей нежесткости:

$$v_j^* \left(\sum_i a_{ij} u_i^* - 1 \right) = 0, \forall j; \qquad u_i^* \left(\sum_j a_{ij} v_j^* - 1 \right) = 0, \forall i.$$

Просуммируем последние = по j и по i и разделим на $f(u^*) \cdot \phi(v^*)$

$$E(p^*, q^*) = \frac{1}{f(u^*)} = \frac{1}{\varphi(v^*)}$$

Доказательство теоремы Фон Неймана

$$\sum_i a_{ij}u_i \geq 1, \forall j \text{ и } \sum_j a_{ij}v_j \leq 1, \forall i \Rightarrow$$

$$E(p,q^*) = \sum_i p_i \sum_j a_{ij}q_j^* = \sum_i p_i \sum_j a_{ij}\frac{v_j^*}{\varphi(v^*)} \leq \frac{1}{\varphi(v^*)}\sum_i p_i = \frac{1}{\varphi(v^*)}$$

$$E(p^*,q) = \sum_j q_j \sum_i a_{ij}p_i^* = \sum_j q_j \sum_j a_{ij}\frac{u_i^*}{f(u^*)} \geq \frac{1}{f(u^*)}\sum_j q_j = \frac{1}{f(u^*)}$$

$\Rightarrow$ утв. 1 доказано.

Из $\neq$ $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q), p \in P, q \in Q$

$\Rightarrow$

$$\max_p E(p,q^*) \leq E(p^*,q^*) \leq \min_q E(p^*,q) \Rightarrow$$

$$\beta \leq \beta(q^*) \leq E(p^*,q^*) \leq \alpha(p^*) \leq \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$$

С др. стор. (по лемме о maxmin и minmax) $\alpha \leq \beta \Rightarrow$

$$\alpha = \alpha(p^*) = E(p^*, q^*) = \beta = \beta(q^*).$$

Методы решение матричных игр

Если платежная mat имеет седловую точку, то решение игры $\exists$ в чистых стратегиях, кот. определяется седловой точкой mat.

Предположим, что седловой точки в платежной mat нет.
Тогда mat игру следует решать в смешанных стратегиях.

Строка i *доминирует* строку k, если $a_{ij} \geq a_{kj}$, $\forall\ j$ и $\exists$ такой столбец d, что $a_{id} > a_{kd}$

Столбец j *доминирует* столбец k, если $a_{ij} \leq a_{ik}$, $\forall\ i$ и $\exists$ такая строка d, что $a_{dj} < a_{dk}$

Подмн. доминируемых строк и столбцов могут быть исключены из платежной mat

Активные стратегии

Чистая стратегия i является *активной*, если она используется в некоторой opt стратегии с >0 вероятностью. Другими словами, если $\exists$ opt стратегия p (q) такая, что $p_i > 0$ ($q_j > 0$), то чистая стратегия i (j) является *активной* для 1 (2) игрока.

Теорема (об активных стратегиях). *Если один игрок придерживается opt стратегии, то его соперник достигает цены игры v, применяя любую свою смешанную стратегию, в которой используются только активные стратегии.*

Доказательство. Пусть 1 игрок использует opt ст. p^*, а 2 − смеш. ст. q, в кот. $q_j > 0, j \in J'$, где J' − подмн. активных ст. 2 игрока. Необходимо доказать, что цена игры $v = E(p^*, q)$.
Пусть $v_j = E(p^*, q^j)$, где $q^j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, $v_j \geq v$, $\forall\ j$. Покажем, что для активной ст. j $v_j = v$.

Активные стратегии

По def цены игры имеем:

$$v = E(p^*, q^*) = \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_j q_j^* \sum_i a_{ij} p_i^* =$$

$$\sum_j q_j^* v_j = \sum_{j \neq k} q_j^* v_j + q_k^* v_k \geq v \sum_{j \neq k} q_j^* + q_k^* v_k =$$

$$v \sum_j q_j^* + q_k^* (v_k - v) = v + q_k^* (v_k - v) \geq v \quad \Rightarrow \quad q_k^* (v_k - v) = 0$$

$\Rightarrow\ \forall\ j \in J'$ имеет место $v_j = v$. $\qquad \sum_{j \in J'} q_j = 1 \ \Rightarrow$

Из

$$E(p^*, q) = \sum_i \sum_{j \in J'} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j \in J'} q_j v_j = v \sum_{j \in J'} q_j = v$$

Решение игр 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ Седловой точки нет!

