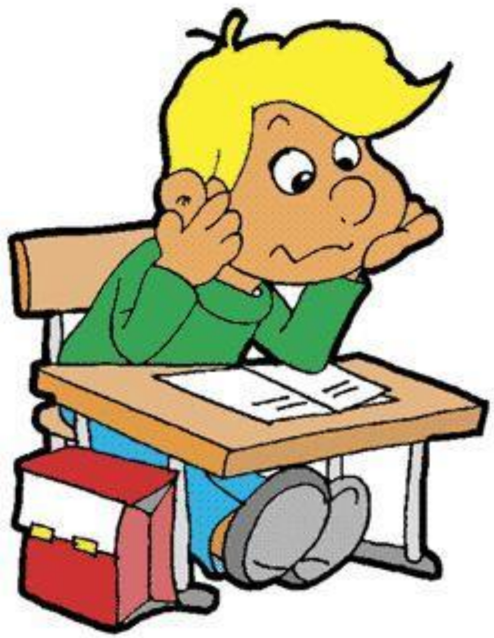
Множества

Выполнили:
Базуева Анна,
Чебанова Елена,
Б-4051

Содержание:

- Эквивалентное множество, мощность множеств (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Счетные множества (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Несчетные множества (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Список источников.

Мощность множеств



- **Мощность множества** — это обобщение понятия количества (числа элементов множества), которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные.

Мощность множества X обозначается:

$$|X|$$

<u>Например:</u> $X = \{1,3,6\}$,

$|X| = 3$

Эквивалентные множества

<u>Определение:</u> Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются **равномощными множествами**, или **множествами, имеющими одинаковую мощность**, или **эквивалентными множествами по мощности**.

Обозначение эквивалентных (равномощных) множеств:

$$A \sim B,\ X \sim Y,\ \{a\} \sim \{b\}$$

Свойства эквивалентности множеств

1. Отношение равномощности симметрично: *если A равномощном B, то B равномощно A.*
2. Отношение равномощности рефлексивно: *каждое множество равномощно самому себе.*
3. Отношение равномощности транзитивно: *если A равномощно B и B равномощно C, то A равномощно C.*

Примеры

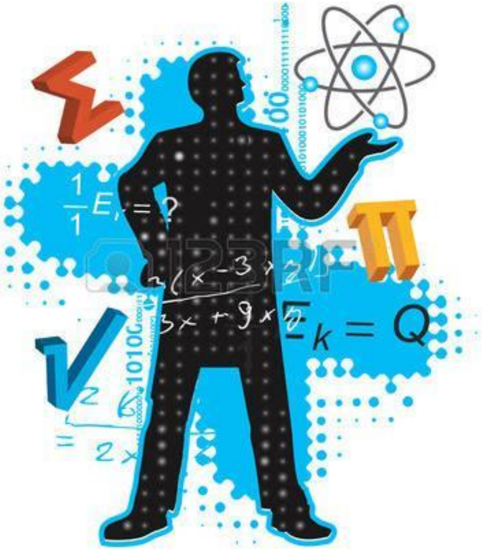
1. *Возьмём группу студентов из тридцати человек и выдадим экзаменационные билеты по одному билету каждому студенту из стопки, содержащей тридцать билетов, такое попарное соответствие из 30 студентов и 30 билетов будет одно-однозначным.*
2. **Два множества, равномощные с одним и тем же третьим множеством, равномощны.**

Если множества M и N равномощны, то и множества всех подмножеств каждого из этих множеств M и N, также равномощны.

Примеры

Пример 1. Пусть $A = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $N(A) > N(B)$, так как $N(A) = 5, N(B) = 3$.



Примеры

Пример 2. Покажем, что множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных положительных чисел. Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

иначе: каждому элементу $n \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие элемент $2n$ множества четных положительных чисел.

Так как множество четных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел, то этот пример показывает, что бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда $N(A) = N(B)$.

Примеры

Пример 3. Покажем, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots & n & -n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 2n+1 & \ldots \end{array}$$

иначе: каждому элементу $n \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие элемент $2n$, если $n > 0$, и элемент $-2n+1$, если $n \leq 0$ множества натуральных чисел.

Счетные множества

Определение: Множества, эквивалентные по числу элементов множеству N={1, 2, 3, 4, …} называются ***счетными*** множествами.

Например, между множествами N={1, 2, 3, ..., n, ...} и A={-1, -2, -3, ..., -n, ...} можно установить взаимно-однозначное соответствие. Значит A~N и множество целых отрицательных чисел является счетным.

Теоремы

Теорема 1. Для того, чтобы множество А было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде А={a1, a2, a3,…} (т.е. в так называемой форме последовательности).

Теорема 2. Из всякого бесконечного множества *А* можно выделить счетное множество.

