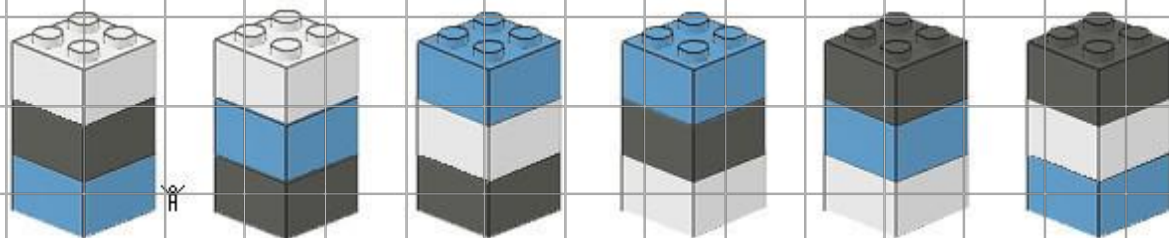


Введение в комбинаторику и теорию вероятностей.

- 1) [Комбинаторика](#)
- 2) [Факториал](#)
- 3) [Перестановки](#)
- 4) [Размещения](#)
- 5) [Сочетания](#)
- 6) [Частота и вероятность](#)
- 7) [Сложение вероятностей](#)
- 8) [Умножение вероятностей](#)



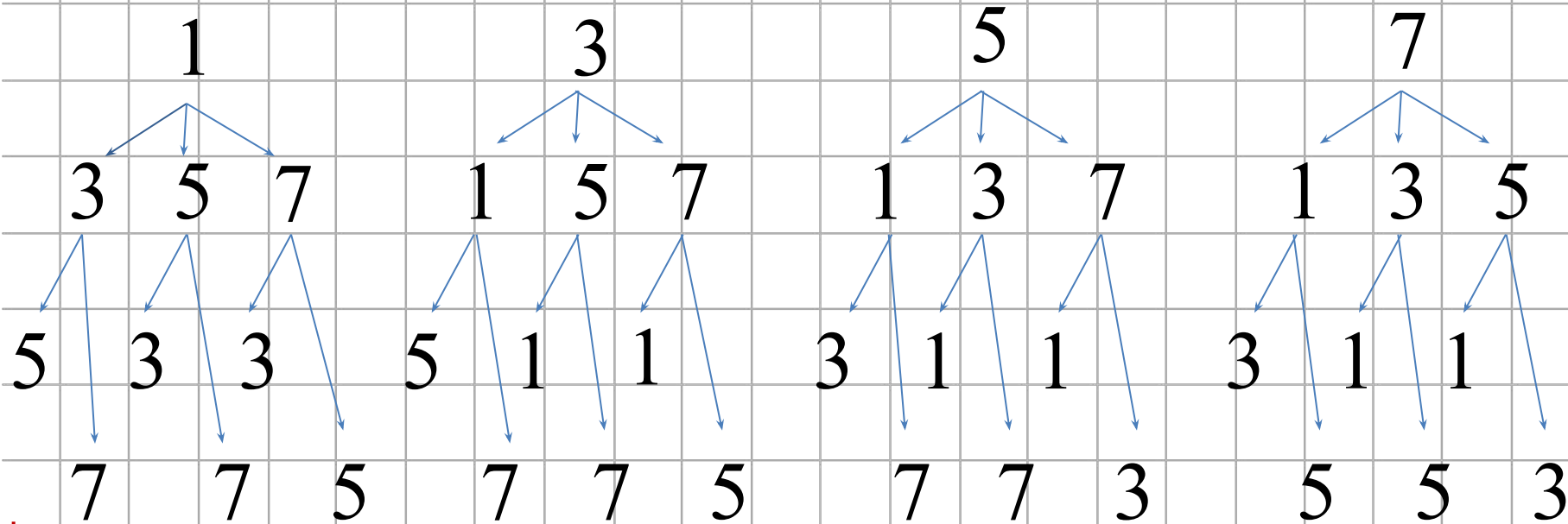
Комбинаторика.