$$p^* = (p_1^*, p_2^*)$$

В силу теоремы об активных стратегиях, если 1 игрок использует opt стратегию, то 2 достигает цены игры при любой своей смеш. стратегии, в которой используются только активные чистые стратегии, например при

$$q^1 = (1,0) \quad \text{и} \quad q^2 = (0,1)$$

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \\ v_2 = a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Решение игр 2×n и m×2

Рассм. игру 2×n и найдем opt смеш. стр. 1 игрока $p^* = (p_1^*, p_2^*)$

$$\alpha(p) = \min_q E(p,q) \to \max_p$$

Положим $x = p_2, \quad p_1 = 1 - x, \quad 0 < x < 1$ и $f(x)=\alpha(p)$

Тогда по теореме об активных стратегиях

$$f(x) = \min_q \sum_j \underbrace{[a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x]}_{\nu_j(x)} q_j = \min_j \nu_j(x)$$

Получаем з. max миноранты семейства лин. ф. в (0, 1):

$$\min_j \nu_j(x) \to \max_{x \in (0,1)}$$

Поскольку $p_1^* > 0, p_2^* > 0$ и миноранта семейства лин. ф. вогнута, непрерывна и кусочно-линейная, то ее max на (0, 1) достигается в 1 из внутренних точек излома и может быть найден за время $O(n^2)$