Теоремы

Теорема 3. Всякое бесконечное подмножество счетного множества тоже счетно.

Теорема 4. Сумма конечного числа счетных множеств есть также счетное множество.

Теорема 5. Сумма счетного числа конечных множеств есть конечное или счетное множество.

Теоремы

Теорема 6. Сумма счетного числа счетных множеств есть также счетное множество.

Теорема 7. Если к бесконечному множеству добавить счетное или конечное множество, то это не изменит его мощности.

Примеры

Примеры.

Доказать, что следующие множества счетны:

1.64. $\{n \in N \mid n = 2k,\ k \in N\}$.

Решение.

Установим взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, например, упорядочив множество $\{n \in N \mid n = 2k,\ k \in N\}$ следующим образом:

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

а затем каждому элементу множества поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности

$$1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Таким образом заданное множество является счетным.

Что и требовалось доказать.

1.66. $\{n \in N \mid n = 2^k,\ k \in N\}$.

Решение.

Множество $\{n \in N \mid n = 2^k,\ k \in N\}$ упорядочим следующим образом:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$$

далее каждому элементу множества поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между заданнім множеством и множеством натуральніх чисел. Следовательно, множество

$$\{n \in N \mid n = 2^k,\ k \in N\}$$

является счетным.

Что и требовалось доказать.

1.69. Используя результат задачи 1.68 доказать, что множество всех рациональных чисел $Q=\{x\in R\,|\,x=\frac{m}{n},\ n\neq 0,\ m,n\in Z\}$.

Решение.

Множество рациональных чисел можно представить как объединение счетных множеств $X_n=\{\frac{n}{k}\,|k\in N\}=\left\{\frac{n}{1},\frac{n}{2},\frac{n}{3},\cdots\right\}$.

Каждое множество X_n счетное, поскольку каждому элементу можно поставить в соответствие натуральное число, стоящее в знаменателе. Тогда множество

$$Q=\{x\in R\,|\,x=\frac{m}{n},\ n\neq 0,\ m,n\in Z\}=\bigcup_{n\in N}X_n$$

так же является счетным, как было доказано в задаче 1.68.

Что и требовалось доказать.

1.68. Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ – счетные множества. Доказать, что их объеденение $\bigcup\limits_{n \in N} X_n$ – счетное множество.

Решение.

Пусть $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots\}$. Тогда элементы множества $\bigcup\limits_{n \in N} X_n$ можно записать в виде следующей таблицы:

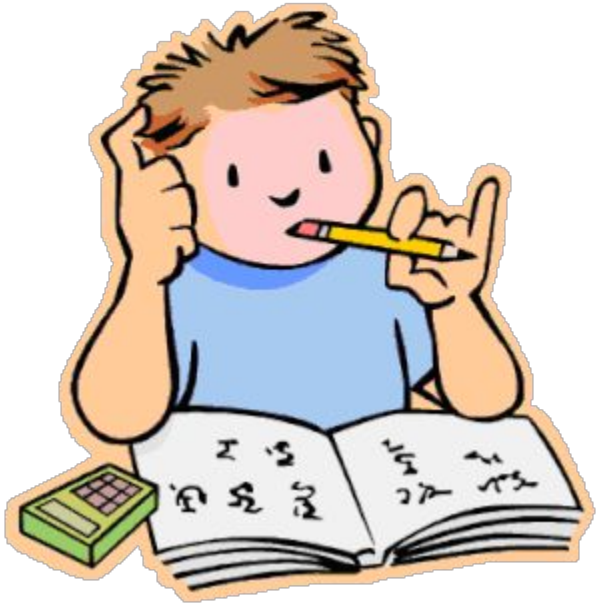
$$
\begin{array}{l}
x_{1,1},\ x_{1,2},\ x_{1,3},\ \cdots, x_{1,l}, \cdots \\
x_{2,1},\ x_{2,2},\ x_{2,3},\ \cdots, x_{2,l}, \cdots \\
x_{3,1},\ x_{3,2},\ x_{3,3},\ \cdots, x_{3,l}, \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n,1},\ x_{n,2},\ x_{n,3},\ \cdots, x_{n,l}, \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Занумеруем элементы этой таблицы следующим образом: в качестве первого элемента берем элемент $x_{1,1}$, следующие два элемента -- элементы стоящие на диагонали $x_{1,2}$ и $x_{2,1}$, затем считаем три элемента стоящие на следующей диагонали $x_{3,1}$, $x_{2,2}$ и $x_{1,3}$ и так далее. Таким образом, каждому элементу множества $\bigcup\limits_{n \in N} X_n$ можно поставить в соответствие натуральное число (порядковый номер элемента, если их пересчитывать по указанной выше схеме). Следовательно, заданное множество счетное.

Что и требовалось доказать.

Несчетное множество

Определение. Если множество B является бесконечным и не равномощно множеству N, то его называют несчетным.