«комбинаторика»
происходит от латинского
слова *combinare* –
«соединять, сочетать».



Определение. **Комбинаторика** – это
раздел математики, посвящённый
задачам выбора и расположения
предметов из различных множеств.

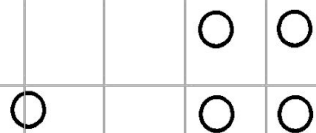
Пример 2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую цифру не более одного раза?



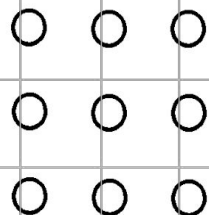
дерево вариантов



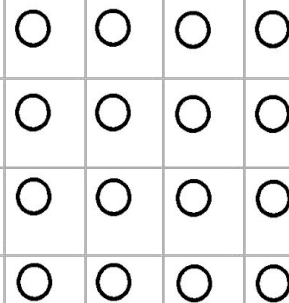
Квадратные числа



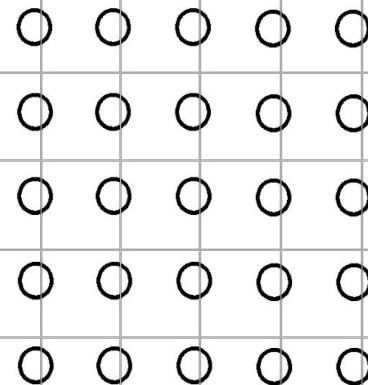
$$1 \quad 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$$



$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$



$$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$



$$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$$

Треугольные числа



○

1

○
○ ○

1+2=3

○
○ ○
○ ○ ○

1+2+3=6

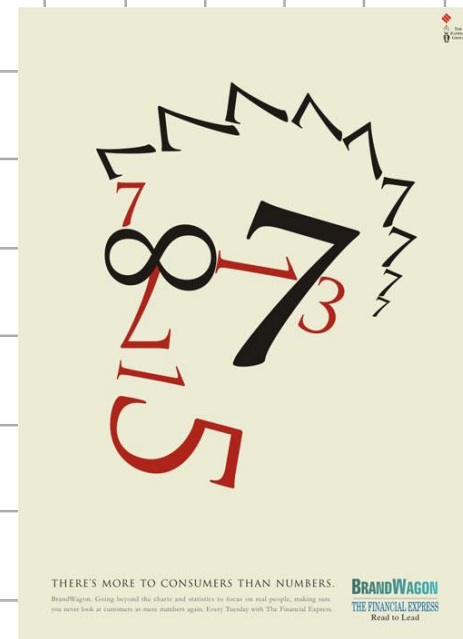
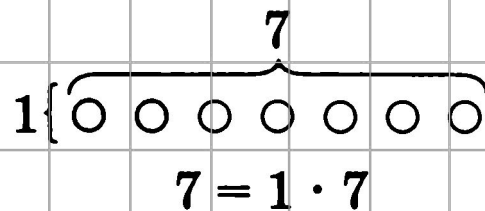
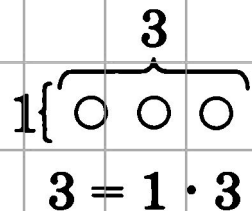
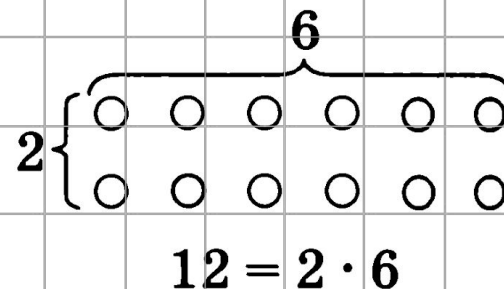
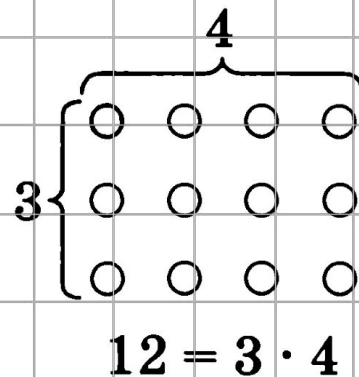
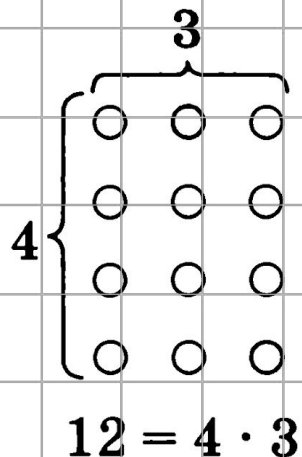
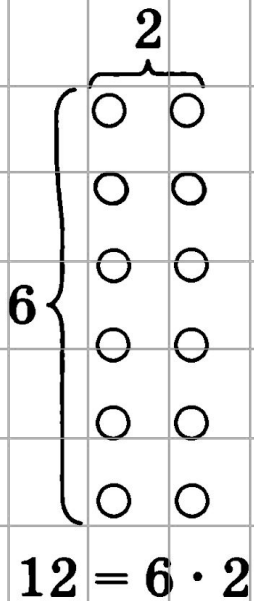
○
○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○ ○