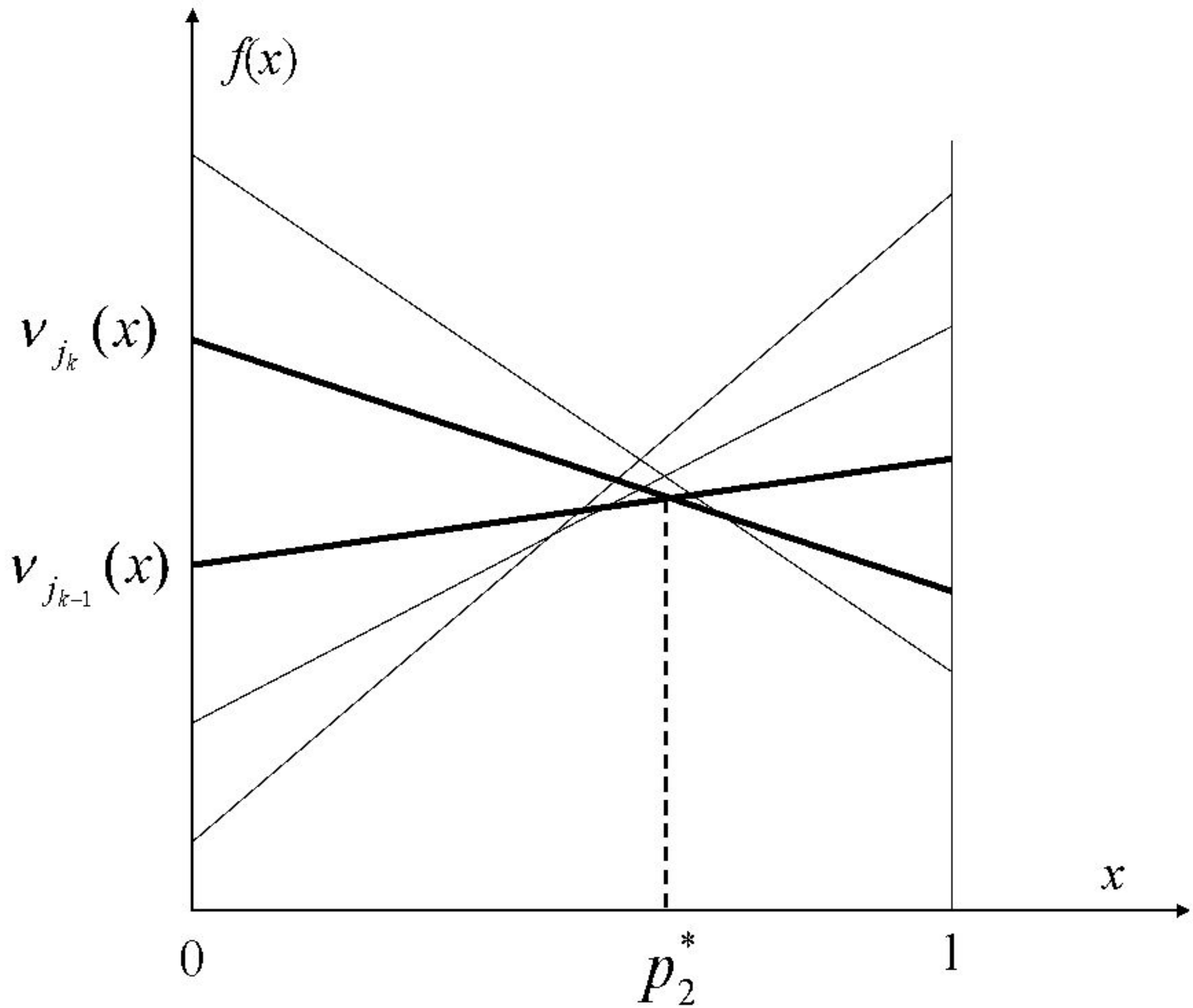
Решение игр $2\times n$

Пусть max миноранты достигается на пересечении прямых

$\nu_{j_{k-1}}(x)$ и $\nu_{j_k}(x)$

Тогда для решения игры достаточно рассмотреть mat игру 2×2 с mat

$$\begin{pmatrix} a_{1j_{k-1}} & a_{1j_k} \\ a_{2j_{k-1}} & a_{2j_k} \end{pmatrix}$$



Пример решения игры $2 \times n$

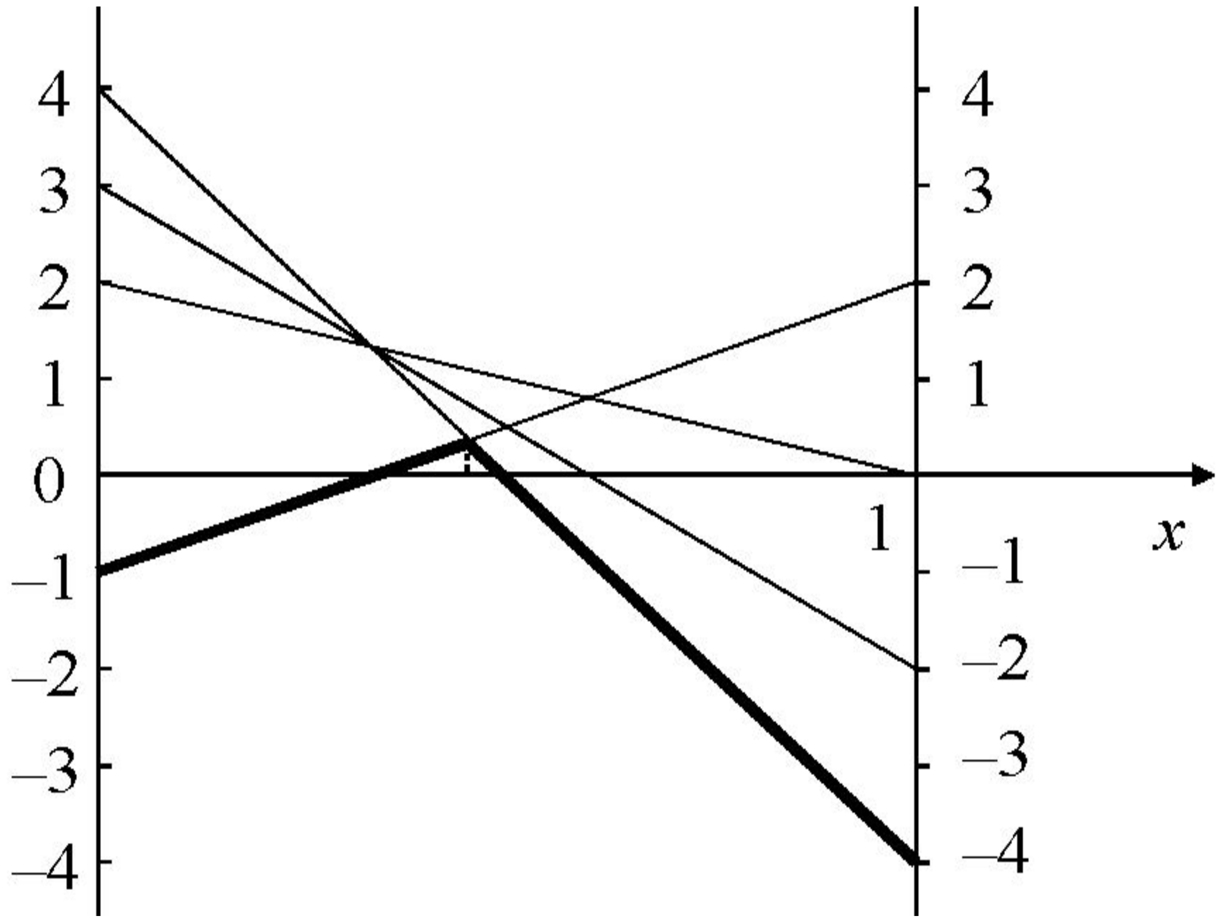
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$v_1(x) = 4 - 8x,$

