Классические неравенства в задачах

Цель работы:

Ис ческих неравенств в алгебре и применение этих неравенств на других примерах.

Задачи:

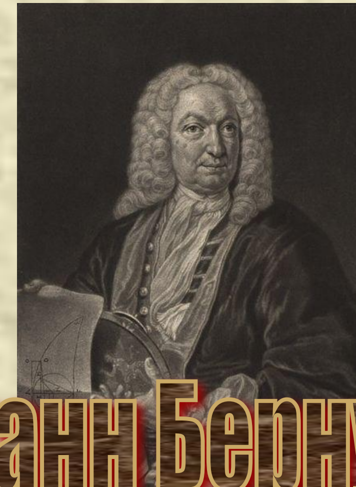
- Краткое изложение творческой деятельности ученых-математиков: Якоба Бернулли, Коши, Гюйгенса и Буняковского
- Исследование способов решения классических неравенств
- Применение популярных неравенств в задачах

Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упускать случая сделать его немного занимательным.

- В 1557 г. Роберт Рекорд ввел знак равенства.
- Английский ученый Гарриот ввел употребляемые поныне знаки неравенства в 1631 г., (до него писали словами "больше" , "меньше").

Николай Бернулли

Якоб Бернулли



Иоганн Бернулли

Даниил Бернулли

Якоб Бернулли
1654-1705
ученый математик

Неравенство Якоба Бернулли.

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ где } x > -1$$

Пример: Докажите неравенство

$$2^n \geq 1 + n$$

Решение: Достаточно представить 2=1+1 и применить неравенство Бернулли

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$$

Огюстен Луи Коши – французский Математик 21.08.1798г.-22.05.1857г., член Парижской Академии Наук(1816). Коши принадлежит определение определенного интеграла, доказательство формулы Ньютона-Лейбница.

Неравенство Коши.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Пример: Произведение положительных чисел

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 1$$

Докажите, что

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

Утверждение следует из неравенства Коши.

Христиан Гюйгенс ван Зюйлихем Голландский механик, физик и математик (14.04.1629г.-8.07.1695г.) Научную деятельность начал в 22 года, опубликовав работу об определении для дуги окружности, эллипса и гиперболы.

Неравенство Гюйгенса.

Для любых положительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

верно неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots, x_n}\right)^n$$

Пример.

Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{(a+tg^2x)(b+tg^2)}{tg^2x},\ a>o,\ b>0,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение. Запишем функцию в виде, удобном для применения неравенства Гюйгенса $n=2$

$$a\left(1+\frac{tg^2x}{a}\right)\left(1+\frac{b}{tg^2x}\right)\geq a\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

Следовательно, наименьшее значение функции равно $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ и достигается при условии $\frac{tg^2x}{a}=\frac{b}{tg^2x}$

т.е. при $x=arctg\sqrt[4]{ab}$

Буняковский Виктор Яковлевич – знаменитый русский математик (3.12.1804г.-30.11.1880г.) читал лекции в Петербургском университете, преимущественно работал над теорией чисел и теорией вероятностей.

Неравенство Буняковского.

Для любых чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^n\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^n\right)} \geq$$

$$\geq \left|a_1 b_1\right| + \left|a_2 b_2\right| + \ldots + \left|a_n b_n\right|$$

Пример.

Докажите, что если $a+b+c=1,\ a>-\frac{1}{4},\ b>-\frac{1}{4},\ c>-\frac{1}{4},$ то

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{21}$$

Решение. Из неравенства получим

$$1\cdot\sqrt{4a+1}+1\cdot\sqrt{4b+1}+1\cdot\sqrt{4c+1}\le$$

$$\le\sqrt{(1+1+1)(4a+1+4b+1+4c+1)}=\sqrt{21}$$

Выводы:

-Неравенства принадлежат к числу тех
немногих понятий математики,
которые имеют многовековую
историю научного развития.

-Изучение неравенств позволяет полнее
раскрыть их научную и практическую
значимость

-Прикладная ценность знаний о неравенствах
заключается в том, что неравенства использу-
ются как средства сравнения, оценки, а также

знания способов решения неравенств и доказательство неравенств

-Классические неравенства используются и при решении неравенств повышенной сложности

-Приведенные в работе классические неравенства Бернулли, Коши, Гюйгенса и Коши - Буняковского, имеют важное значение в теории неравенств и в своих приложениях в математическом анализе, геометрии и алгебре.

-На этом работа по данной теме не заканчивается, следующий вопрос, который вызывает интерес

«Неравенство Бернулли. Число е»