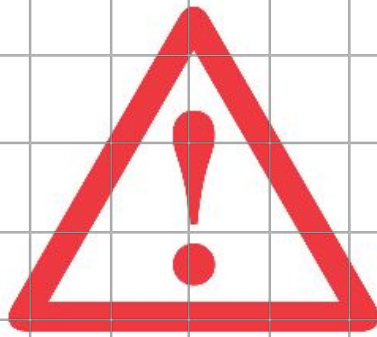
1+2+3+4=10

○
○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

1+2+3+4+5=15

Прямоугольные и непрямоугольные числа.





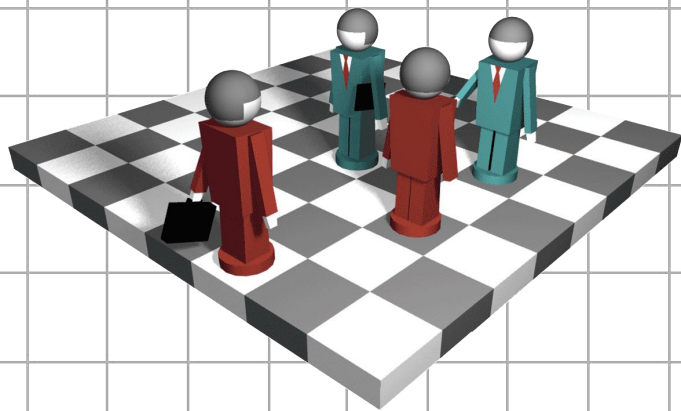
Факториал.

Определение. *Факториалом* натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Обозначение $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Таблица факториалов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800



Перестановки.

Определение. *Перестановкой* называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$



Пример 1.

Сколькими способами могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

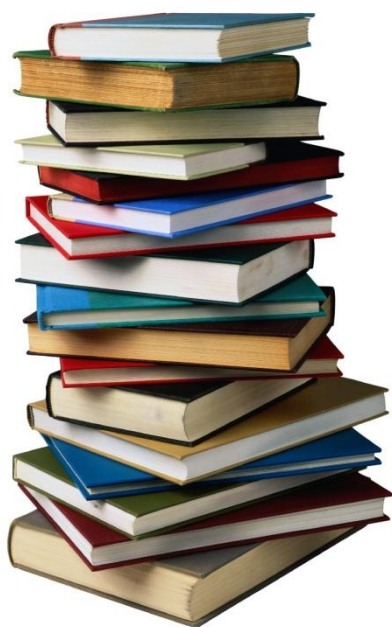
Решение:

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

Пример 2.