$v_2(x) = 2 - 2x,$

$v_3(x) = 3 - 5x,$

$v_4(x) = -1 + 3x.$



$$p^* = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right), q^* = \left(\frac{3}{11}, 0, 0, \frac{8}{11}\right), v = \frac{4}{11}.$$

Пример решения игры 3×3

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

взяв $q^1 = (1,0,0)$, $q^2 = (0,1,0)$ и $q^3 = (0,0,1)$, получим

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_3} E(p,q) = \min \begin{Bmatrix} -2p_1 + 3p_2 - 4p_3 \\ 3p_1 - 4p_2 + 5p_3 \\ -4p_1 + 5p_2 - 6p_3 \end{Bmatrix}.$$

Выразим $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ и запишем задачу 1 игрока:

$$\min \begin{Bmatrix} -4 + 2p_1 + 7p_2 = f_1 \\ 5 - 2p_1 - 9p_2 = f_2 \\ -6 + 2p_1 + 11p_2 = f_3 \end{Bmatrix} \to \max_{\substack{p_1, p_2 \geq 0; \\ 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1}} .$$

Пусть $D = \{(p_1, p_2) \mid 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1;\, p_1, p_2 \geq 0\}$ − доп. область. Определим в D подобласти, где max зн. принимает 1 из величин f_i, i =1,2,3. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Пример решения игры 3×3

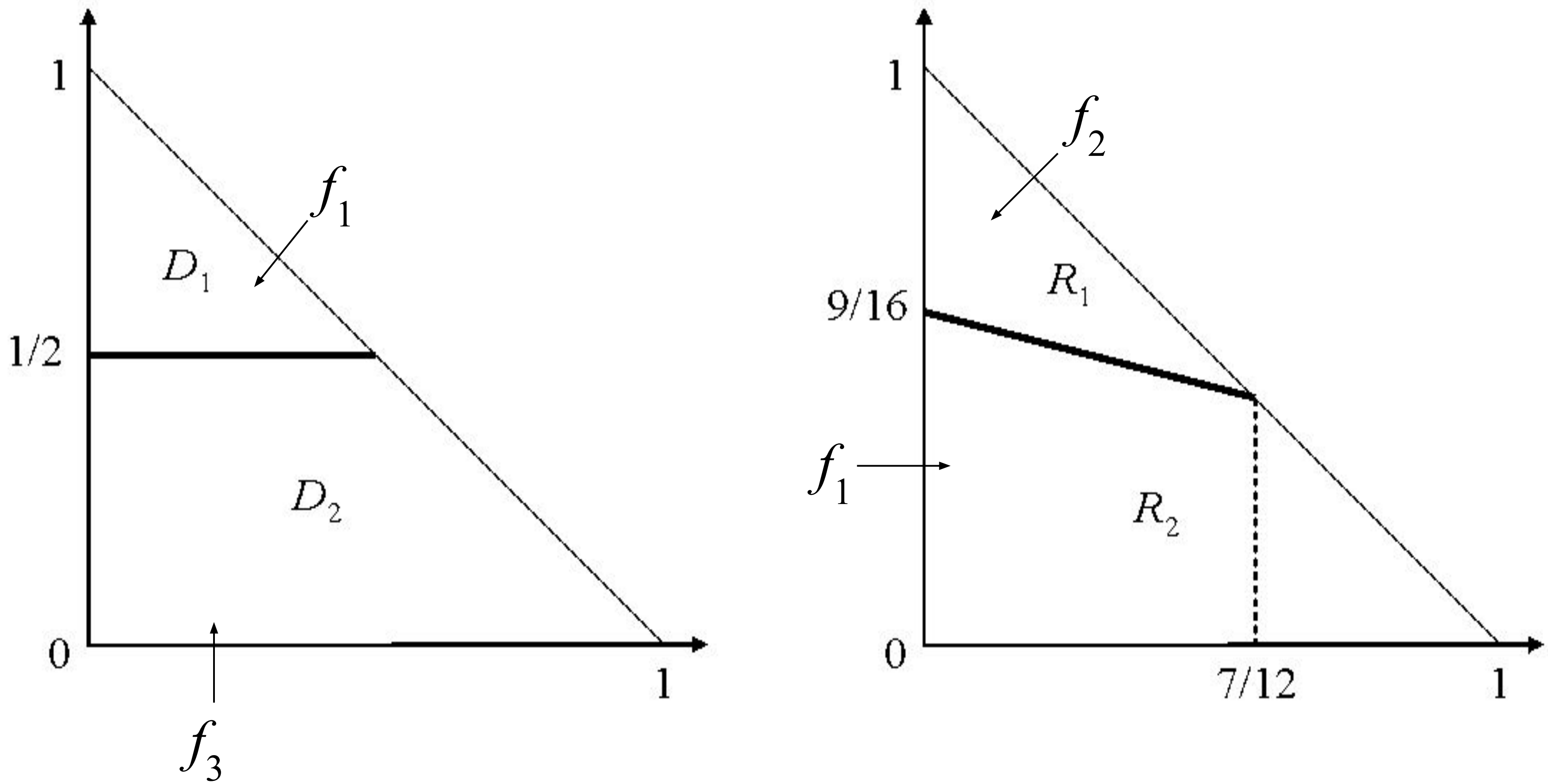
а) Сравним f_1 и f_3. Если $f_1 = f_3$, то $7p_2 - 4 = 11p_2 - 6 \Rightarrow p_2 = 1/2$.
В области $D_1 = \{(p_1, p_2) \mid p_2 \in [1/2, 1], p_1 \in [0, 1 - p_2]\}$ $\quad f_1 \leq f_3$
В области $D_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_2 \in [0, 1/2], p_1 \in [0, 1 - p_2]\}$ $\quad f_1 \geq f_3$