Теоремы

Теорема 1. Множество $[0;1]$ несчётно.

Теорема 2. Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счетно, то объединение $A \cup B$ равномощно A.

Теорема 3. Квадрат (со внутренностью) равномощен отрезку.

Теоремы

Теорема 4 (Теорема Кантора-Бернштейна). Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.

Теорема 5 (Теорема Кантора).Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.

Теорема 6 (обобщенная теорема Кантора). Для любого множества A имеет место неравенство $|A| < |P(A)|$.(Никакое множество X не равномощно множеству всех своих подмножеств).

Пример

Рассмотрим для простоты все вещественные числа полуинтервала $[0, 1)$. Для них для всех в указанной выше формуле $a_0 = 0$. Теперь предположим, что мы вдруг смогли каким-либо образом их все занумеровать, вытянув их в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, исчерпывающую все числа в полуинтервале $[0, 1)$. Выпишем элементы этой последовательности в указанном выше виде:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots a_k^1 \ldots \\ x_2 & = & 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_k^2 \ldots \\ x_3 & = & 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots a_k^3 \ldots \\ \vdots & & \qquad \vdots \\ x_n & = & 0.a_1^n a_2^n a_3^n \ldots a_k^n \ldots \\ \vdots & & \qquad \vdots \end{array}$$

Здесь a_k^n — цифра в k-м разряде после запятой числа x_n (не путать с n-й степенью числа a_k!). Все эти цифры вместе образуют этакую бесконечную таблицу (бесконечную матрицу, если хотите). Она может выглядеть как-нибудь так:

Пример

$$
\begin{array}{l}
0.31415926535897932384626433383279\ldots \\
0.27182818284590452353602874771352\ldots \\
0.16180339887498948482045868834365\ldots \\
0.14142135623730950488016887242209\ldots \\
0.17320508075688772935274463415505\ldots \\
0.22360679774997896964091736687731\ldots \\
0.12020569031595942853997381615111\ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

Теперь построим вещественное число

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots, \qquad \text{где } b_i = 9 - a_i^i .$$

То есть мы берём из первого числа x_1 первую цифру после запятой, вычитаем её из девяти и ставим результат первой цифрой числа x; потом берём из второго числа x_2 вторую цифру после запятой, вычитаем её из девяти, ставим результат второй цифрой числа x и так далее. В нашем примере у нас получится что-то вроде

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 0.\mathbf{3}1415926535897932384626433383279\ldots \\
x_2 & = & 0.2\mathbf{7}182818284590452353602874771352\ldots \\
x_3 & = & 0.16\mathbf{1}80339887498948482045868834365\ldots \\
x_4 & = & 0.141\mathbf{4}2135623730950488016887242209\ldots \\
x_5 & = & 0.1732\mathbf{0}508075688772935274463415505\ldots \\
x_6 & = & 0.22360\mathbf{6}79774997896964091736687731\ldots \\
x_7 & = & 0.120205\mathbf{6}9031595942853997381615111\ldots \\
 & \vdots & \quad \ddots \\
x & = & 0.\mathbf{6285933}\ldots
\end{array}
$$

Пример

Это число гарантированно (не только в нашем примере, а вообще) лежит в интервале $[0, 1)$ и по нашему предположению должно быть занумеровано. Однако, это число *не может быть среди занумерованных*. В самом деле: пусть у него есть порядковый номер n. Но его n-я цифра после запятой *по построению* отличается от n-й цифры n-го числа: $b_n = 9 - a_n^n \neq a_n^n$! Полученное противоречие означает, что все вещественные числа полуинтервала $[0, 1)$ невозможно занумеровать.

Замечание. Я слукавил немножко, сказав, что x обязательно лежит в $[0, 1)$ только потому, что у него часть перед запятой нулевая. Дело в том, что вещественное число $0.999999\ldots$ считается в математике равным единице (тому есть веские причины), так что оно не лежит в $[0, 1)$, хотя вполне может получиться в ходе нашего процесса, если на «диагонали» таблицы все нули. Впрочем, это означает, что число $0.111111\ldots$ заведомо не занумеровано — в его представлении-то нет ни одного нуля. Можно обойти проблему и другим способом: вооружившись сакральным знанием о единице, мы можем просто повторить все наши рассуждения для отрезка $[0, 1]$ вместо полуинтервала. Части перед запятой у всех чисел в этом отрезке можно считать нулевыми, потому что $1 = 0.999999\ldots$.

В связи с ненумеруемостью говорят, что полуинтервал $[0, 1)$ — *множество мощности континуума*.

Список источников:

Электронные ресурсы:

- Режим удаленного доступа: http://math.siomax.ru/Sets;
- Режим удаленного доступа: http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html;
- Режим удаленного доступа: http://edu.alnam.ru/book_abmn.php?id=10.