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

Решение: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$

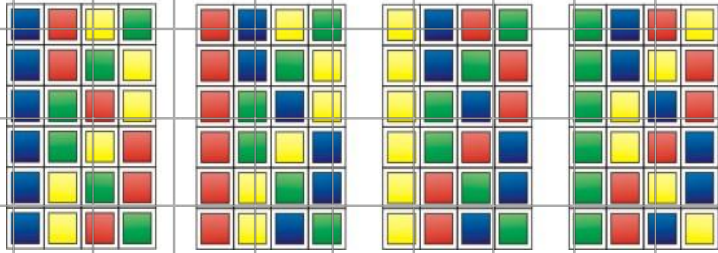


Пример 3.

Имеется 10 различных книг, среди которых есть трёхтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги трёхтомника должны находиться вместе, но в любом порядке?

Решение: $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 241\,920$

Размещения.



Определение. *Размещением* A_n^k из n элементов конечного множества по k , где $k \leq n$, называют упорядоченное множество, состоящее из k элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 1.

Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11\,880$$



Пример 2.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

$$A_{10}^7 - A_9^6 = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 9}{3!} = 544\,320$$

Пример 3.

Сколько существует трёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений), которые НЕ кратны 3?

Решение:

$$A_6^3 - 8 \cdot P_3 = \frac{6!}{3!} - 8 \cdot 3! = 120 - 48 = 72$$



Сочетания.

Определение. Подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве, называют **сочетаниями** из n элементов по k . (Сочетания различаются только элементами, порядок их не важен: ab и ba – это одно и то же сочетание).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Треугольник Паскаля



1

$$(a + b)^0 = 1$$

1 1

$$(a + b)^1 = a + b$$

1 2 1

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1 3 3 1

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1 4 6 4 1

...

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

...

Треугольник Паскаля

столбцы строки	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...	...							

Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$

$$C_1^0$$

$$C_1^1$$

$$C_2^0$$

$$C_2^1$$

$$C_2^2$$

$$C_3^0$$

$$C_3^1$$

$$C_3^2$$

$$C_3^3$$

$$C_4^0$$

$$C_4^1$$

$$C_4^2$$

$$C_4^3$$

$$C_4^4$$

$$C_5^0$$

$$C_5^1$$

$$C_5^2$$

$$C_5^3$$

$$C_5^4$$

$$C_5^5$$

...

День недели	№ группы
Понед-к	1.
	2.
	3.
	4.
Вторник	1.
	2.
	3.
	4.
Среда	1.
	2.
	3.
	4.
Четверг	1.
	2.
	3.
	4.
Пятница	1.
	2.
	3.
	4.
Суббота	1.
	2.
	3.
	4.

График дежурства по классу



Пример 1.

Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из класса, в котором 20 человек?

Решение:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$$



Пример 2.

Из вазы с цветами, в которой стоят 10 красных гвоздик и 5 белых, выбирают 2 красные гвоздики и одну белую. Сколькими способами можно сделать такой выбор букета?

Решение:

$$C_{10}^2 \cdot C_5^1 = \frac{10! \cdot 5!}{2! \cdot 8! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5}{2} = 225$$



Пр 3.

огурцов и три помидора

в два пакета так, чтобы

был хотя бы один помидор и

чтобы овощей в пакетах было поровну.

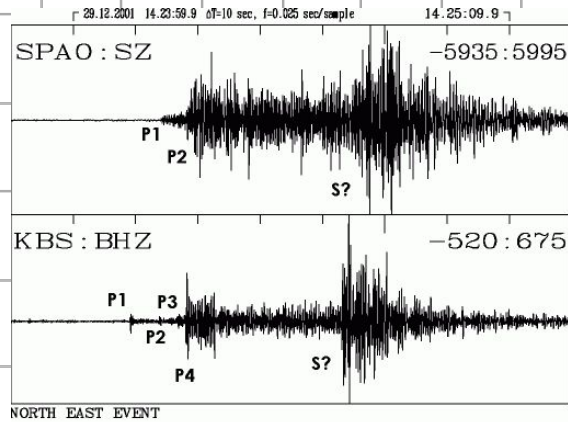
Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 = \frac{3! \cdot 7!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$

$$C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3! \cdot 7!}{2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$

Частота и вероятность.