б) Сравним f_1 и f_2. Если $f_1 = f_2$, то $2p_1 + 7p_2 - 4 = 5 - 2p_1 - 9p_2 \Rightarrow$
$4p_1 + 16p_2 = 9$

Если $(p_1, p_2) \in R_1 = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in [0,7/12], p_2 \in [(9 - 4p_1)/16, 1 - p_1]\}$,
то $f_2 \leq f_1$.

В случае $(p_1, p_2) \in R_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in [0,7/12], p_2 \in [0,(9 - 4p_1)16];$
$p_1 \in [7/12, 1], p_2 \in [0, 1 - p_1]\}$ имеем $f_2 \geq f_1$

Пример решения игры 3×3



$a)$ $b)$

Пример решения игры 3×3

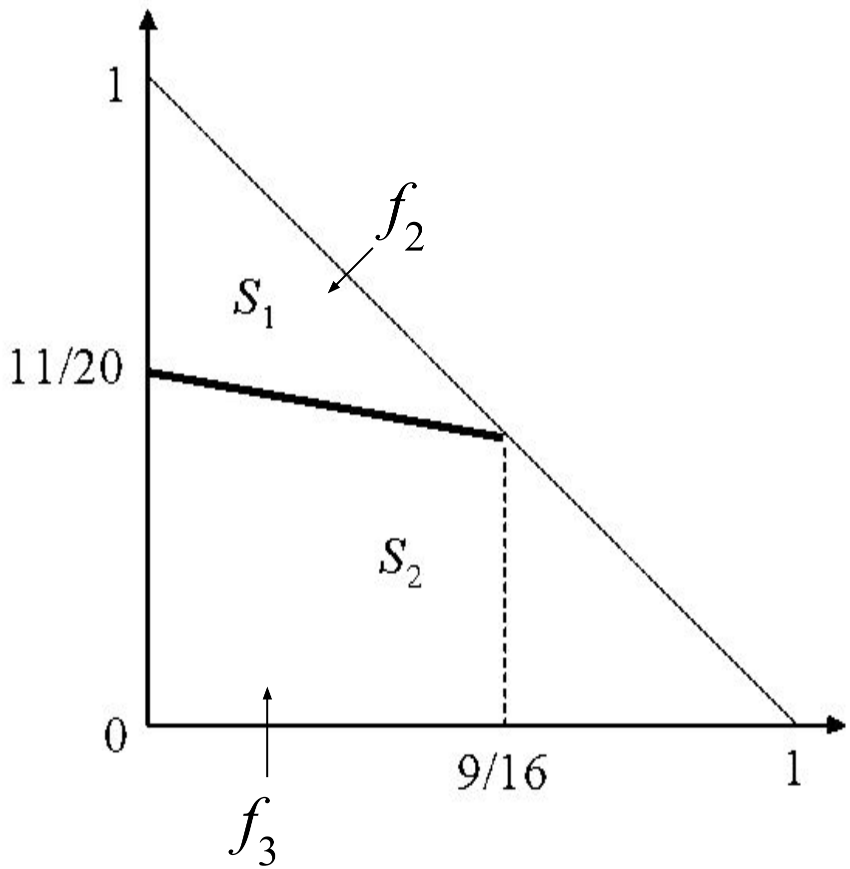
в) Сравним f_2 и f_3. Если $f_2 = f_3$, то $5 - 2p_1 - 9p_2 = 2p_1 + 11p_2 - 6 \Rightarrow$ $4p_1 + 20p_2 = 11$. Значит,

Если $(p_1,p_2) \in S_1 = \{(p_1,p_2) \mid p_1 \in [0,9/16],\ p_2 \in [(11 - 4p_1)/20,\ 1 - p_1]\}$, то $f_2 \le f_3$.

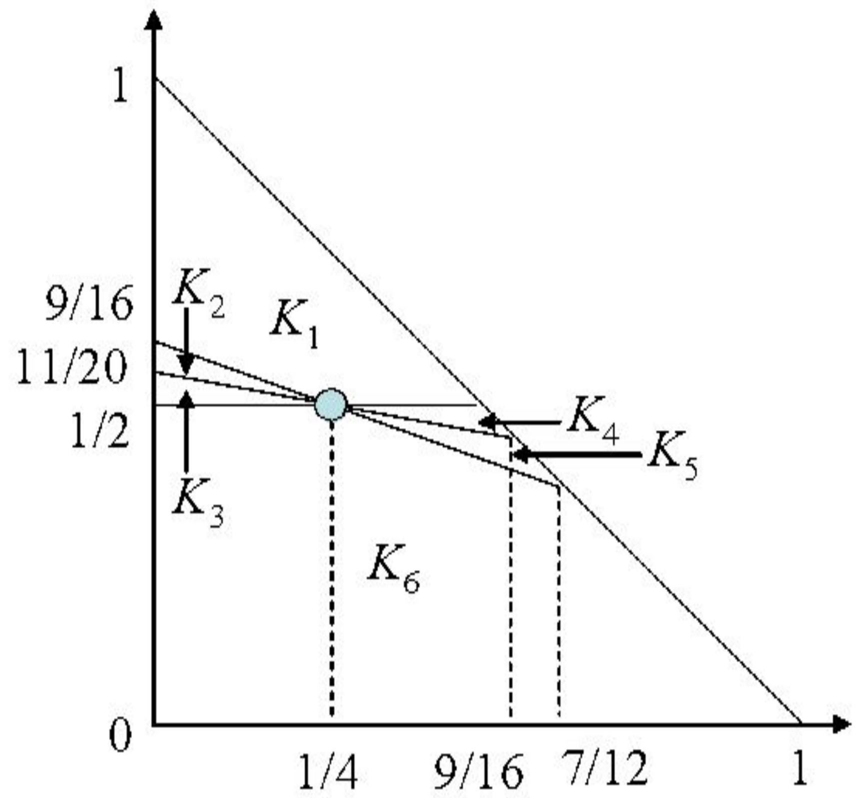
В случае $(p_1,p_2) \in S_2 = \{(p_1,p_2) \mid p_1 \in [0,9/16],\ p_2 \in [0,(11 - 4p_1)/20];$ $p_1 \in [9/16,\ 1],\ p_2 \in [0,\ 1 - p_1\}$ имеем $f_2 \ge f_3$

Итак, область D делится прямыми $p_2 = 1/2$, $4p_1 + 16p_2 = 9$ и $4p_1 + 20p_2 = 11$ на 6 подобластей K_j, $j = 1, \ldots, 6 \Rightarrow$

<u>Пример решения игры 3×3</u>



a)



b)

- если $(p_1, p_2) \in K_2 \cup K_3$, то $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_1$;
- если $(p_1, p_2) \in K_1 \cup K_4$, то $\min\{f_1, f_2, f_3\} =$ f;

Пример решения игры 3×3

$$\alpha^0 = \max\{\max_{(p_1,p_2)\in K_2\cup K_3} f_1(p_1,p_2),\ \max_{(p_1,p_2)\in K_1\cup K_4} f_2(p_1,p_2),\ \max_{(p_1,p_2)\in K_5\cup K_6} f_3(p_1,p_2)\}.$$