деление. Частотой

события в серии

испытаний

отношение

числа

в которых это событие наступило (благоприятные испытания), к числу всех испытаний.

Частота $= \frac{m}{n}$, где m – число испытаний с благоприятным исходом, n – число всех испытаний.

Нахождение частоты предполагает, чтобы испытание было проведено фактически.

Частота и вероятность.



еление. **Вероятностью**

ывается

отношение


благоприятных для A

числу всех равновозможных

случаев.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Нахождение вероятности не требует, чтобы испытание проводилось в действительности.



Пример 1. В урне 10
одинаковых шаров разного цвета:
2 красных, 3 синих, 5 жёлтых.

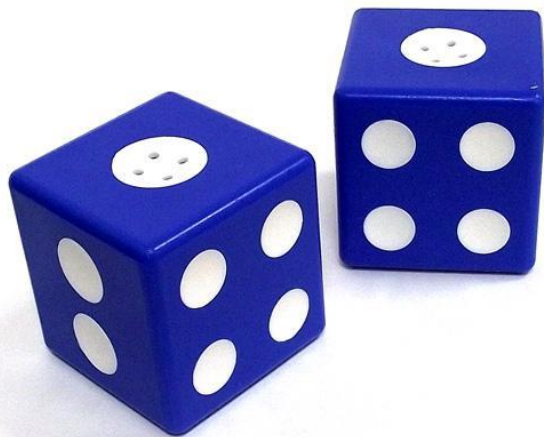
Шары тщательно перемешаны. Наугад
выбирается один шар. Какова вероятность
того, что вынутый шар окажется: а) красным;
б) синим; в) жёлтым?

Решение: а) $P(K) = \frac{2}{10} = 0,2;$

б) $P(C) = \frac{3}{10} = 0,3;$

в) $P(Ж) = \frac{5}{10} = 0,5.$

Пример 2.



Миша бросают два

Они

если при

в сумме выпадет



выигрывает Коля, а если в

выпадет 7 очков, то

а. Справедлива ли эта игра?



Решение:

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)



(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

$$P(A) = \frac{5}{36}$$



(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

Пример 3.

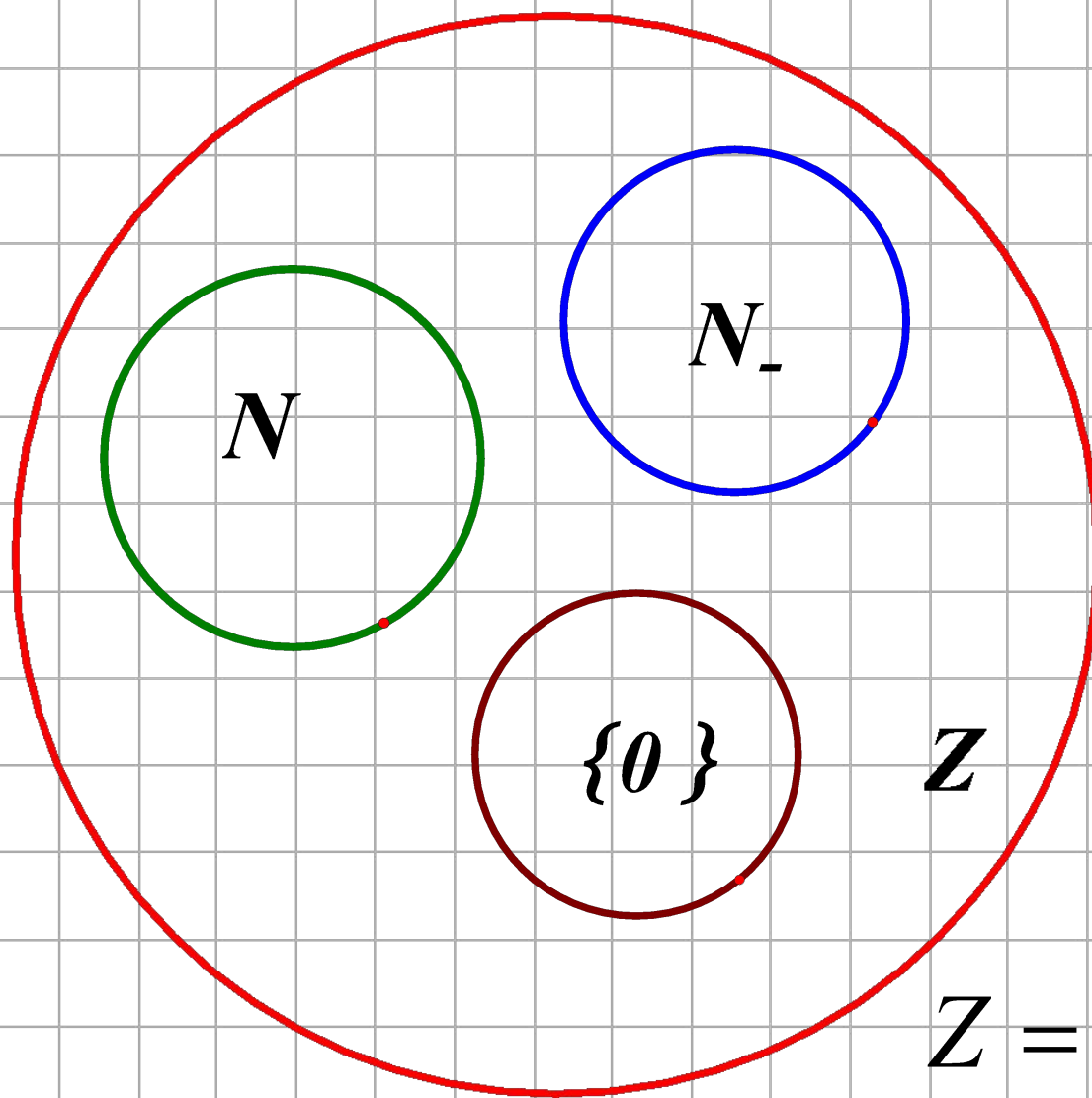


данных 10
ко 7 не имеют
вероятность
выбранных
велосипеда из этих 10 окажется без дефекта?

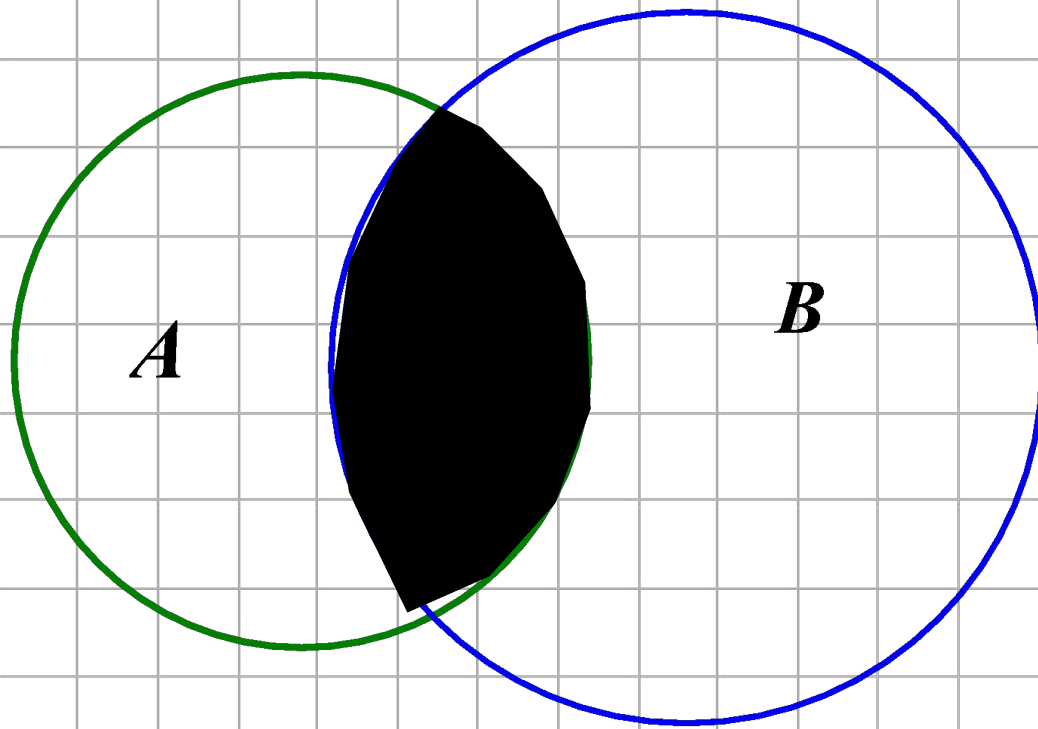
Решение:

$$P(A) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} : \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{6}$$

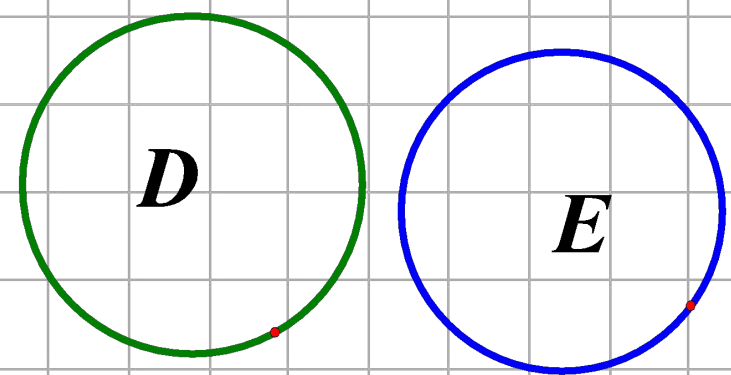
Сложение вероятностей.



$$Z = N \sqcup N_- \sqcup \{0\}$$



$$C = A \cap B$$



$$D \cap E = \emptyset$$

D и E называются *несовместными событиями*.

Сложение вероятностей.

Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \bar{\cap} B) = P(A) + P(B)$$



Пример 1.

В урне находятся 30 шаров 10 белых, 15 красных и 5 синих.

Найдите вероятность появления цветного шара.

Решение:

$$P(A \bar{\cap} B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример 2.

В контейнере 10 деталей, из них 2 нестандартные. Найдите вероятность того, что из 6 наугад отобранных деталей окажется не более одной нестандартной.



Решение:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 - \text{всего событий}$$

Событие **A** – все 6 отобранных деталей стандартные,

событие **B** – среди 6 отобранных деталей одна нестандартная.

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 - \text{благоприятные события для } A$$

$$C_2^1 \cdot C_8^5 = 2 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 112 - \text{благоприятные события для } B$$

$$P(A \boxplus B) = P(A) + P(B) = \frac{28}{210} + \frac{112}{210} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$$

Умножение вероятностей.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A \boxtimes B) = P(A) \cdot P(B)$$



Пример 1.
Монету бросают 3
раза подряд. Какова
вероятность, что
решка выпадет все три
раза.

Решение:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Пример 2.



о попадания в

первого

а при стрельбе из
дия равна $0,7$.

оятность

хотя бы одного попадания в цель, если каждое
орудие сделало по одному выстрелу.

Решение:

событие A – попадание в цель 1-го орудия;

событие B – попадание в цель 2-го орудия.

событие \bar{A} - промах 1-го орудия

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$$

событие \bar{B} - промах 2-го орудия

$$\Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

события \bar{A} и \bar{B} независимые

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$$

события A и $\bar{A} \cap \bar{B}$ противоположные

$$P(A) = 1 - 0,06 = 0,94$$