Т.к. лин. ф. принимает экстремальные зн. на границе области, то

$$\max_{(p_1,p_2)\in K_2\cup K_3} f_1(p_1,p_2) = \max\{f_1(0,\frac{9}{16}),\ f_1(0,\frac{1}{2}),\ f_1(\frac{1}{4},\frac{1}{2})\} =$$

$$\max\{-\frac{1}{16},-\frac{1}{2},0\} = 0;$$

$$\max_{(p_1,p_2)\in K_1\cup K_4} f_2(p_1,p_2) = \max\{f_2(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\ f_2(0,\frac{9}{16}),\ f_2(\frac{9}{16},\frac{7}{16}),\ f_2(0,1)\} =$$

$$\max\{0,-\frac{1}{16},-\frac{1}{16},-4\} = 0;$$

$$\max_{(p_1,p_2)\in K_5\cup K_6} f_3(p_1,p_2) = \max\{f_3(0,0),\ f_3(0,\frac{1}{2}),\ f_3(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\ f_3(\frac{9}{16},\frac{7}{16}),\ f_3(0,1)\} =$$

$$\max\{-6,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{16},-4\} = 0.$$

Пример решения игры 3×3

Нижняя цена игры, по т. об акт. стр. является ценой игры, =

$$\alpha^0 = \nu = f_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = f_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = f_3\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \Longrightarrow \quad p^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Чтобы найти opt смеш. стратегию 2 игрока достаточно еще раз воспользоваться теоремой об активных стратегиях. Получим

$$q^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Для решения mat игры с произвольными n и m можно применять как метод ЛП (см. теорему Фон Неймана), так и итеративный метод Брауна-Робинсон

Итеративный метод Брауна-Робинсон

Идея метода заключается в поочередном выборе каждой стороной наилучшей чистой стратегии против наблюдаемого эмпирического распределения чистых стратегий противника.

На 1 шаге противники выбирают произвольные чистые стратегии. Пусть на первых N шагах последовательно выбирались стратегии

$(i_1, i_2, \dots , i_N)$ и $(j_1, j_2, \dots , j_N)$

x_i^N, y_j^N – кол. шагов, на кот. 1 и 2 игроками выбирались стр. i и j

$$\sum_i^m x_i^N = \sum_j^n y_j^N = N.$$

$$p_i^N = \frac{x_i^N}{N}$$

$$q_j^N = \frac{y_j^N}{N}.$$

$$p^N = (p_1^N, \dots , p_m^N)$$

$$q^N = (q_1^N, \dots , q_n^N).$$

Итеративный метод Брауна-Робинсон

На шаге $(N+1)$ выбираются такие чистые стратегии, что

$$\alpha^N = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^N = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{N+1} j} q_j^N,$$

$$\beta^N = \min_j \sum_i a_{ij} p_i^N = \sum_i a_{i j_{N+1}} p_i^N$$

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{N p_i^N}{N+1}, \ i \ne i_{N+1}, \\ \dfrac{N p_i^N + 1}{N+1}, \ i = i_{N+1}; \end{cases} \qquad q_j^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{N q_j^N}{N+1}, j \ne j_{N+1}, \\ \dfrac{N q_j^N + 1}{N+1}, j = j_{N+1}. \end{cases}$$

$$p^N \to p^*, \qquad q^N \to q^* \qquad \nu^N = \frac{\alpha^N + \beta^N}{2} \to \nu$$

Пример решения mat игры методом Брауна-Робинсон

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 1.</u> $i_1 = 1,$

$$j_1 = 1 \Rightarrow p^1 = (1, 0, 0),\ q^1 = (1, 0, 0).$$

<u>Шаг 2.</u>

$$\begin{array}{ll|c|} \alpha^1 = 3, & i_2 = 3 & p^2 = \left(1/2, 0, 1/2\right) \\ \beta^1 = 1, & j_2 = 1 & q^2 = \left(1, 0, 0\right) \end{array} \quad \nu^1 = \frac{\alpha^1 + \beta^1}{2} = 2.$$

<u>Шаг 3.</u>

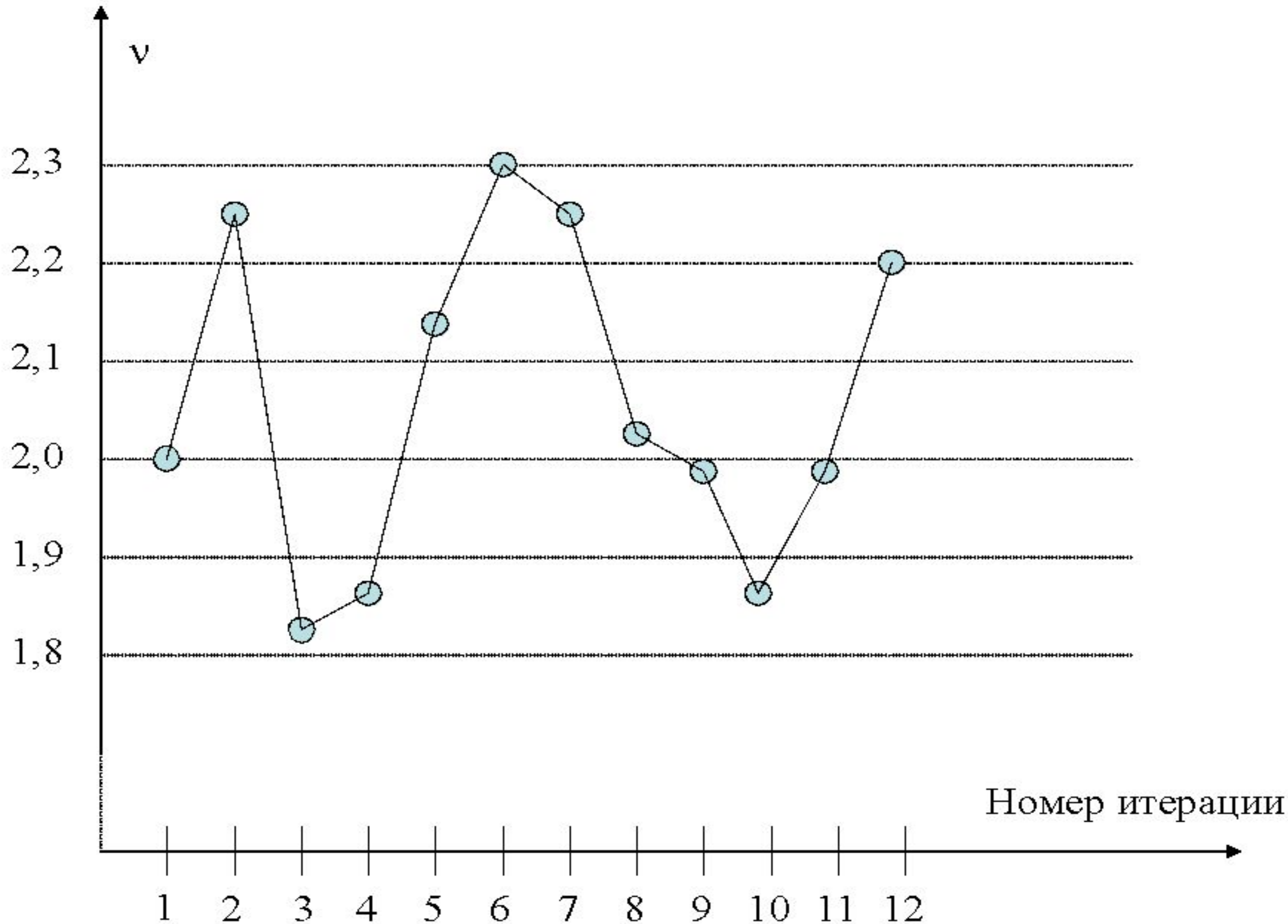
$$\begin{array}{ll|c|} \alpha^2 = 3, & i_3 = 3 & p^3 = \left(1/3, 0, 2/3\right) \\ \beta^2 = 3/2, & j_3 = 3 & q^3 = \left(2/3, 0, 1/3\right) \end{array} \quad \nu^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

<u>Шаг 4.</u>

$$\begin{array}{ll|c|} \alpha^3 = 7/3, & i_4 = 3 & p^4 = \left(1/4, 0, 3/4\right) \\ \beta^3 = 4/3, & j_4 = 3 & q^4 = \left(1/2, 0, 1/2\right) \end{array} \quad \nu^3 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} = \frac{11}{6} \approx 1,833.$$

…

Пример решения mat игры методом Брауна-Робинсон



Остановка по критерию $|\nu^N - \nu^{N-1}| \le \varepsilon$ не корректна…